

量子系における時間演算子の数学的解析

早大 理工 大場-中里 研究室 宮本 学¹

概要

公理的量子力学に基づいて量子系における時間演算子を解析する。時間演算子の解析の基礎として、Hilbert 空間上の2つの作用素 T と H がみたす, Weyl の関係式に似た代数的関係式, ‘ T -弱’Weyl の関係式, を導入する。この関係式は, Y. Aharonov と D. Bohm によって, 1次元自由粒子系の時間演算子として提案された作用素 T_0 と, 自由ハミルトニアン H_0 との間でもみたされる。そこで本稿では T_0 の解析をねらって, T -弱 Weyl の関係式をみたす作用素 T と H の一般的な解析および, それが時間演算子にもたらす結果について報告する。

1 はじめに

時間演算子 T は時間とエネルギーの不確定性関係と不可分な概念である。それは通常, 物理系のハミルトニアン H と正準交換関係 (canonical commutation relations, 以下 CCR と呼ぶ [1]) $[T, H] = i$ を満たす作用素として定義される ([2] およびその参考文献を参照)。仮にこのような作用素が矛盾なく定義できたなら, Schwarz の不等式により, 位置と運動量との不確定性関係と同様に, 時間とエネルギーとの不確定性関係が量子力学の理論の数学的枠組から自動的に導出される。例えば Y. Aharonov と D. Bohm [3] は, 1次元自由粒子系 (以下 1DFPS と呼ぶ) に対して,

$$T_0 := \frac{1}{2} (QP^{-1} + P^{-1}Q) \quad (1.1)$$

という作用素を提案した。ここで Q と P はそれぞれ $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の位置演算子と運動量演算子である。この作用素 T_0 を使えば, 形式的には自由ハミルトニアン $H_0 := P^2/2$ と CCR $[T_0, H_0] = i$ が, したがって T_0 と H_0 との間の不確定性関係が導出できる。しかし, (1.1) 式における逆作用素 P^{-1} が矛盾なく定義できるかという疑問が残った。また数学的に厳密ではないにせよ, あらゆる物理系に対して時間演算子を定義できるとは限らない, という W. Pauli による批判を忘れることはできない [4]。さらに, 例え矛盾なく時間演算子を定義できたとしても, その物理的解釈の不透明さは残されたままである。

我々は公理的量子力学 [5] に基づいて時間演算子に関する議論を進めていく。このとき公理的な立場から, 上述の問題点についていくつか述べることができる。まず (1.1) 式における逆作用素 P^{-1} は矛盾なく定義可能であり, $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の自己共役作用素である (詳述は次の節でなされる)。Pauli の批判については次のことが指摘できる。それは, この種の主張において使われている, 次のような命題である: ある作用素 T が存在して, それがあるハミルトニアン H と CCR

$$TH\psi - HT\psi = i\psi, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT) \quad (1.2)$$

¹ E-mail: miyamo@hep.phys.waseda.ac.jp

をみたしていれば、次の関係式

$$He^{iT}\psi = e^{iT}(H + \epsilon)\psi, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(H), \forall \epsilon \in \mathbf{R}^1 \quad (1.3)$$

がなりたつ。しかし、この命題は一般に正しくないことに注意しなければならない。この命題をみたさない例として、 $L^2([0, 1])$ 上の位置演算子 Q と運動量演算子 P をあげることができる。(1.2) と (1.3) 式において、 T を Q に、 H を P に置き換えると、(1.2) 式はなりたつが、(1.3) 式は $\epsilon = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ のときだけなりたつ。なぜなら P が自己共役であるための条件として、その定義域 $\text{Dom}(P)$ に含まれる任意の状態 ψ は、境界条件 $\psi(0) = \theta\psi(1)$ をみたさなければならないからである。ここで θ は、 $|\theta| = 1$ をみたす適当に固定された複素数である [6]。この境界条件より、 $\psi \in \text{Dom}(P)$ が $e^{i\epsilon Q}\psi \in \text{Dom}(P)$ をみたす (つまり、 P が $e^{i\epsilon Q}\psi$ に作用できる) ための必要十分条件は、 $\psi(0) = \theta e^{i\epsilon}\psi(1)$ がなりたつこと、すなわち $\epsilon = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ となることである。さらに時間演算子がオブザーバブル (すなわち自己共役作用素) でなければならない積極的理由は今のところみつかっていない。そこで我々は、時間演算子は少なくとも対称作用素であり、かつある物理系のハミルトニアンと CCR (1.2) 式をみたす作用素であることを要求する。ここで対称作用素とは、その特別の場合として自己共役作用素を含むような作用素である ([5, 6] および 3 節を参照)。

我々のここでの目的は、どのような量子系が対称な時間演算子の存在を許すのか、また時間演算子が量子系のダイナミクスとどのようにかかわっているのかを暴くことにある。そして、そのような量子系を分類することによって、時間演算子の物理的解釈を考えていくことである。時間演算子はその定義により、ハミルトニアンと CCR を通して直接に関係している。また、CCR はそれをみたす 2 つの作用素のスペクトルの定性的な性質を決定してしまうほど、代数的に強い関係式である [7]。そこで時間演算子を解析することで、我々は量子系のダイナミクスの定性的な面に関する情報を得ることが期待できる。後の議論のために、ここで 'T-弱'Weyl の関係式という概念を導入する。ある意味でこの関係式は (1.3) 式における T と H を入れ替えたものである。

定義 1.1 (T-弱 Weyl の関係式) : $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間、 T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素、そして H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする。このとき作用素 T と H の組が、T-弱 Weyl の関係式 (T-weak Weyl relations, 以下 T-weak WR と呼ぶ) をみたすとは、

$$Te^{-itH}\psi = e^{-itH}(T + t)\psi, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(T), \forall t \in \mathbf{R}^1 \quad (1.4)$$

がなりたつときをいう。

ここで、 $\text{Dom}(T)$ とは作用素 T の定義域のことを指す [5, 6]。(1.1) 式の作用素 T_0 は、実は対称作用素であって (次の節を参照)、自由ハミルトニアン H_0 と CCR (1.2) 式をみたし、さらに H_0 と T_0 -weak WR

$$T_0e^{-itH_0}\psi = e^{-itH_0}(T_0 + t)\psi, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(T_0), \forall t \in \mathbf{C} (\text{Im } t \leq 0) \quad (1.5)$$

をみたすことが直接に計算することでわかる。この代数的関係式が T_0 のスペクトルや定義域についての情報を得るために重要な役割を果たすことを後に示す。

2 節において, 時間演算子の解析の際に T -weak WR が重要な役割を果たすことを確認する. そのために, (1.5) 式の T_0 -weak WR をもちいて, $\text{Dom}(T_0)$ が survival probability によって特徴付けられることをみる. CCR と T -weak WR の関係については 3 節で述べる. 4 節において, T -weak WR をみたす作用素の組 T と H に関するいくつかの定理, 命題等を示す. それらは, T の標準偏差と survival probability との間になりたつ興味深い不等式, H は点スペクトルを持たない等の T と H のスペクトルの性質, そして T と H との間の不確定性関係に関するものである. 5 節では, これらの結果と Schrödinger 作用素論 [8, 9, 10] からの結果をもとに, 時間演算子に関する議論を展開する. そこで, 1DFPS 以外の量子系で時間演算子が存在することが可能な系について述べる. 実際あるクラスの量子系においては, T_0 のユニタリー変換によりたやすく構成できる. その構成方法は容易であるが, 時間演算子が存在する量子系が非常にたくさんあるのはおどろきである. 6 節において結論を述べる.

