

マルコフ過程の Filtering process の漸近的安定性

名大 理 岡 田 寛

§1. 定義と基本的な結果

マルコフ過程の Filtering の問題, 特に Filtering process の
みたす確率微分方程式をみることは, 通信や統計の問題
とも関連してよく調べられている. (例えば [1], [2])
この報告では Filtering process の性質, 特にマルコフ過程と
しての側面からその漸近的安定性について述べたい.

$(X_t), t \geq 0$ をコンパクトな状態空間 S 上の Feller マルコフ過
程, $(W_t), t \geq 0$ は (X_t) と独立な N -次元ブラウー運動とす
る. 与えられた $S \rightarrow \mathbb{R}^N$ の連続写像 h を用いて新しい
 N -次元過程 $Y_t \in$

$$(1) \quad Y_t = \gamma + \int_0^t h(X_s) ds + W_t, \quad \gamma \text{ は定数}$$

によって定義する. 通常 X_t は random な信号, dW_t は
(1)

white noise, y_t は観測過程と呼ばれる。すなわち, 信号 x_t は雑音 w_t によって擾動されて受信されるのである。

さて $f(x_t)$ の観測データ $\{y_s, s \leq t\}$ による filtering を $\sigma\{y_s, s \leq t\}$ 可測な L^2 -函数による最良近似, すなわち条件付平均値 $E[f(x_t) | \sigma\{y_s, s \leq t\}]$ で定義しよう。

以下では, (x_t, w_t) の定義されている空間 Ω は 函数空間 $C([0, \infty) \rightarrow S) \times C([0, \infty) \rightarrow R^N)$, Ω_t は cylinder set から生成される σ -field とする。又次の記号を使う。

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{y_s, s \leq t\}, \quad \pi_t(f) = E[f(x_t) | \mathcal{F}_t].$$

注意 1. (x_t) と (w_t) が独立であることから, (x_t, w_t) 及び $z_t = (x_t, y_t)$ は強マルコフ過程である。 z_t の初期分布を持つに強調するとそれは, P と P^v を表す。 $P_t P_s(1_E) = P(z_0 \in E)$ 。

注意 2. Filtering の同時分布は一様である。すなわち別の空間 $(\Omega', \mathcal{O}', P')$ 上に (x_t) と同じ法測をもつ (x'_t) と, それに独立なブラウン運動 (w'_t) が与えられているとき, この (x'_t) と (w'_t) を使って (1) により新しい y'_t を定義すれば, その filtering (π'_t) は (π_t) と同じ法測をもつ。このことはほとんど自明だが, 次節の filtering のマルコフ性の証明のときに大切である。

定理 1.

i) $\gamma_t \equiv y_t - \int_0^t \pi_s dh$ は $(\mathcal{F}_t, P)$ -ブラウン運動である.

ただし $\pi_s(h) = (\pi_s(h^1), \dots, \pi_s(h^N))$.

ii) X_t が可分かつ二乗可積分な $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingale ならば
それは連続かつ次の表現をもつ.

$$(2) \quad X_t - X_0 = \int_0^t (\Xi_s, dV_s) \equiv \sum_{i=1}^N \int_0^t \Xi_s^i dV_s^i.$$

ただし, $\Xi_s = (\Xi_s^1, \dots, \Xi_s^N)$ は両可測かつ $\mathcal{F}_s$ -可測 $t \in L^2([0, T] \times P)$ -函数.

iii) π_t は次の確率微分方程式を満たす.

$$(3) \quad \pi_t(f) - \pi_0(f) = \int_0^t \pi_s(Af) ds + \int_0^t (\pi_s(fh) - \pi_s(f)\pi_s(h), dV_s)$$

ただし A は (X_t) の生成作用素である.

証明は省略する (14) を参照)

§ 2. Filtering process のマルコフ性.

$\pi(S)$ を S 上の確率分布の全体とすれば, π_t は $\pi(S)$ 上の値をもとる確率過程となす.

定理 2. $(\pi, \mathcal{F}, P)$ は強マルコフ過程である.

(3)

証明には regular conditional distribution が必要なのでその定義を Stroock-Varadhan (5) にしたがって述べよう. σ を $(\mathcal{F}_t)$ -Markov time, $\mathcal{F}_\sigma = \{A \in \mathcal{Q}; A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}$ とする.

定義 $Q_\omega(A): \Omega \times \Omega \rightarrow R^+$ が次の 4つの条件を満たすとき regular conditional distribution と言う.

