

The Chow ring of the moduli space Of bundles on P^2 with charge 1

琉球大学・理学部 神山靖彦(Yasuhiko Kamiyama)
手塚康誠(Michishige Tezuka)
Department of mathematical sciences
University of Ryukyu

§ 1

K を標数 2 でない代数閉体とする。 $OM(1, SO(n, K))$ を CP^2 上構造群 $SO(n, K)$ の主バンドルで 1 次 Pontryagin index が 1、 $\infty \subset CP^2$ に制限したときに、自明なものなすモジュライ空間とすると、[18] の行列表示を適用することで、

Proposition 1.1

$$OM(1, SO(n, K)) \simeq A^2 \times X_n.$$

$$X_n = SO(n, K) / (SO(n-4, K) \times SL(2, K)) \cdot P_u,$$

を得る。これから、Grothendieck の公式 [3] を適用することで、Chow 環に対しては、

$$CH^*(OM(1, SO(n, K))) \simeq CH^*(X_n).$$

また、射影多様体 $Y_n = SO(n, K) / (SO(n-4, K) \times GL(2, K)) \cdot P_u$ を考えると、主バンドル $G_n \rightarrow X_n \xrightarrow{\pi} Y_n$ を得る。そこで同伴バンドルを考えて、 Y_n を X_n の 0-section と同一視することで、再び

$$\tilde{X}_n = X_n \times_{G_n} A^1 \text{ Grothendieck の公式 [3], [10] を適用して、}$$

Lemma 1.2

完全列

$$CH^*(Y_n) \xrightarrow{\pi^*} CH^*(Y_n) \xrightarrow{\pi^*} CH^*(X_n) \rightarrow 0.$$

を得る。

Y_n に関しては、 $CH^*(Y_n) \cong H^*(Y_n, \mathbb{Z})$ となり、位相幾何の手法が使える。一般に G を代数群、 P を極大放物群としたとき G/P のChow環はSchubert calculusとして研究されてきた[1]。又、位相的方法では、Borel、戸田、等により研究されてきた。中川氏の論説を参考。 Y_n に対しては[15], [16]により研究されていて、Young図形を用いて、結果が述べられている。これから $CH^*(Y_n)$ の結果を述べるが、Schubert calculusとどの様に対応しているかが次の問題であると思う。

§ 2

Y_n のChow環のアーベル群としての構造を述べ、合わせて§3の表を見るのに必要なことを書く。まずアーベル群としての構造は自由加群になっていることがShubertセルに分解できることから知られている。

Theorem 2.1

(1) For $n = 2m$,

$$CH^*(Y_n) \otimes \mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{Z}/2[c_1, c_2]/(b_{m-1}, c_2 b_{m-2}) \otimes \Delta(v_{2m-4}, v_{2m-2}).$$

(2) For $n = 2m + 1$,

$$CH^*(Y_n) \otimes \mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{Z}/2[c_1, c_2]/(b_{m-1}, c_2 b_{m-2}) \otimes \Delta(v_{2m-2}, v_{2m}),$$

ここで、 c_1 、 c_2 、 b_i 、 v_i の次数はそれぞれ、1、2、 i 、 $i/2$ である。

これから、 $CH(Y_n)$ のring generatorは、 c_1 、 c_2 、 b_i 、 v_i であることがわかる。

Lemma 2.2

$$CH^*(Y_n) \otimes \mathbb{Z}/2 = \left(\bigoplus_{i=0}^{m-2} \mathbb{Z}[c_1]/(c_1^{m-1-i}) \{c_2^i\} \right) \otimes B_n \otimes \mathbb{Z}/2,$$

$$B_n = \begin{cases} \Delta_{\mathbb{Z}}(v_{2m-4}, v_{2m-2}) & n = 2m \\ \Delta_{\mathbb{Z}}(v_{2m-2}, v_{2m}) & n = 2m + 1. \end{cases}$$