2 時間演算子の解析における T -weak WR の有効性

この節において, 時間演算子の解析に T -weak WR が重要な役割を果たすことをみる. そのためにまず, (1.1) 式における作用素 T_0 とその定義域 $\text{Dom}(T_0)$ を概観する.

2 乗可積分な関数からなる Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R}^1)$ を考える. $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素 T_0 は次のように定義される:

$$\text{Dom}(T_0) := \text{Dom}(QP^{-1}) \cap \text{Dom}(P^{-1}Q), \quad (2.1)$$

$$T_0 := \frac{1}{2} (QP^{-1} + P^{-1}Q). \quad (2.2)$$

ここで, 作用素 P は 1DFPS の運動量演算子である. 公理的な立場では, P は $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の微分作用素 D_x を使って $P := -iD_x$ と定義される. ここで, D_x は, 以下のように定義される:

$$\text{Dom}(D_x) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbf{R}^1) \left| \begin{array}{l} \psi \text{ は絶対連続であって,} \\ \int_{\mathbf{R}^1} \left| \frac{d\psi(x)}{dx} \right|^2 dx < \infty \end{array} \right. \right\}, \quad (2.3)$$

$$D_x \psi(x) := \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad \psi \in \text{Dom}(D_x). \quad (2.4)$$

ここで, 微分可能な関数は少なくとも絶対連続 [11] であることを注意しておく. 作用素 P を使って, この物理系のハミルトニアン H_0 は $H_0 := P^2/2$ と定義される. また位置演算子 Q は, x を掛ける $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の掛け算作用素 M_x によって, $Q := M_x$ と定義される. $\mathbf{R}^1$ 上の可測関数 $f(x)$ をかける $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の掛け算作用素 M_f は, 以下のように定義される:

$$\text{Dom}(M_f) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbf{R}^1) \left| \int_{\mathbf{R}^1} |f(x)\psi(x)|^2 dx < \infty \right. \right\}, \quad (2.5)$$

$$M_f \psi(x) := f(x)\psi(x), \quad \psi \in \text{Dom}(M_f). \quad (2.6)$$

T_0 の定義式のなかに含まれる P^{-1} は矛盾なく定義され, $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の自己共役作用素であることを注意しておく. 何故なら, 一般に任意の自己共役作用素 A に対して, もしもその逆作用素 A^{-1}

が存在するならば逆作用素 A^{-1} は自己共役でなければならないからである [12]. 1DFPS での運動量演算子 P の場合, P は単射, つまり $\{\psi \in \text{Dom}(P) \mid P\psi = 0\} = \{0\}$ がなりたつ. したがって逆作用素 P^{-1} は定義可能 [5, 6, 12] で自己共役である. T_0 の運動量表示 [5] は次のようになる:

$$FT_0F^{-1} = \frac{1}{2} (iD_k M_{1/k} + M_{1/k} iD_k). \quad (2.7)$$

またその定義域は次のようになる:

$$\text{Dom}(FT_0F^{-1}) = \text{Dom}(D_k M_{1/k}) \cap \text{Dom}(M_{1/k} D_k) \quad (2.8)$$

$$= \left\{ \psi \in \text{Dom}(M_{1/k}) \mid M_{1/k}\psi \in \text{Dom}(D_k) \right\} \\ \cap \left\{ \psi \in \text{Dom}(D_k) \mid D_k\psi \in \text{Dom}(M_{1/k}) \right\}. \quad (2.9)$$

ここで, F は Fourier 変換を表し, $L^2(\mathbf{R}^1)$ から $L^2(\mathbf{R}_k^1)$ へのユニタリー作用素になっている.

ところで T_0 の定義式 (2.2) のなかにある P^{-1} のために, 一見 $\text{Dom}(T_0)$ は制限されているかのように思われる. 実際このことは次の簡単な例からわかる [2],

例 1 : $\phi_n(k) := k^n e^{-a_0 k^2}$ ($n \geq 0$, $a_0 > 0$) を考える. このとき直接計算することで, $\phi_n \in \text{Dom}(FT_0F^{-1})$ ($n \geq 2$) とわかる. したがってこれらの関数に対して次のように計算される:

$$FT_0F^{-1}\phi_n(k) = \frac{i}{2} \left[(2n-1)k^{n-2} - 2a_0 k^{n-1} - 2a_0 k^n \right] e^{-a_0 k^2}. \quad (2.10)$$

しかし, 上式において $n = 0, 1$ の場合を形式的に考えれば, 右辺の関数は二乗可積分ではない. ゆえに $\phi_0, \phi_1 \notin \text{Dom}(FT_0F^{-1})$ でなければならない.

上の例の結果にもかかわらず, $\text{Dom}(T_0)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密である. このことは以下で定義する部分空間 C_i ($\subset \text{Dom}(FT_0F^{-1})$) が $L^2(\mathbf{R}_k^1)$ で稠密であることからわかる. C_i は次のように定義される:

$$C_i := \left\{ \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_k^1) \mid \text{supp } \psi(k) \subset \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\} \right\}. \quad (2.11)$$

ゆえに T_0 の共役作用素 T_0^* が定義可能であって [5, 6, 12], T_0 が対称作用素であることが以下の計算からわかる:

$$T_0^* \supset \frac{1}{2} \left((QP^{-1})^* + (P^{-1}Q)^* \right) \supset \frac{1}{2} \left((P^{-1})^* Q^* + Q^* (P^{-1})^* \right) = T_0. \quad (2.12)$$

ここで, $Q^* = Q$ および $(P^{-1})^* = P^{-1}$ であることを使った.

