

非線型固有値と領域特異振動

東工大理 小沢 真
(Shin Ozawa)

1. Introduction

$M: \mathbb{R}^3$ の有界領域, $\partial M: C^\infty$

$w: M$ の fixed point

$B(\varepsilon; w) \equiv B_\varepsilon: w$ 中心, 半径 ε の球

$M_\varepsilon = M \setminus \overline{B(\varepsilon; w)}$ とおく。

$p \in (1, 5)$ とする。

minimizing problem を考える。

$$(1) \quad \lambda(\varepsilon) = \inf_{X_\varepsilon} \int_{M_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx$$

$$X_\varepsilon = \{u; u \in H^1_0(M_\varepsilon), \|u\|_{L^p(M_\varepsilon)} = 1, u \geq 0\}$$

ここで扱おう主問題は次のとおりである。

問題 $\lambda(\varepsilon)$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの漸近状態をしろ。

Sobolev 埋め込み定理によつて、次の事がわかる。

* $p \in (1, 5)$ とするに、少くとも 1 つの positive solution u_ε が存在して (1) を attain する。 u_ε は

$$(2)_\varepsilon \quad -\Delta u_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \quad \text{in } M_\varepsilon$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } M_\varepsilon$$

注. $p \in (1, 5)$ のときは $H^1(M_\varepsilon) \hookrightarrow L^{p^*}(M_\varepsilon)$ が compact 埋め込み
 を与えるが, $p = 5$ のときは $H^1(M_\varepsilon) \hookrightarrow L^6(M_\varepsilon)$ は連続埋め込みであるが
 compact 性をもたず, 上に掲げた 問題 $\lambda(\varepsilon)$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ での
 挙動は不明である。 $p \in (1, 5)$ に対しては問題は良い結果をも
 つて与えられた。

また,

$$(3) \quad \lambda(0) = \inf_x \int_M |\nabla u|^2 dx$$

$$X = \{u : u \in H_0^1(M), \|u\|_{L^{p^*}(M)} = 1, u \geq 0\}$$

とす。

$$A = \begin{array}{ccc} \psi & \longrightarrow & \Delta \psi \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^2(M) \cap H_0^1(M) & & L^2(M) \end{array}$$

なる Laplace operator とす。

定理を述べるときには, 次の property (p, M) を導入する。

Property (p, M) : $-\Delta u = \lambda u^p$ in M , under the Dirichlet

condition on ∂M has positive solution は一意的である。

Property (p, M) を満たす M の example は Gidas-Ni-Nirenberg
 Commun. Math. Phys 68 (1979) Bv. Dancer, J of Diff. Equations 74
 (1988) によって知られている。 Gidas-Ni-Nirenberg
 の場合は $M = B_R$ (半径 R の球)。

次の結果が主定理である。

定理 1. $p \in (1, 5)$ を固定する。 M が property (p, M) を満たす
 とする。 すると $\text{Ker}(A + \lambda p u^{p-1}) = \{0\}$ とする。

とある。

$$(4) \quad \lambda(\varepsilon) - \lambda = 4\pi\varepsilon u(w)^2 + o(\varepsilon)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$.

(Tohoku Math. J. 45 (1993))

定理 1 の Corollary として

系 1. (T. Ozawa and S. Ozawa Proc. Japan Acad 69 (1993))

$p^*(M) > 1$ ならば存在して, $p \in (1, p^*(M))$ なる p への fixed point

P に対すして, M が (p, M) 条件を満たせば, (4) が成り立つ。

だから, 球の場合, 実際は (4) が成り立つ。 w は球の
上の点でもよい。 定理 1 は次の 定理 2 と Dancer の Theorem
3 により得られる。

これは (2) ε に対して positive
solution u_ε が unique である。

定理 2. $p \in (1, 5)$ とする。 M が property

(p, M) を満たすとする。 ε のとき (4) が成り立つ。

定理 3 (Dancer, Math. Z. 206 (1991))

$p \in (1, 5)$ とする。 M が property (p, M) を満たすとする。

このとき $\text{Ker}(A + \lambda p u^{p-1}) = \{0\}$ ならば, (2) ε に対して u_ε は
unique である。

今後の課題として, $-\Delta u = \lambda u^p$ in M , $u = 0$ on ∂M

なる positive solution が 1 個と有限個ある場合の
研究がある。 また $M \subset \mathbb{R}^3$ ではなく $M \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 4$) の場
合どうなるかは, 今も不明であり, 興味深い。