- i) $\forall A \in \mathcal{Q}$ に対し $Q_\omega(A)$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -可測
- ii) $\forall \omega$ に対し $Q_\omega(A)$ は $(\Omega, \mathcal{Q})$ 上の確率測度
- iii) $\exists N \in \mathcal{F}_\sigma, P(N) = 0$ で $\forall \omega \notin N$ で

$$Q_\omega(\{y_t = y_t(\omega), 0 \leq t \leq \sigma\}) = 1$$

- iv) $\forall A \in \mathcal{Q}$ と $\forall B \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し

$$P(A \cap B) = \int_B Q_\omega(A) P(d\omega).$$

regular conditional distribution は存在し, a.e. ω で一意である. 以下次の記号を用いる.

$$\tilde{\lambda}_t = \lambda_{t+\sigma}, \quad \tilde{\omega}_t = \omega_{t+\sigma(\omega)}, \quad \tilde{y}_t = y_{t+\sigma(\omega)}, \quad \tilde{z}_t = (\tilde{\lambda}_t, \tilde{y}_t)$$

$$\tilde{\alpha}_t = \alpha_{t+\sigma}, \quad \tilde{\gamma}_t = \gamma_{t+\sigma}, \quad \tilde{\pi}_t = \pi_{t+\sigma}$$

Lemma 1. a.e. ω に対し

- i) $(\tilde{\lambda}_t)$ と $(\tilde{\omega}_t)$ は Q_ω に関して独立である.

(4)

ii) $(\tilde{z}_t, \tilde{\alpha}_t, Q_\omega)$ は初期分布 $(\delta_{y_0(\omega)}, \pi_{\alpha_0(\omega)})$ をもち (z_t, α_t, P)

と同じ推移確率をもつマルコフ過程である。

証明. i). $\beta_1 = \tau\{\tilde{x}_1, s \geq 0\}$, $\beta_2 = \tau\{\tilde{x}_2, s \geq 0\}$ とおくと $\forall A \in \beta_1$, $\forall B \in \beta_2$ が Q_ω に關し独立, である。

$$(4) \quad P[A \cap B | \mathcal{F}_0] = P(A | \mathcal{F}_0) P(B | \mathcal{F}_0) \quad \text{a.s.}$$

が言えるのは $\tau = 2$ が (4) は

$$(5) \quad P[B | \mathcal{F}_2] = P[B | \mathcal{F}_0 \vee \beta_1] \quad \text{a.s.} \quad \forall B \in \beta_2$$

と同値である (Meyer [6], p. 30). 一方 $(x_t) \in (\omega_t)$ の P -独立性

から (5) の両辺は共に $P(B)$ に等しい。ゆえに i) が言える。

ii) の証明. 初期分布は

$$(6) \quad E_\omega[f(x_0)g(y_0)] = E[f(x_0)g(y_0) | \mathcal{F}_0] = g(y_0) \pi_\alpha(f)(\omega) \quad \text{a.s.}$$

から明らかな。 (z_t, P) の半群を π_t とする。 $\alpha_0 \in \mathcal{F}_0$ に注意し

て, (z_t, α_t, P) の強 Markov 性を用いる。 $A \in \mathcal{O}_{t+\tau}$ に対し

$$(7) \quad E_\omega[f(\tilde{z}_{t+\tau}) : A] = E_\omega[E[f(\tilde{z}_{t+\tau}) | \mathcal{O}_{t+\tau}]; A] \\ = E_\omega[\tau_t f(\tilde{z}_t) : A] \quad \text{Q.E.D.}$$

Lemma 2. a.s. ω で $\tilde{\pi}_t$ は $(\tilde{x}_t, \tilde{\omega}_t, \tilde{y}_t, \mathcal{Q}\omega)$ の filtering である. かつ ω で $(\tilde{\pi}_t, \mathcal{Q}\omega)$ の法則は, $(\tilde{x}_t, \tilde{\omega}_t, \tilde{y}_t, P^{(\tilde{y}_{\sigma}, \tilde{\pi}_{\sigma})})$ の filtering の法則と一致する.