時間演算子の解析において, 1 節の (1.4) 式で定義した T -weak WR が重要な役割をすることを見るために, (1.5) 式における T_0 -weak WR をつかって $\text{Dom}(T_0)$ が survival probability と関係づくことを以下で見ることにする. ここで (1.5) 式における T_0 -weak WR は, 運動量表示において直接計算することにより示せる. FT_0F^{-1} が部分空間 C_i を不変にすることは重要である. つまり $FT_0F^{-1} : C_i \rightarrow C_i$ であって, C_i に含まれる状態に対して FT_0F^{-1} を何度でも作用することができる. 位置表示で表せば $T_0 : F^{-1}C_i \rightarrow F^{-1}C_i$ である. ここで $F^{-1}C_i = \{\psi \in L^2(\mathbf{R}^1) \mid \psi = F^{-1}\eta, \eta \in C_i\}$ である.

この事実は自明ではなく, したがって C_i は T_0 を特徴付ける重要な部分空間であると考えられる. このことに着目して (1.2) 式を使えば次の命題が得られる.

命題 2.1 : 任意の非負整数 n, m と $\psi, \phi \in \mathcal{C}_i$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |t|^n \left| \frac{d^m \langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle}{dt^m} \right| = 0 \quad (2.13)$$

がなりたつ. つまり $\langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle$ は $t \in \mathbf{R}^1$ の急減少関数である.

証明: $\psi, \phi \in F^{-1}\mathcal{C}_i$ とする. このとき T_0 が $F^{-1}\mathcal{C}_i$ を不変にすることから, $T_0\phi, T_0\psi \in F^{-1}\mathcal{C}_i \subset \text{Dom}(T_0)$ とわかる. (1.5) 式をつかうことで次の事実がわかる:

$$\begin{aligned} \langle \phi | e^{-itH_0} T_0 \psi \rangle &= \langle \phi | (T_0 - t) e^{-itH_0} \psi \rangle \\ &= \langle T_0 \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle - t \langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

さらに, H_0 が絶対連続 ((2.3) 式における絶対連続とは違う. 定理 4.4 の後の説明を参照) であることから, $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itH_0} \psi = 0$ が任意の $\psi \in L^2(\mathbf{R}^1)$ に対してなりたつことに注意する [8]. すると $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \phi | e^{-itH_0} T_0 \psi \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle T_0 \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle = 0$ がわかる. これらの事実と (2.14) 式により, 結局

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t \langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle = 0 \quad (2.15)$$

とわかる. 任意の自然数 $n \geq 2$ と $\psi, \phi \in \mathcal{C}_i$ に対して $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^n \langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle = 0$ がなりたつことを示すには, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $T_0^k : F^{-1}\mathcal{C}_i \rightarrow F^{-1}\mathcal{C}_i$ がなりたつことと, (2.14) 式と同様の以下の式を見ればよい:

$$\begin{aligned} \langle \phi | e^{-itH_0} T_0^{n+1} \psi \rangle &= \langle \phi | (T_0 - t)^{n+1} e^{-itH_0} \psi \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \langle T_0^{n+1-k} \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle + (-t)^{n+1} \langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.15) 式と上式により, 帰納的に任意の $n \geq 2$ に対して $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^n \langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle = 0$ が得られる. $\langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle$ が無限回連続微分可能であることをみるためには, H_0 が $F^{-1}\mathcal{C}_i$ を不変にする, つまり $H_0 : F^{-1}\mathcal{C}_i \rightarrow F^{-1}\mathcal{C}_i$ がなりたつことに注意すればよい. このとき任意の $\psi \in F^{-1}\mathcal{C}_i$ と $t \in \mathbf{R}^1$ に対して $e^{-itH_0} \psi$ が無限回強連続強微分可能 [5] であることから, もとめる結果が得られる. ■

上の命題から, $t \rightarrow \pm\infty$ のときに確立振幅 $\langle \phi | e^{-itH_0} \psi \rangle$ は t のどんなべきよりも速く 0 に収束するとわかる. このことは自明でないのであるが, それは次の例よりわかる.

例 2 : 任意の $\psi \in L^2(\mathbf{R}_k^1)$ と $t \in \mathbf{R}^1$ に対して ψ の survival probability $P_\psi(t)$ を次のように定義する: $P_\psi(t) := |\langle \psi | e^{-itH_0} \psi \rangle|^2$. このとき以前の例における ϕ_n , $n \geq 0$ に対して $P_{\phi_n}(t) = (1 + t^2/16a_0^2)^{-n-1/2}$ ともとまる. これらは $t \rightarrow \pm\infty$ において高々 t のべきとして $|t|^{-(2n+1)}$ のようにふるまう.

上の例から我々は $\text{Dom}(T_0)$ (もしくは T_0) と survival probability との間に何らかの関係があると期待できる. 実はこの期待は K. Bhattacharyya や Eric A. Gislason 等の仕事からも見ることができ [13, 14]. ある意味でこの期待は命題 4.2 における不等式 (4.2) を導くことで実現されるといえる. この不等式は T -weak WR をもちいることで示される.

3 T -weak WR とその CCR との関係

T -weak WR をより理解するために, 1 節にある T -weak WR の定義と同値な別の表現を以下におく.

命題 3.1 : $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素, そして H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき以下の (i), (ii) は同値である.

- (i) T と H は T -weak WR をみたす.
- (ii) 任意の $\psi \in \text{Dom}(T)$ と $t \in \mathbf{R}^1$ に対して $\psi_t \in \text{Dom}(T)$ ($\psi_t := e^{-itH}\psi$) がなりたち, かつ次の等式がなりたち:

$$\langle \psi_t | T \psi_t \rangle = \langle \psi | T \psi \rangle + t \langle \psi | \psi \rangle. \quad (3.1)$$

したがって T は非有界作用素である.

この命題の証明は, $\text{Dom}(T)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であること及び内積の連続性によりただちに示される. この命題より, ある物理系にハミルトニアン H と T -weak WR をみたす対称作用素 T が存在することは, その物理系に (3.1) 式のような状態 ψ_t における期待値が時間のパラメータ t に比例する対称作用素 T が存在することと同値である. 1 節で述べたように, 対称作用素 A とは, その特別の場合として自己共役作用素を含む作用素である. その正確な定義は, A の定義域 $\text{Dom}(A)$ が Hilbert 空間で稠密であって, $\text{Dom}(A) \subset \text{Dom}(A^*)$ であり, かつ任意の $\psi \in \text{Dom}(A)$ に対して $A\psi = A^*\psi$ がなりたちことである. ここで A^* は A の共役作用素を表す. 特に自己共役作用素とは $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^*)$ がなりたちときをいう [5, 6, 12]. (3.1) 式から, T -weak WR をみたす対称作用素 T が時間演算子とよばれるのに妥当な作用素であるとわかる.

しかし, 我々の時間演算子の定義は 1 節の正準交換関係 (1.2) 式によって与えたのであった (より正確には, Hilbert 空間で稠密な適当な部分空間上で (1.2) 式をみたすような対称作用素 T を時間演算子の定義と考えている). 正準交換関係 (1.2) 式と T -weak WR との関係は次の命題によって与えられる.