定理 1 の証明の outline に加えて、この定理 1 の周辺
事柄について少しだけ言及しておく。

$$(5) \quad \mu(\varepsilon) = \inf_{u \in X_\varepsilon} \left(\int_{M_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + k \int_{\partial B_\varepsilon} u^2 d\sigma_x \right),$$

$$X_\varepsilon = \{u \in H^1(M_\varepsilon), u = 0 \text{ on } \partial M, u \geq 0 \text{ in } M_\varepsilon, \|u\|_{L^4(M_\varepsilon)} = 1\}$$

$p \in (1, 5)$ とする。このとき (5) を attaining する u_ε が少なくとも 1 つ
存在して、

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(x) = \mu(\varepsilon) u_\varepsilon(x)^p & \text{in } M_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x) = 0 & \text{on } \partial M \\ k u_\varepsilon(x) + \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right) u_\varepsilon(x) = 0 & \text{on } \partial B_\varepsilon \end{cases}$$

ここで $\frac{\partial}{\partial \nu_x}$ は M_ε の boundary の点 x の exterior normal
vector. $S_\varepsilon = \{ (5) \text{ を attaining する positive function } u_\varepsilon \text{ の全体} \}$

とする。このとき、

定理 3 (submitted).

Fix $p \in (1, 2)$. このとき ε に無関係な定数 C が存在し
て

$$\sup_{u_\varepsilon \in S_\varepsilon} \sup_{x \in M_\varepsilon} u_\varepsilon(x) < C.$$

以下は著者の意見だが、 $\mu(\varepsilon)$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ での挙動をしる
ためには、Dancer の定理の Robin condition 版が必要となる。
Dancer は直接連絡をとり、たしか、彼の意見は、「この場合にも
Robin condition 版が成立すると予想されるが、証明には、

工夫が必要になる。

2. Sketch (定理2の証明)

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda(0) = \int_0^\varepsilon \lambda'(t) dt$$

を用いる。ここで、次の結果が知られている。

$$\lambda'(t) = \int_{\partial B_t} \left(-\frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma_t \quad (\text{S. Reppongi})$$

だから、結局 Claim $\lambda'(t) = 4\pi u(w)^2 + o(1)$ as $t \rightarrow 0$

を証明すればよい。claimの証明であるが、一見事態は複雑になり、たすうに見える。すなわち、 $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}$ という量があるけれど、余計に解析しにくく思えるからである。

そこで、次のideaを導入する。

$$u_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) G_\varepsilon u_\varepsilon^p$$

G_ε = M_ε での ∂M_ε 上 Dirichlet 条件を置いたときの $-\Delta$ の Green 関数による Green 作用素。

$$G_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} -\Delta_x G_\varepsilon(x, y) = \delta(x-y), & x, y \in M_\varepsilon \\ G_\varepsilon(x, y) = 0 & x \in \partial M_\varepsilon \end{cases}$$

$$G(x, y) = \begin{cases} -\Delta_x G(x, y) = \delta(x-y), & x, y \in M \\ G(x, y) = 0 & x \in \partial M \end{cases}$$

Schiffer-Spencer により (彼らは2次元の場合だが) G_ε は次の如く近似できることがわかっていく。

$$P_\varepsilon(x, y) = G(x, y) - 4\pi\varepsilon G(x, w) G(w, y)$$

とす。 ε のとき

$$G_\varepsilon(x, y) \sim p_\varepsilon(x, y) \quad (\sim \text{の定義は} \sim \varepsilon^2 \text{ は特に問わない})$$

$$G_\varepsilon f(x) = \int_{M_\varepsilon} G_\varepsilon(x, y) f(y) dy$$

$$P_\varepsilon f(x) = \int_{M_\varepsilon} p_\varepsilon(x, y) f(y) dy$$

$$G f(x) = \int_M G(x, y) f(y) dy$$

次の補題が crucial である。

補題 1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x) = 0 & x \in M \setminus \overline{B_\varepsilon} \\ u(x) = 0 & x \in \partial M \\ u(x) = L(\theta) & x = w + \varepsilon \theta, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in S^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} \left(\left(-\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)(x) \right)^2 \Big|_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^2 d\theta \leq C \left(\max_{\theta} L(\theta)^2 + W \right)$$

$$W = \left(\max_{\theta} L(\theta)^2 \right)^{\sigma/(1+\sigma)} \left(\|L\|_{H^1(S^2)}^2 + \|L\|_{C^{1+\sigma'}(S^2)}^2 \right)^{1/(1+\sigma)}$$

for $\sigma' > \sigma > 0$. つまり $L(\theta)$ が小さければ $\int_{S^2} \left(\left(-\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)(x) \right)^2 \Big|_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^2 d\theta$

も小さい。この補題の証明は non-trivial であり、工夫を要する。

さて、 G_ε と P_ε が近似する。この意味は $u = (P_\varepsilon - G_\varepsilon)f$ とおけば u は $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をみたし、補題 1 における $L(\theta)$ は小さい。したがって、この事を用いて、次の補題 2 が示される。

補題 2. $h, c > 0$ が存在して.

$$\int_{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} (P_\varepsilon - Q_\varepsilon) f \right)^2_{|_{\partial B_\varepsilon}} \varepsilon^2 d\theta \leq C \varepsilon^h \|f\|_{L^2(M_\varepsilon)},$$

かつ $f \in L^2(M_\varepsilon)$ $q > 3$ に対して成立する.