証明. $(\tilde{x}_t)$ と $(\tilde{\omega}_t)$ は $\mathcal{Q}\omega$ -独立であり, $\tilde{y}_t$ は $(\tilde{x}_t, \tilde{\omega}_t, \mathcal{Q}\omega)$ の観測過程である. したがって, $\tilde{\pi}_t$ はこれに対する filtering であること, かつ

$$(8) \quad \tilde{\pi}_t(f)(\omega) = E^{\omega}[f(\tilde{x}_t) | \mathcal{F}_t^{\tilde{y}}, s \leq t](\omega) \quad \text{a.s. } \omega$$

証明すればよい. $A \in \mathcal{F}_t^{\tilde{y}}, s \leq t$, $B \in \mathcal{F}_{\sigma}$ とすると, 上式を右辺の P に $\mathcal{F}_t^{\tilde{y}}$ 平均すれば

$$\begin{aligned} (9) \quad & E[E^{\omega}[f(\tilde{x}_{t+\sigma}) | \mathcal{F}_{t+\sigma}^{\tilde{y}}, s \leq t+\sigma] : A \cap B] \\ &= E[E^{\omega}[E^{\omega}[f(\tilde{x}_{t+\sigma}) | \mathcal{F}_{t+\sigma}^{\tilde{y}}, s \leq t+\sigma] : A] : B] \\ &= E[E^{\omega}[f(\tilde{x}_{t+\sigma}) : A] : B] = E[f(\tilde{x}_{t+\sigma}) : A \cap B]. \end{aligned}$$

上式から (8) を得る.

定理 2 の証明. Lemma 2 より

$$\begin{aligned} & E[F(\pi_{t+\sigma}(f_1), \dots, \pi_{t+\sigma}(f_n)) | \mathcal{F}_{\sigma}] = E^{\omega}[F(\tilde{\pi}_t(f_1), \dots, \tilde{\pi}_t(f_n))] \\ &= E^{(\tilde{y}_{\sigma}, \tilde{\pi}_{\sigma})}[F(\pi_t(f_1), \dots, \pi_t(f_n))] \end{aligned}$$

一方 Filtering は, 観測過程の初期値に依存しないから, 上

式の最後の句は π_t の 4 の函数がある. これを 確 Markov 性
が証明された.

次の $(\pi_t, \mathcal{F}_t, P)$ の生成作用素の形を求めよう. π_t の群を
 $\tilde{\pi}_t$ と表わす.

定義 $C(\mathcal{M}(S) \rightarrow R')$ のある linear subspace $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subseteq C(\mathcal{M}(S) \rightarrow R')$
に移す線形作用素 $\tilde{A}$ が $\tilde{\pi}_t F - F = \int_0^t \tilde{\pi}_s \tilde{A} F ds \quad (V_t)$ を満たすとき,
 $\tilde{A}$ を $\tilde{\pi}_t$ の生成作用素, $\mathcal{D}(\tilde{A})$ をその定義域とす.

定義 $F \in C(\mathcal{M}(S) \rightarrow R')$ が, 各 $V \in \mathcal{M}(S)$ に対して,
 $\exists F'_V \in C(S)$ と u 線形作用素 $F''_V: C(S)^* \rightarrow C(S)$ が存在して

$$(10) \quad F(V+\epsilon) - F(V) = \langle F'_V, \epsilon \rangle + \frac{1}{2} \langle F''_V \epsilon, \epsilon \rangle + o(\|\epsilon\|^2)$$

を満たすとき, F は C^2 -class であると呼ぶ. (* は dual
space, $\|\cdot\|$ は total variation の norm) F に対して F'_V と u F''_V
の V に関する弱連続性がある. ノルム $\|\cdot\|$ の V に関する有界性を
仮定する.

Lemma 3. F は C^2 -class である. もし各 V で $F'_V \in \mathcal{D}(\tilde{A})$
かつ $\tilde{A} F'_V$ が V に関して弱連続ならば, 次の公式が成り立つ.
ただし $\pi_t^{(i)}$ は $\pi_t^{(i)}(f) \equiv \pi_t(\tilde{h}_i f)$ で定義される測度である.

(7)

$$(11) \quad F(\pi_t) - F(\pi_0) = \int_0^t \pi_s(AF'_{\pi_s}) ds + \int_0^t (\pi_s(F'_{\pi_s} h) - \pi_s(h) \pi_s(F'_{\pi_s})) dV_s \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \langle F''_{\pi_s}(\pi_s^{h_i} - \pi_s(h_i) \pi_s), \pi_s^{h_i} - \pi_s(h_i) \pi_s \rangle ds$$

証明は (10) の公式の証明と同じ方針で計算すればよい。

(11) を P で積分すれば次の結果を得る。

定理 3. F が Lemma 3 の条件を満たす函数とすれば,
 $F \in \mathcal{Q}(\tilde{A})$ かつ

$$(12) \quad \tilde{A}F(v) = \langle AF'_v, v \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle F''_v(v^{h_i} - v(h_i)v), v^{h_i} - v(h_i)v \rangle.$$