命題 3.2 : T を H と T -weak WR をみたす $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素とする. このとき $\mathcal{H}$ で稠密なある部分空間 $\mathcal{D}$ が存在して以下の (i), (ii), (iii) がなりたち.

- (i) $\mathcal{D} \subset \text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT)$,
- (ii) $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$,
- (iii) 任意の $\psi \in \text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT)$ に対して $TH\psi - HT\psi = i\psi$.

証明は文献 [1] の定理 VIII.14 の系の証明と同様に行える. また T と H が T -weak WR をみたしているとき, それが T の閉包に対してもなりたつことを示すのは容易である. この命題より, T -weak WR をみたす対称作用素は必然的に我々の定義の意味での時間演算子である. ここで, Weyl の関係式 [1] (以下 WR と呼ぶ), T -weak WR, CCR の関係をあらためて示しておく:

$$\begin{aligned} e^{-isT}e^{-itH}\psi &= e^{-ist}e^{-itH}e^{-isT}\psi, & \psi \in \mathcal{H} & \quad (\text{WR}) \\ \Rightarrow Te^{-itH}\psi &= e^{-itH}(T+t)\psi, & \psi \in \text{Dom}(T) & \quad (T\text{-weak WR}) \\ \Rightarrow TH\psi - HT\psi &= i\psi, & \psi \in \text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT) & \quad (\text{CCR}). \end{aligned}$$

しかし, 1 節の例にもあるように, これらの逆向きが一般にはなりたたないことは注意しなければならない.

4 T -weak WR に基づくいくつかの結果

この節では, T -weak WR をみたす作用素 T と H に関して得られるいくつかの結果を述べる. これらの結果は T と H のそれぞれのスペクトル, T と survival probability との間になりたつ興味深い不等式, そして T と H との間の不確定性関係に関するものである. これらの結果を述べる前の準備として以下の定義をおく.

定義 4.1 : A を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とすると, 任意の状態 $\psi \in \text{Dom}(A)$ に対して ψ における A の期待値 $\langle A \rangle_\psi$ および標準偏差 $(\Delta A)_\psi$ を以下で定義する:

$$\langle A \rangle_\psi := \langle \psi | A \psi \rangle, \quad (\Delta A)_\psi := \left\| (A - \langle A \rangle_\psi) \psi \right\|. \quad (4.1)$$

この準備のもと, まず T -weak WR をみたす作用素 T と survival probability との間になりたつ以下の不等式を示す.

命題 4.2 : T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素, H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. また 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して ψ の survival probability と呼ばれる $t \in \mathbf{R}^1$ の関数 $P_\psi(t)$ を $P_\psi(t) := \left| \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle \right|^2$ で定義する. このとき T と H が T -weak WR をみたすならば, 任意の $\psi \in \text{Dom}(T)$ と $t \in \mathbf{R}^1$ に対して次の不等式がなりたつ:

$$\frac{4(\Delta T)_\psi^2 \|\psi\|^2}{t^2} \geq P_\psi(t). \quad (4.2)$$

証明: 仮定より任意の $\psi \in \text{Dom}(T)$ と $t \in \mathbf{R}^1$ に対して T -weak WR: $Te^{-itH}\psi = e^{-itH}(T+t)\psi$ がなりたつ. この関係式を T と e^{-itH} の交換関係とみれば, 以下 2 つの式が得られる:

$$[T, \cos(tH)]\psi = -it \sin(tH)\psi, \quad (4.3)$$

$$[T, \sin(tH)]\psi = it \cos(tH)\psi. \quad (4.4)$$

ここで $\cos(tH) := \frac{1}{2}(e^{itH} + e^{-itH})$, $\sin(tH) := \frac{1}{2i}(e^{itH} - e^{-itH})$ であって, これらは自己共役作用素である. これら 2 つの交換関係について不確定性関係を導出する. まず (4.3) 式からは,

Schwarz の不等式により任意の $\psi \in \text{Dom}(T)$ に対して

$$(\Delta T)_\psi^2 \|\cos(tH)\psi\|^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [T, \cos(tH)] \psi \rangle|^2 \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{4} |\langle \psi | -it \sin(tH) \psi \rangle|^2 \quad (4.6)$$

$$= \frac{t^2}{4} |\text{Im} \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle|^2 \quad (4.7)$$

が得られる. 次に (4.4) 式からも同様の計算により,

$$(\Delta T)_\psi^2 \|\sin(tH)\psi\|^2 \geq \frac{t^2}{4} |\text{Re} \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle|^2. \quad (4.8)$$

$\|\cos(tH)\psi\|^2 + \|\sin(tH)\psi\|^2 = \|\psi\|^2$ に注意して, これら 2 つの不等式を足し合わせれば,

$$(\Delta T)_\psi^2 \|\psi\|^2 \geq \frac{t^2}{4} |\langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle|^2 \quad (4.9)$$

が得られる. よって survival probability $P_\psi(t)$ の定義式を用いれば, もとめる不等式 (4.2) が示される. ■

不等式 (4.2) から T -weak WR をみたす対称作用素 T の固有値について, 次のことがすぐに示せる.

系 4.3 : T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素, H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき T と H が T -weak WR をみたすならば, T は固有値をもたない.

証明: いま, T が 0 でないベクトル $\psi_\lambda \in \text{Dom}(T)$ を固有ベクトルとする固有値 $\lambda \in \mathbf{R}^1$ をもとつと仮定する. したがって $T\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ がなりたち, かつ $\|\psi_\lambda\| = 1$ とできる. このとき状態 ψ_λ における T の標準偏差 $(\Delta T)_\psi$ は

$$(\Delta T)_\psi = \|(T - \langle T \rangle_{\psi_\lambda}) \psi_\lambda\| = \|(T - \lambda \|\psi_\lambda\|^2) \psi_\lambda\| = |\lambda(1 - \|\psi_\lambda\|^2)| \|\psi_\lambda\| = 0 \quad (4.10)$$

となる. また T -weak WR の仮定より不等式 (4.2) がなりたつ. そこで (4.2) 式に (4.10) 式を代入すれば, $|\langle \psi_\lambda | e^{-itH} \psi_\lambda \rangle| = 0$, $t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}$ が得られる. ところで任意の $t \in \mathbf{R}^1$ に対して e^{-itH} は強連続であるから, このことは $0 = \lim_{t \rightarrow 0} |\langle \psi_\lambda | e^{-itH} \psi_\lambda \rangle| = \|\psi_\lambda\|^2$ を意味する. これは $\|\psi_\lambda\| = 1$ に矛盾する. したがって T は固有値をもたない. ■

さらに命題 4.2 にある不等式 (4.2) から, ある対称作用素 T と T -weak WR をみたしている自己共役作用素 H のスペクトルについて次のことが示唆される. それは, H と T -weak WR をみたすような T が存在すれば, それらの作用する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は H の散乱状態だけからなるのではないか, という予想である. この予想は次の例から理解できる.