このLemmaから、 $CH^*(Y_n)_{(2)}$ の加群としての構造がわかる。次に環構造は以下の方針で示していく。初めに

$CH^*(Y_n)$ の $\mathbb{Z}$ -自由加群としての基底を求める。それを使って $CH^*(Y_n) \otimes \mathbb{Z}/2$ の環構造から $CH^*(Y_n)_{(2)}$ の環構造を求めていく。結果は $CH^*(Y_n)_{(2)}$ として記述されているが最後に注意する (Remark 3.5) により $CH^*(Y_n)$ に書き換えることができる。

§ 3 TABLES OF THE RING STRUCTURE OF $CH(Y_n)$

3.1. Notations. (i) For $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, we define b_k and $d_k \in \mathbb{Z}[c_1, c_2]$ as follows:

$$b_k = (-1)^k \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^\mu \binom{k-\mu}{\mu} c_1^{k-2\mu} c_2^\mu$$

and

$$d_k = (-1)^k \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu \binom{2k-\mu+1}{\mu} c_1^{2k-2\mu} c_2^\mu.$$

(ii) For $g \in \mathbb{N}$ and $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$, we define $a_{g,\mu} \in \mathbb{Z}$ by

$$a_{g,\mu} = \begin{cases} (-1)^{1+\mu} \frac{g}{\mu} \binom{g-1-\mu}{\mu-1} & \mu \geq 1 \\ -1 & \mu = 0 \\ 0 & \mu = -1. \end{cases}$$

Then the integers $a_{g,\mu}$ are characterized by

$$(1+x)^g = 1 + x^g + \sum_{\mu=1}^{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor} a_{g,\mu} x^\mu (1+x)^{g-2\mu}.$$

3.2. An integral basis of $CH(Y_n)$. In the following (I) and (II), we give an integral basis of $CH(Y_n)$. The notations are explained as follows: Let S_n be the set of the monomial basis of A_n in (2,2). Let T be a subset of S_n . Then for an element $\xi \in T$, $\langle \xi \rangle$ (resp. $\langle \xi \rangle'$) is defined to be the right-hand side of an equation (1)-(8) below. We consider a set

$$\left\{ \frac{\langle \xi \rangle}{l_\xi} : \xi \in T \right\} \cup \{ \eta : \eta \in S_n - T \},$$

where $l_\xi \in \mathbb{N}$. Following this procedure, we obtain an integral basis of $CH(Y_n)$. We abbreviate this basis as $\left\{ \frac{\langle \xi \rangle}{l_\xi} : \xi \in T \right\}$.

(I) The case $n = 2m$.

(i) For even m ,

$$\left\{ \frac{\langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle}{m-2j-1} : 0 \leq i \leq \frac{m}{2} - 2, 1 \leq j \leq \frac{m}{2} - 2 \right\}.$$

(ii) For odd m ,

$$\left\{ \frac{\langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle'}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle'}{m-2j} : 0 \leq i \leq \frac{m-5}{2}, 1 \leq j \leq \frac{m-3}{2} \right\}.$$

(II) The case $n = 2m + 1$.

(iii) For even m ,

$$\left\{ \frac{\langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-2} v_{2m} \rangle}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-2} v_{2m} \rangle}{m-2j-1} : 0 \leq i \leq \frac{m}{2} - 2, 1 \leq j \leq \frac{m}{2} - 2 \right\}.$$

(iv) For odd m ,

$$\left\{ \frac{\langle c_1^{2i+1} v_{2m-2} v_{2m} \rangle}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-2} v_{2m} \rangle}{m-2j} : 0 \leq i \leq \frac{m-3}{2}, 1 \leq j \leq \frac{m-3}{2} \right\}.$$

Here $\langle \rangle$ and $\langle \rangle'$ are defined as follows:

(1)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle &= c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} + (-1)^{\frac{m+2i+1}{2}} \frac{(-1)^i (2i+3) + 1}{2} c_2^{2i+4} d_{\frac{m-2i-1}{2}} v_{2m-4} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^i a_{2i+3, \mu} c_1^{2i+1-2\mu} c_2^{1+\mu} v_{2m-4} v_{2m-2}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle &= c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-4} v_{2m-2} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-4}{2}} a_{m-2j-1, \mu} c_1^{m-2j-3-2\mu} c_2^{2j+1+\mu} v_{2m-4} v_{2m-2}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle' &= c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} + (-1)^{\frac{m+2i+1}{2}} \frac{(-1)^i (2i+3) + 1}{2} c_2^{2i+3} d_{\frac{m-2i-1}{2}} v_{2m-2} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^i a_{2i+3, \mu} c_1^{2i+1-2\mu} c_2^{1+\mu} v_{2m-4} v_{2m-2}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle' &= c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-4} v_{2m-2} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-3}{2}} a_{m-2j, \mu} c_1^{m-2j-2-2\mu} c_2^{2j+\mu} v_{2m-4} v_{2m-2}. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-2} v_{2m} \rangle &= c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-2} v_{2m} + (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{(-1)^i (2i+3) + 1}{2} c_2^{2i+4} d_{\frac{m-2i-6}{2}} v_{2m} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^i a_{2i+3, \mu} c_1^{2i+1-2\mu} c_2^{1+\mu} v_{2m-2} v_{2m}. \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-2} v_{2m} \rangle &= c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-2} v_{2m} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-4}{2}} a_{m-2j-1, \mu} c_1^{m-2j-3-2\mu} c_2^{2j+1+\mu} v_{2m-2} v_{2m}. \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{2i+1} v_{2m-2} v_{2m} \rangle &= c_1^{2i+1} v_{2m-2} v_{2m} + (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{(-1)^i (2i+3) + 1}{2} c_2^{2i+3} d_{\frac{m-2i-6}{2}} v_{2m-2} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^i a_{2i+3, \mu} c_1^{2i+1-2\mu} c_2^{\mu} v_{2m-2} v_{2m}. \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} \langle c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-2} v_{2m} \rangle &= c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-2} v_{2m} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-3}{2}} a_{m-2j, \mu} c_1^{m-2j-2-2\mu} c_2^{2j+\mu} v_{2m-2} v_{2m}. \end{aligned}$$

§ 3. The ring structure of $CH^*(Y_n)_{(2)}$ for $n = 2m$.

	even m	odd m
c_1^{m-1}	(1)	
$c_1^{m-k-1} c_2^k (k \geq 1)$	(2)	
$c_1^{m-1} v_{2m-4}$	(3)	
$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-4} (i \geq 1)$	(4)	
$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-4} (i \geq 0)$	(5)	(6)
$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-2} (i \geq 0)$	(7)	(8)
$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-2} (i \geq 0)$	(9)	
$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-4} v_{2m-2} (i \geq 0)$	(10)	(11)
$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-4} v_{2m-2} (i \geq 0)$	(12)	(13)
v_{2m-4}^2	(14)	(15)
v_{2m-2}^2	(16)	(17)

Here

$$(1) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^\mu \right\} + (-1)^{m+1} 2v_{2m-2}.$$

$$(2) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-k-1}{2}\right]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-k-1-\mu}{\mu} c_1^{m-k-1-2\mu} c_2^{k+\mu} \right\} \\ + \{(-1)^{m+k} 2c_2 b_{k-1}\} v_{2m-4} + \{(-1)^{m+k} 2c_2 b_{k-2}\} v_{2m-2}.$$