$\varepsilon = 3$ で, $p \in (1, 5)$ のとき $u_\varepsilon \in (1, 1)$ の解となる.

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \sup_{x \in M_\varepsilon} |u_\varepsilon(x)| < C < \infty$$

が成立する ε が与えられる. $u_\varepsilon(x) = \lambda(\varepsilon) \phi_\varepsilon u_\varepsilon^p$ を用いて示される.

したがって補題 2 に於いて f の代わりに u_ε を代入する ε が可能となる.

補題 3. $p \in (1, 5)$ を固定. Property (p, M) を固定, λ は

$$\lambda(\varepsilon) \longrightarrow \lambda(0) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

注. Property (p, M) をはたして, λ は $\frac{1}{\varepsilon}$ のオーダーである. λ の場合

証明は nontrivial になる.

定理 2 の証明

$$\lambda'(t) = \lambda(t)^2 (K_1 + K_2 + K_3)$$

$$K_1 = \int_{S^2} (\partial P_\varepsilon u_\varepsilon^p / \partial \nu_x)^2 t^2 d\theta$$

$$K_2 = 2 \int_{S^2} (\partial P_\varepsilon u_\varepsilon^p / \partial \nu_x) (\partial (P_\varepsilon - Q_\varepsilon) u_\varepsilon^p / \partial \nu_x) t^2 d\theta$$

$$K_3 = \int_{S^2} (\partial (P_\varepsilon - Q_\varepsilon) u_\varepsilon^p / \partial \nu_x)^2 t^2 d\theta$$

となる. 補題 2 より $K_3 = O(t^4)$, $\nu > 0$ がわかる.

ニコリツの不等式と補題 2 より, もし $K_1 \leq C t^4$

が示されれば $K_2 = O(t^{4/2})$ がわかる.

Claim $K_1 = O(1)$.

この claim が正しいかは K_1, K_2, K_3 の中で K_1 が主項となる。さて

$$\lambda(t)^2 K_1 = L_1 + L_2 + L_3,$$

$$L_1 = \lambda(t)^2 \int_{S^2} (\partial_t \hat{u}_t^p / \partial x)^2 t^2 d\theta$$

$$L_2 = -4\pi t \lambda(t)^2 \int_{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_t^p(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} G(x, w) \hat{u}_t^p(w) \right) t^2 d\theta$$

$$L_3 = 16\pi^2 t^2 \lambda(t)^2 \int_{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} G(x, w) \right)^2 (\hat{u}_t^p(w))^2 t^2 d\theta.$$

である。ここで $\hat{u}_t$ は u_t の M extension としても $B_\varepsilon \neq 0$

なる関数である。さて $L_1 = O(t^2)$, $L_2 = O(t)$, $L_3 = O(1)$

はすぐわかる。問題は L_3 の部分である。

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, w) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4\pi} |x-w|^{-1}, \quad (G \hat{u}_t^p(w))^2 \rightarrow (G u^p(w))^2 + o(1)$$

を用いて計算するとよって。

$$\lambda(t)^2 K_1 = 4\pi \lambda(0) G u^p(w) + o(1)$$

がわかる。まとめて。

$$\lambda'(t) = 4\pi u(w)^2 + o(1),$$

定理の証明おわり。

さて、ここで筆者が強調したいのは、非線型固有値と領域振動および、非線型偏微分方程式と領域振動の分野は、はじまったばかりであり、十分研究するに値する肥沃な未開拓地であるということである。7-ラニ研究所の Nirenberg の部屋を言われたとき、彼にどのような研究をしようかと尋ねたところ、それは研究に値するから、ぜひ

やり直しという事であった。その理由の1つとして
非線型の場合、半線型方程式に限っても解は一般に存在
し、そのような場合には領域を移動することによって解達が
どう振る舞うかを調べることによって、色々なことがわ
かるという事であった。それを言われたのは1983
年のことである。しばらく忘れていた、その事を思い出
して、近年研究をはじめたという事である。