例 3 : $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 H のスペクトルが高々可算個の離散固有値 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ だけからなっている場合を考える. このとき $\mathcal{H}$ の任意の状態 ψ の survival probability $|\langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle|^2$ はせいぜい準周期的な振る舞いをする. 特に任意の $\psi \neq 0$ に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} |\langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle|^2 dt = \sum_{n=1}^\infty \|E(\{\lambda_n\})\psi\|^4 \neq 0 \quad (4.11)$$

がなりたち, 適当な列 $\{t_N\}_{N=1}^{\infty}$ で $t_N \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) かつ

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \left| \left\langle \psi \left| e^{-it_N H} \psi \right. \right\rangle \right|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|E(\{\lambda_n\})\psi\|^4 \quad (4.12)$$

をみたすものが存在することを示せる. ここで $\{E(B) \mid B \in \mathbf{B}^1\}$ は H のスペクトル測度であって, $\mathbf{B}^1$ は $\mathbf{R}^1$ の開集合全体を含む最小の σ -加法族である. この (4.12) 式によって示される survival probability の振る舞いと, H と T -weak WR をみたす作用素 T が存在するときになりたつ不等式 (4.2) によって予言される survival probability の振る舞いは, 互いに長時間において矛盾する. したがってこの例での H と T -weak WR をみたす対称作用素 T は存在しない.

実際に上述の予想は正しく, それは次の定理によってまとめられる. しかしその証明は, 上の例とは違って H の形を仮定せずになされる.

定理 4.4 : H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき H と T -weak WR をみたす $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T が存在するならば, $\mathcal{H}_{\text{pp}}(H) = \{0\}$ がなりたつ. すなわち H は点スペクトル (固有値全体の集合) をもたない.

この定理の証明の準備として, ここでいくつか述べておく. H を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の自己共役作用素とする. このときスペクトル定理によって, H のスペクトル表示を与えるスペクトル測度 [5, 8, 12] と呼ばれる正射影作用素の族 $\{E(B) \mid B \in \mathbf{B}^1\}$ がただひとつ存在する. H のスペクトル表示は記号的に

$$H = \int_{\mathbf{R}^1} \lambda dE(\lambda) \quad (4.13)$$

と記される. H をハミルトニアンとみれば, これは通常の量子力学における H のエネルギー表示

$$H = \int_{\mathbf{R}^1} \lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| d\lambda \quad (4.14)$$

に対応するといえる. ここで '=' と書いたのは, 数学的に厳密な意味での等号とを区別するためである. また任意の自己共役作用素 H に対して, H によって定まる部分空間により $\mathcal{H}$ は直和分解される. すなわち,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pp}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\text{sing}}(H) \quad (4.15)$$

である. ここで, $\mathcal{H}_{\text{pp}}(H)$, $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H)$, $\mathcal{H}_{\text{sing}}(H)$ は $\mathcal{H}$ の部分空間であって,

$$\mathcal{H}_{\text{pp}}(H) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \|E(\cdot)\psi\|^2 \text{ は Lebesgue 測度について純粋点状}\}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \|E(\cdot)\psi\|^2 \text{ は Lebesgue 測度について絶対連続}\}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{H}_{\text{sing}}(H) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \|E(\cdot)\psi\|^2 \text{ は Lebesgue 測度について特異連続}\} \quad (4.18)$$

で定義される [1, 8, 9] (表記は [1] にしたがった). ここで $\|E(\cdot)\psi\|^2$ の説明をしておく. $\|\psi\| = 1$ とするとき, スペクトル測度の定義より $\|E(\cdot)\psi\|^2$ は可測空間 $(\mathbf{R}^1, \mathbf{B}^1)$ 上の確率測度となる. 例えばハミルトニアン H のスペクトル測度を $\{E(B) \mid B \in \mathbf{B}^1\}$ とすれば, $\|E(B)\psi\|^2$ は状態 ψ において, エネルギーの測定値 λ が集合 B の中に検出される確率 $P_\psi(\lambda \in B)$ を表す [5]. 上の定義

はこの確率測度の性質に基づいている。\$H\$ をハミルトニアンとみるとき、\$\mathcal{H}_{\text{pp}}(H)\$ は \$H\$ の束縛状態に、残りの \$\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\text{sing}}(H)\$ は散乱状態に対応する。例えば、例 3 における自己共役作用素 \$H\$ については、Hilbert 空間 \$\mathcal{H}\$ は \$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pp}}(H)\$ となつて、\$\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) = \mathcal{H}_{\text{sing}}(H) = \{0\}\$ である。また、\$L^2(\mathbf{R}^1)\$ 上の自由ハミルトニアン \$H_0\$ については、\$\mathcal{H} := L^2(\mathbf{R}^1)\$ とするとき、\$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H_0)\$ となつて、\$\mathcal{H}_{\text{pp}}(H_0) = \mathcal{H}_{\text{sing}}(H_0) = \{0\}\$ である。このとき \$H_0\$ は絶対連続 (absolutely continuous) であると呼ばれる。この分解に応じて任意の \$\psi \in \mathcal{H}\$ は一意的に

$$\psi = \psi_{\text{pp}} + \psi_{\text{ac}} + \psi_{\text{sing}} \quad (4.19)$$

と分解される。これらは互いに直交する。ここで \$\psi_{\text{pp}} = P_{\text{pp}}\psi\$ であつて \$P_{\text{pp}}\$ は \$\mathcal{H}_{\text{pp}}(H)\$ への正射影作用素である。同様に \$\psi_{\text{ac}}\$ と \$\psi_{\text{sing}}\$ も、\$\mathcal{H}_{\text{ac}}(H)\$ と \$\mathcal{H}_{\text{sing}}(H)\$ のそれぞれへの正射影作用素 \$P_{\text{ac}}\$ と \$P_{\text{sing}}\$ をつかつて表せる。

定理 4.4 の証明：\$\mathcal{H}\$ の部分空間 \$\mathcal{H}_c(H)\$ を

$$\mathcal{H}_c(H) := \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\text{sing}}(H) \quad (4.20)$$

と定義すれば、この空間への射影 \$P_c\$ は \$P_c = P_{\text{ac}} + P_{\text{sing}}\$ と表せる。また \$\psi_c := P_c\psi\$ とおくと、\$\psi = \psi_{\text{pp}} + \psi_c = P_{\text{pp}}\psi + P_c\psi\$ と表せる。このとき、この直和分解に応じて

$$\langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle = \langle \psi_{\text{pp}} | e^{-itH} \psi_{\text{pp}} \rangle + \langle \psi_c | e^{-itH} \psi_c \rangle \quad (4.21)$$