$$(3) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^\mu \right\} v_{2m-4} + (-1)^{m+1} 2v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(4) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-2i-1}{2}\right]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-4} \\ + \left\{ (-1)^m 2 \sum_{\mu=0}^{i-1} a_{2i-1,\mu} c_1^{2i-2-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(5) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4} \\ + \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(6) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-3}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4} \\ + \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+1}{2}} \frac{2}{2i+1} c_2^{2i+1} d_{\frac{m-2i-3}{2}} \right\} v_{2m-2} \\ - \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(7) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i}{2}} \frac{2}{2i+1} c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} \right\} v_{2m-4}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2} \\
& + \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(8) & = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+3}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+1} d_{\frac{m-2i-3}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}} a_{m-2i,\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2} \\
& - \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(9) & = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-2i-2}{2}\right]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2} \\
& + \left\{ (-1)^m 2 \sum_{\mu=0}^i a_{2i+1,\mu} c_1^{2i-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(10) & = \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-4}{2}} \left(\frac{m-2i+1}{m-2i-1} a_{m-2i-1,\mu} + a_{m-2i+1,1+\mu} \right) c_1^{m-2i-3-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(11) & = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}} a_{m-2i,\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(12) & = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(13) & = \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-5}{2}} \left(\frac{m-2i}{m-2i-2} a_{m-2i-2,\mu} + a_{m-2i,1+\mu} \right) c_1^{m-2i-4-2\mu} c_2^{2i+2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}. \\
(14) & = (-1)^{\frac{m}{2}} d_{\frac{m-2}{2}} v_{2m-4}. \\
(15) & = -b_{m-2} v_{2m-4} + (-1)^{\frac{m+3}{2}} d_{\frac{m-3}{2}} v_{2m-2}. \\
(16) & = (-1)^{\frac{m+2}{2}} c_2^2 d_{\frac{m-4}{2}} v_{2m-4}. \\
(17) & = (-1)^{\frac{m+1}{2}} c_2 d_{\frac{m-3}{2}} v_{2m-2}.
\end{aligned}$$

3.4. The ring structure of $CH(Y_n)_{(2)}$ for $n = 2m + 1$.

	even m	odd m
c_1^{m-1}	(i)	
$c_1^{m-k-1} c_2^k (k \geq 1)$	(ii)	
$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-2} (i \geq 0)$	(iii)	(iv)
$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-2} (i \geq 0)$	(v)	
$c_1^{m-1} v_{2m}$	(vi)	
$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m} (i \geq 1)$	(vii)	
$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m} (i \geq 0)$	(viii)	(ix)
$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-2} v_{2m} (i \geq 0)$	(x)	(xi)
$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-2} v_{2m} (i \geq 0)$	(xii)	(xiii)
v_{2m-2}^2	(xiv)	(xv)
v_{2m}^2	(xvi)	(xvii)

Here

$$\begin{aligned}
(i) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^\mu \right\} + (-1)^{m+1} 2v_{2m-2}. \\
(ii) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\lfloor \frac{m-k-1}{2} \rfloor} (-1)^{1+\mu} \binom{m-k-1-\mu}{\mu} c_1^{m-k-1-2\mu} c_2^{k+\mu} \right\} \\
&\quad + \{(-1)^{m+k} 2c_2 b_{k-2}\} v_{2m-2} + \{(-1)^{m+k+1} 2b_{k-1}\} v_{2m}. \\
(iii) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2} \\
&\quad + \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{2}{2i-1} c_2^{2i} d_{\frac{m-2i-2}{2}} \right\} v_{2m} \\
&\quad - \left\{ 2 \sum_{\mu=0}^{i-1} \left(\frac{2i+1}{2i-1} a_{2i-1,-1+\mu} + a_{2i+1,\mu} \right) c_1^{2i-1-2\mu} c_2^\mu \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(iv) &= \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+3}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+1} d_{\frac{m-2i-3}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}} a_{m-2i,\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2} \\
&\quad + \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\lfloor \frac{m-2i-2}{2} \rfloor} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2} \\
&\quad + \left\{ (-1)^{m+1} 2 \sum_{\mu=0}^i a_{2i+1,\mu} c_1^{2i-2\mu} c_2^\mu \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(vi) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^\mu \right\} v_{2m} + (-1)^{m+1} 2 v_{2m-2} v_{2m}. \\
(vii) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\lfloor \frac{m-2i-1}{2} \rfloor} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m} \\
&\quad + \left\{ (-1)^m 2 \sum_{\mu=0}^{i-1} a_{2i-1,\mu} c_1^{2i-2-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(viii) &= \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m} \\
&\quad + \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(ix) &= \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{2}{2i+3} c_2^{2i+3} d_{\frac{m-2i-6}{2}} \right\} v_{2m-2} \\
&\quad + \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m} \\
&\quad + \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-1} \left(a_{2i+1,\mu} - a_{2i+1,1+\mu} + \frac{2i+1}{2i+3} a_{2i+3,1+\mu} \right) c_1^{2i-1-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(x) &= \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-4}{2}} \left(\frac{m-2i+1}{m-2i-1} a_{m-2i-1,\mu} + a_{m-2i+1,1+\mu} \right) c_1^{m-2i-3-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(xi) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}} a_{m-2i,\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{xii}) &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(\text{xiii}) &= \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-5}{2}} \left(\frac{m-2i}{m-2i-2} a_{m-2i-2,\mu} + a_{m-2i,1+\mu} \right) c_1^{m-2i-4-2\mu} c_2^{2i+2+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}. \\
(\text{xiv}) &= (-1)^{\frac{m+2}{2}} d_{\frac{m-2}{2}} v_{2m}. \\
(\text{xv}) &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} c_2 d_{\frac{m-3}{2}} v_{2m-2}. \\
(\text{xvi}) &= (-1)^{\frac{m}{2}} c_2^2 d_{\frac{m-4}{2}} v_{2m}. \\
(\text{xvii}) &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{3} c_2^3 d_{\frac{m-5}{2}} v_{2m-2} - \frac{2}{3} c_1 v_{2m-2} v_{2m}.
\end{aligned}$$