例. $F(v) \equiv \langle f, v \rangle \equiv v(f)$ かつ $F'_v = f$, $F''_v = 0$. ゆえに

$f \in \mathcal{Q}(A)$ ならば $F \in \mathcal{Q}(\tilde{A})$ かつ $\tilde{A}F(v) = v(Af)$ である。

特に $Af = 0$ かつ $F(v) = v(f)$ ならば $\tilde{A}F = 0$ である。ゆえに

$$(13) \quad \{F(v) \equiv v(f) : f \in \mathcal{Q}(A) \text{ かつ } Af = 0\} \subset \{F \in \mathcal{Q}(\tilde{A}) : \tilde{A}F = 0\}.$$

次節で述べる様に, (13) の等号が成立することと, 漸近的安定性とは密接な関係がある。

§3 Filtering process の漸近的安定性

定義. $\mathcal{D}$ 上の α 個の連続函数 π に対して

(8)

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E|f(x_t) - \pi_t(f)|^2 = 0$$

と T_t による π_t は漸近的に安定であると呼ぶ。

定理 4. π_t が漸近的に安定であるとは (13) における 2 等号が成立する。 $\exists x_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t(\omega)$ a.s. P かつ (13) の 2 等号が成立すれば π_t は漸近的に安定である。

証明. 漸近的安定性より定まる $F \in \mathcal{G}(\tilde{\mathcal{A}})$ が $AF = 0$ となることは " $T_t F = F$ " から

$$\begin{aligned} F(v) &= E^v(F(\pi_t)) = E^v\left(\lim_{t \rightarrow \infty} F(\pi_t)\right) = E^v\left(\lim_{t \rightarrow \infty} F(\delta_{x_t})\right) \\ &= \int v(dx) E^x\left[\lim_{t \rightarrow \infty} F(\delta_{x_t})\right] \end{aligned}$$

一方 $f(x) = E^x\left[\lim_{t \rightarrow \infty} F(\delta_{x_t})\right]$ となる $f(x)$ は T_t -不変 かつ $F(v) = v(f)$ かつ $T_t F = F$. 加之に定理の前半より証明より T_t . 故に (13) の 2 等号は成立する。

$$\begin{aligned} (15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E^v[|\pi_t(f) - f(x_t)|^2] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \{E^v[\pi_t(f)^2] + E^v[f(x_t)^2]\} \\ &= -E^v[\pi_\infty(f)^2] + E^v[f(x_\infty)^2] \end{aligned}$$

一方

$E^v[\pi_\infty(f)^2]$ = the least T_t -invariant majorant of $v(f)^2$

$E^v[f(x_\infty)^2]$ = the least T_t -invariant majorant of $v(f)^2$

(9)

仮定より両者の右辺は一致するから (15) は 0 となる。証明終。

注意. 上の定理で λ_∞ の存在を仮定することは、本質的には precis が transient であることを仮定しているのである。実際

$$\Delta = \{x; T_t f(x) = f(x), \forall t > 0, \forall f \in C(S)\} \quad (\text{trap の全体})$$

とみると, Δ は S の閉部分集合であり, λ_∞ は a.s. に Δ に集中していることがわかる。したがって Δ は $S - \Delta$ の境界とみてよいであろう。次の定理は上の条件の下ではほとんどが場合, 漸近的安定性が成立することを示している。

定理 5. λ_∞ の存在を仮定する。

(i) f が Δ の二重を分離する (即ち $f|_\Delta$ が 1-1) ならば, π_t は漸近的に安定である。

(ii) 任意の初期分布 π_0 に対し π_t が漸近的に安定ならば, f は Δ の二重を分離する。

証明は [4] にあるので省略する。

文献

- [1] A. N. Shingarov : Stochastic equations of non linear filtering of Markovian jump process. Problemi Perelachi Informatsii 3 3-22. (1966)
- [2] R. S. Liptzer and Shingarov (1968): Non linear filtering of Markov diffusion processes. Izv. Akad. Nauk SSSR, A. N. 135-150.
- [3] G. Kalman, G. and C. Striebel (1969): Stochastic differential equations in stochastic estimation problems. Multivariate Analysis, 2. Academic Press
- [4] M. Fujisaki and H. Kunita: Non linear filtering problems in time-continuous stochastic processes, Preprint
- [5] D. Stroock and R. Varadhan (1969), Diffusion processes with continuous coefficients, I, II. Comm. Pure. Appl. Math., 22, 345-400, 471-530.
- [6] P. A. Meyer (1966): Probability and Potentials. Blaisdell Publ.