が得られる。なぜなら、正射影作用素は自己共役であつて \$P_c P_{\text{pp}} = P_{\text{pp}} P_c = 0\$ がなりたち、さらに \$P_{\text{pp}}\$ と \$P_c\$ のそれぞれが \$e^{-itH}\$ と可換であることから、

$$\langle \psi_{\text{pp}} | e^{-itH} \psi_c \rangle = \langle P_{\text{pp}}\psi | e^{-itH} P_c\psi \rangle = \langle P_{\text{pp}}\psi | P_c e^{-itH} \psi \rangle = \langle P_c P_{\text{pp}}\psi | e^{-itH} \psi \rangle = 0 \quad (4.22)$$

などがなりたつからである。(4.21) 式をさらに変形すれば、

$$\left| \langle \psi_{\text{pp}} | e^{-itH} \psi_{\text{pp}} \rangle \right|^2 = \left| \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle - \langle \psi_c | e^{-itH} \psi_c \rangle \right|^2 \quad (4.23)$$

$$\leq 2 \left(\left| \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle \right|^2 + \left| \langle \psi_c | e^{-itH} \psi_c \rangle \right|^2 \right). \quad (4.24)$$

が得られる。ところでこの定理の仮定により \$T\$ と \$H\$ は \$T\$-weak WR をみたすから、必然的に不等式 (4.2) がなりたつ。そこで \$t \in \mathbf{R}^1\$ の関数 \$G(t)\$ を以下のように定義する：

$$G(t) := \begin{cases} \frac{\|\psi\|}{2(\Delta T)_\psi} & t \in (-2(\Delta T)_\psi, 2(\Delta T)_\psi) \\ \frac{2(\Delta T)_\psi \|\psi\|}{|t|} & t \in \mathbf{R}^1 \setminus (-2(\Delta T)_\psi, 2(\Delta T)_\psi) \end{cases}. \quad (4.25)$$

すると不等式 (4.2) と \$\left| \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle \right| \leq \|\psi\|^2\$ により、\$\left| \langle \psi | e^{-itH} \psi \rangle \right| \leq G(t)\$ がいつでもなりたつ。この \$G(t)\$ をつかえば、

$$\left| \langle \psi_{\text{pp}} | e^{-itH} \psi_{\text{pp}} \rangle \right|^2 \leq 2 \left(G(t)^2 + \left| \langle \psi_c | e^{-itH} \psi_c \rangle \right|^2 \right) \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{T} \int_{[0,T]} \left| \langle \psi_{\text{pp}} | e^{-itH} \psi_{\text{pp}} \rangle \right|^2 dt \leq \frac{2}{T} \int_{[0,T]} \left(G(t)^2 + \left| \langle \psi_c | e^{-itH} \psi_c \rangle \right|^2 \right) dt \quad (4.27)$$

が得られる. この式の両辺について $T \rightarrow \infty$ の上極限をとれば,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} \left| \langle \psi_{pp} | e^{-itH} \psi_{pp} \rangle \right|^2 dt = 0 \quad (4.28)$$

がもとまる. なぜなら, まず直接計算することで,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} G(t)^2 dt = 0 \quad (4.29)$$

とわかる. 次に $\|E(\cdot)\psi_c\|^2$ は有界かつ連続であること, つまり $\|E(\mathbf{R}^1)\psi_c\| = \|\psi_c\| < \infty$ であって, かつ $\psi_c \in \mathcal{H}_c(H)$ により任意の可算集合 $A \in \mathbf{B}^1$ に対して $\|E(A)\psi_c\|^2 = 0$ がなりたつことに注意する. すると Wiener の定理 [15] により,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} \left| \langle \psi_c | e^{-itH} \psi_c \rangle \right|^2 dt = 0 \quad (4.30)$$

が得られる. 以上 (4.29) 及び (4.30) 式を (4.27) 式に適用すれば, (4.28) 式がもとまる. ここで再び Wiener の定理をつかえば, (4.28) 式が次のことを意味するのがわかる:

$$0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} \left| \langle \psi_{pp} | e^{-itH} \psi_{pp} \rangle \right|^2 dt \quad (4.31)$$

$$= \int \int_{\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \mid \lambda = \mu\}} d \langle \psi_{pp} | E(\lambda) \psi_{pp} \rangle d \langle \psi_{pp} | E(\mu) \psi_{pp} \rangle \quad (4.32)$$

$$\geq \sum_{\lambda \in A} \|E(\{\lambda\})\psi_{pp}\|^4. \quad (4.33)$$

ここで A は $\mathbf{B}^1$ に含まれる任意の可算集合である. この結果は $\psi_{pp} \in \mathcal{H}_{pp}(H) \cap \mathcal{H}_c(H)$ を意味する. したがって直和分解の定義により $P_{pp}\psi = \psi_{pp} = 0$ がなりたたなければならない. $\psi \in \text{Dom}(T)$ は任意であって, かつ $\text{Dom}(T)$ は $\mathcal{H}$ で稠密であるから, $P_{pp} = 0$ とわかる. このことは $\mathcal{H}_{pp}(H) = \{0\}$ を意味する. ■

この定理を使えば例 3 の結果はすぐに導かれ, それは以下のようにまとめられる.

系 4.5 : H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, そのスペクトルが固有値だけからなるとする. このとき H と T -weak WR をみたす $\mathcal{H}$ 上の対称作用素は存在しない.

この定理 4.4 における H をハミルトニアンとみると, この定理は, H と T -weak WR をみたすような対称作用素 T が存在すれば, Hilbert 空間 (したがって着目している物理系) は散乱状態だけからなる, ということを主張している. 命題 3.1 によれば, 着目している物理系に (3.1) 式のような期待値がパラメータ t に比例して発展する対称作用素が存在すれば, その物理系は散乱状態だけからなる, ともいえる. 次の節において, T -weak WR をみたす対称作用素 T すなわち時間演算子が存在する量子系の例を紹介する.

この節の最後に, T -weak WR をみたす作用素の組 T と H との間でなりたつ不確定性関係について述べる. 命題 3.2 の (iii) により, 不確定性関係が自動的に導出できるのはすぐにわかる [5]. しかし以下の定理は, ある条件のもとでは不確定性関係において等号をみたす状態が存在しないことを主張するものである. ここではその証明は省略する.

定理 4.6 : T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素, H を $\mathcal{H}$ 上の非負の自己共役作用素とする. つまり, 任意の $\psi \in \text{Dom}(H)$ に対して $\langle \psi | H \psi \rangle \geq 0$ がなりたつとする. このとき T と H が T -weak WR をみたし, かつそれが任意の $t \in \mathbb{C}$ ($\text{Im } t \leq 0$) に対してもなりたつならば, 以下の不確定性関係がなりたつ:

$$(\Delta T)_\psi (\Delta B)_\psi > \frac{1}{2}. \quad (4.34)$$

ここで $\psi \in \text{Dom}(TB) \cap \text{Dom}(BT)$ ($\|\psi\| = 1$) であって, 特に等号をみたす状態は存在しない.