3.5. A remark on the ring structure of $CH^*(Y_n)$. We have given the ring structure of $CH^*(Y_n)_{(2)}$ in 3.3 and 3.4. But actually, it is easy to determine the ring structure of $CH^*(Y_n)$ from 3.2, 3.3 and 3.4. For example, by the basis in 5.2, the formula 3.3 (5) is rewritten as follows:

$$\begin{aligned}
(5)' \quad c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-4} &= \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} ((-1)^i (2i-1) + 1) c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4} \\
&\quad + \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} a_{2i-1,\mu} c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2} - \frac{4i-2}{2i+1} \langle c_1^{2i-1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle.
\end{aligned}$$

The other cases can be calculated similarly.

REFERENCES

- [1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Schubert cells and cohomology of the spaces G/P* , Russian Math. Surveys 28 (1973), 1-26.
- [2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] C. Chevalley, *Anneaux de Chow et Applications*, Secrétariat Mathématique, Paris, 1958.
- [4] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES 44 (1974), 5-77.
- [5] P. Deligne, *Cohomologie Étale (SGA 4½)*, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [6] M. Demazure, *Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. 21 (1973), 287-301.
- [7] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Comm. Math. Phys. 93 (1984), 453-460.

- [8] E. M. Friedlander, *Étale Homotopy of Simplicial Schemes*, Ann. of Math. Studies 104, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982.
- [9] A. Grothendieck, *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4)*. Tomes I-III, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, New York, 1972-1973.
- [10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [11] Y. Kamiyama, *Generating varieties for the triple loop space of classical Lie groups*, Fund. Math. 177 (2003), 269-283.
- [12] Y. Kamiyama, A. Kono and M. Tezuka, *Cohomology of the moduli space of $SO(n)$ -instantons with instanton number 1*, Topology Appl. 146 (2005), 471-487.
- [13] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
- [14] P. Norbury and M. Sanders, *Real instantons, Dirac operators and quaternionic classifying spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 2193-2201.
- [15] P. Pragacz and J. Ratajski, *A pieri-type theorem for Lagrangian and odd orthogonal Grassmannians*, J. Reine Angew. Math. 476 (1996), 143-189.
- [16] P. Pragacz and J. Ratajski, *A Pieri-type formula for even orthogonal Grassmannians*, Fund. Math. 178 (2003), 49-96.
- [17] B. Schuster and N. Yagita, *Transfers of Chern classes in BP-cohomology and Chow rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 1039-1054.
- [18] Y. Tian, *The Atiyah-Jones conjecture for classical groups and Bott periodicity*, J. Differential Geom. 44 (1996), 178-199.
- [19] B. Totaro, *Torsion algebraic cycles and complex cobordism*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), 467-493.