(1.5) 式により, 1DFPS での T_0 と H_0 がこの定理の条件をみたしていることを注意しておく.

5 一般的な量子系における時間演算子の構成

この節では, 前節および Schrödinger 作用素論からの結果をつかって, 1DFPS を含むより一般的な量子系における時間演算子について議論する. 特に注目すべき結果は, 1次元量子系においてポテンシャル $V(x)$ が $\mathbf{R}^1$ 上の実可測関数であって, 有界: $0 \leq V(x) \leq \text{定数}$ a.e. かつ $\mathbf{R}^1$ 上で絶対可積分ならば, $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上のハミルトニアン $H_1 := H_0 + V$ と T_1 -weak WR をみたす $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の対称作用素 T_1 , すなわち命題 3.2 により, 時間演算子が存在することである. このようなポテンシャルをもつ系には, 階段型の障壁ポテンシャルや $1/\cosh^2 x$ 型のポテンシャルをもつ系など我々に馴染みのものも多い. ここではまず, 1DFPS の時間演算子 T_0 について前節の結果からわかる事実をまとめる.

例 4 :

- (i) (1.5) 式より T_0 と H_0 は T_0 -weak WR をみたす. したがって命題 3.2 により, $\text{Dom}(T_0 H_0) \cap \text{Dom}(H_0 T_0)$ 上で CCR および不確定性関係がなりたつ.
- (ii) 命題 4.2 より, 任意の $\psi \in \text{Dom}(T_0)$ に対して $(\Delta T_0)_\psi$ と survival probability との間で不等式 (4.2) がなりたつ.
- (iii) 系 4.3 より T_0 は固有値をもたない.
- (iv) 定理 4.6 より T_0 と H_0 との間の不確定性関係において等号をみたす状態は, $\text{Dom}(T_0 H_0) \cap \text{Dom}(H_0 T_0)$ には存在しない.

ここで上の例についていくつか述べておく. まず (ii) について, 不等式 (4.2) から例 1 における Gauss 波束 ϕ_0 が $\text{Dom}(FT_0 F^{-1})$ に入らないのがすぐにわかる. なぜなら, $t \rightarrow \infty$ において 1DFPS における Gauss 波束の survival probability は t^{-1} で減衰するのだが, このことは (4.2) 式から survival probability が t^{-2} で上から押さえられることに矛盾する. したがって $\phi_0 \notin \text{Dom}(FT_0 F^{-1})$ でなければならない. しかし, 一般的に空間次元があがるごとに survival probability の減衰のしかたは速くなるので, この手の議論は 1次元でこそ効果があるといえる. またこの不等式 (4.2) に関して, 任意の $\psi \in \text{Dom}(T_0)$, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ に対して $\tau_h(\psi) := \sup \left\{ t \geq 0 \mid \left| \langle \psi | e^{-itH_0} \psi \rangle \right|^2 = 1/2 \right\}$, と定義すれば,

$$2\sqrt{2}(\Delta T_0)_\psi \geq \tau_h(\psi) \quad (5.1)$$

が得られる. つまり $2\sqrt{2}(\Delta T_0)_\psi$ は $\tau_h(\psi)$ の上限をあたえる. これは, 観測量 $\tau_h(\psi)$ と T_0 との直接的な関係を与えているという意味で重要である. さらに (iv) について, 確かに不確定性関係において等号をみたす状態は存在しないが, 少なくとも次のことはなりたつことを注意しておく [2]:

$$\inf_{\|\psi\|=1, \psi \in \text{Dom}([T_0, H_0])} (\Delta T_0)_\psi (\Delta H_0)_\psi = \frac{1}{2}. \quad (5.2)$$

次に, 1DFPS 以外の量子系で時間演算子の存在する系について述べる. そのための準備として, C. R. Putnam による次の定理をあげる [7].

定理 5.1 (C. R. Putnam) : $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の自己共役作用素 H_0 を 1DFPS のハミルトニアンとし, $V(x)$ を $\mathbf{R}^1$ 上の実数値可測関数で, $0 \leq V(x) \leq \text{定数}$ a.e. および $V(x) \in L^1(\mathbf{R}^1)$ をみたすとする (このとき $V(x) \in L^2(\mathbf{R}^1)$ がなりたつ). さらに $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素 H_1 を $H_1 := H_0 + V(x)$ で定義する. このとき H_0 と H_1 は絶対連続であり, かつ波動作用素: $U_\pm := \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0}$ が存在してユニタリーであり, $H_1 = U_\pm H_0 U_\pm^*$ をみたし, $L_{ac}^2(U_\pm) \supset \text{Ran}(V)$ がなりたつ. また, もしも

$$\liminf_{b-a \rightarrow \infty} (b-a)^{-3} \int_{[a,b]} V^{-1}(x) dx = 0 \quad (5.3)$$

がなりたつならば, $U_\pm$ のスペクトルは $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ である.

この定理により, 定理 5.1 におけるハミルトニアン H_1 と T_1 -weak WR をみたす $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の対称作用素 T_1 をすぐに構成できる. それには $T_{1,\pm} := U_\pm T_0 U_\pm^*$ と定義すればよい. このとき $U_\pm$ によって (1.5) 式をユニタリー変換すれば, $T_{1,\pm}$ -weak WR

$$T_{1,\pm} e^{-itH_1} \phi = e^{-itH_1} (T_{1,\pm} + t) \phi, \quad \forall \phi \in \text{Dom}(T_{1,\pm}), \forall t \in \mathbf{C} \ (\text{Im } t \leq 0) \quad (5.4)$$

が得られる. ここで $\phi := U_\pm \psi$, $\psi \in \text{Dom}(T_0)$ である. したがって (5.4) 式により, 例 4 に挙げた T_0 と H_0 の間でなりたつ性質は, $T_\pm$ と H_1 の間でもなりたつ.

束縛状態をもつような一般的なポテンシャルの場合, 波動作用素 $U_\pm := \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0}$ が存在すれば, その値域 $\text{Ran}(U_\pm)$ は $\text{Ran}(U_\pm) \subset L_{ac}^2(H_1)$ をみたす. ここで $L_{ac}^2(H_1)$ とは, 定理 4.4 の下の説明にある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 H を $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の自己共役作用素 H_1 とみなすとき, H に対する $\mathcal{H}_{ac}(H)$ と同様に定義される $L^2(\mathbf{R}^1)$ の部分空間である. この事実注目すれば, 束縛状態をもつようなポテンシャルの場合にも上と全く同様にしてハミルトニアン H_1 と T_1 -weak WR をみたす時間演算子 T_1 を構成することができる. ただし今述べた理由により, この方法で作られる T_1 の定義域は $L^2(\mathbf{R}^1)$ の部分空間 $L_{ac}^2(H_1)$ 上に制限される. この一般的な場合はにおける T_1 の構成は, S. T. Kuroda による次の定理に基づくのが明快である [7, 8, 9, 16]. 定理 5.1 は, 実はこの定理によっている.

定理 5.2 (S. T. Kuroda) : 任意の $V(x) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \leq 3$ に対して線形作用素 $H_1 := H_0 + V$ を定義する. このとき波動作用素 $U_\pm$ が存在して, $\text{Ran}(U_\pm) = L_{ac}^2(H_1)$ をみたす.

定理 5.1 を用いて時間演算子を構成したのと同じように, $T_{1,\pm} := U_{\pm} T_0 U_{\pm}^*$ と定義すれば, $T_{1,\pm}$ は $L_{ac}^2(H_1)$ 上で定義された対称作用素であって, その定義域は $\text{Dom}(T_{1,\pm}) = U_{\pm} \text{Dom}(T_0)$ である. そして $L_{ac}^2(H_1)$ 上で定義された自己共役作用素 $H_{1,ac} := H_1|_{L_{ac}^2(H_1)} = U_{\pm} H_0 U_{\pm}^*$ と $T_{1,\pm}$ -weak WR をみtas. ここで $H_1|_{L_{ac}^2(H_1)}$ は, H_1 の定義域 $\text{Dom}(H_1)$ ($\subset L^2(\mathbf{R}^1)$) を $L_{ac}^2(H_1)$ 上に制限した作用素を表す. しかしハミルトニアン H_1 が束縛状態をもつような場合, すなわち $L_{pp}^2(H_1) \neq \{0\}$ である場合は, 上のような定義域の制限なしに H_1 と T -weak WR をみtasような $L^2(\mathbf{R}^1)$ ($\neq L_{ac}^2(H_1)$) 上の対称作用素を構成することはできない. なぜなら定理 4.4 によって, 束縛状態をもつようなハミルトニアンと T -weak WR をみtas対称作用素は存在しないからである.

6 結論

我々は公理的量子力学に基づいて量子系における時間演算子を解析してきた. これらの解析において, 始めに $\text{Dom}(T_0)$ と survival probability との関係を命題 2.1 において見た. そしてこの事実により, 我々は T -weak WR の重要性を確認し, 命題 4.2 および定理 4.4 を導出した. 命題 4.2 は, ある意味で時間演算子と状態のダイナミクスとを直接的に関係づける不等式として重要である. また定理 4.4 によって, ある物理系にハミルトニアンと T -weak WR をみtas対称作用素 T が存在すれば, 必要条件としてこの物理系は散乱状態だけからなることがわかった. そしてこのような物理系の例として, 定理 5.1 にある, ポテンシャル $V(x)$ が $\mathbf{R}^1$ 上の実可測関数であって, 有界: $0 \leq V(x) \leq \text{定数}$ a.e. かつ $\mathbf{R}^1$ 上で絶対可積分であるような $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上のハミルトニアン $H_1 := H_0 + V$ をもつ物理系があげられた. このような物理系が非常に多いことはおどろきである. この事実により, ハミルトニアンと T -weak WR をみtas対称作用素 T が存在するかしないかに基づく量子系の分類の可能性が示唆される. このような視点は, 古典系においては新しいものではないことを注意しておく. 例えば古典系の分類の研究における I. Prigogine 等の仕事がある [17, 18]. 古典力学には B. O. Koopman による Hilbert 空間論を用いた形式があり, この形式は古典系のエルゴード理論に現われる [19]. I. Prigogine 等の仕事は, この形式において Lyapounov variables と呼ばれる作用素が存在するための, 古典系のもつべき性質の必要十分条件をもとめたことである (実は古典系における時間演算子に関係しているのであるが, ここではその詳細を説明しない). 我々は, 物理系にハミルトニアンと T -weak WR をみtas対称作用素 T が存在するための十分条件をわかっていない. このことに限らずとも, 多くの疑問が残されている. 例えば $\text{Dom}(T_0)$ と survival probability のダイナミクスとのより詳細な関連や, T -weak WR のように CCR を必然的に導く他の関係式などさまざまである. これらの問題は今後の課題である.

謝辞

有益な助言をくださった大場一郎先生 (早大) ならびに中里弘道先生 (早大) にはたいへん感謝致します. このシンポジウムに参加させていただき有光敏彦先生 (筑波大) ならびに田中篤司氏 (筑波大) にはあつく御礼申し上げます. また, この研究における当初からさまざまな助言をくだ

さった林正人氏 (理研) ならびに大沢進氏 (電通大) にはたいへん感謝致します。

参考文献

- [1] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.I: *Functional Analysis* (Academic Press, New York, 1972), Chap. VIII, Sec. 5.
- [2] D. H. Kobe and V. C. AGuilera-Navarro, *Phys. Rev. A*50, (1994) 933-938.
- [3] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* 122, (1961) 1649-1658.
- [4] W. Pauri, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, edited by S. Flü gge, *Encyclopedia of Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1958), Vol. V, pt. 1, pp.1-168. See footnote 1 on p. 60.
- [5] 新井朝雄, ヒルベルト空間と量子力学 (共立講座 21 世紀の数学 第 16 巻, 共立出版株式会社, 1997).
- [6] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operator in Hilbert Space*, (Dover, New York, 1963).
- [7] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*, (Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, 1967).
- [8] 黒田 成俊, スペクトル理論 II (岩波講座 基礎数学 解析学 (II) xi, 岩波書店, 1979).
- [9] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, (Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, Newyork, 1966).
- [10] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.III: *Scattering Theory* (Academic Press, New York, 1979).
- [11] 伊藤清三, ルベーク積分入門 (数学業書 4, 裳華房, 1963).
- [12] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三, 関数解析 I, II, III (岩波講座 基礎数学 解析学 (I) iv, 岩波書店, 1978).
- [13] K. Bhattacharyya, *J. Phys. A.* 16, (1983) 2993-2996.
- [14] Eric A. Gislason and Nora H. Sabelli, *Phys. Rev. A*31, (1985) 2078-2081.
- [15] 文献 [10], Chap. XI.
- [16] S. T. Kuroda, *Nuovo Cimento* 12, (1959) 431-454.

- [17] I. Prigogine, *FROM BEING TO BECOMING, Time and Complexity in the Physical Sciences* (W. H. Freeman and Company, San Fransisco, 1980).
- [18] B. Misra, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 75, (1978) 1627-1631.
- [19] 文献 [1], Chap. II, Sec. 5 and Chap. VII, Sec. 4.