

# ソボレフの不等式の抽象的な

## 取扱いについて

北大 理 左 川 敦

### § 0 目的

この講演の目的は、つぎの有名な不等式, Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式, を証明することである。

$$(HLS) \quad \left| \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x-y|^{-n\lambda} f(y) g(x) dx dy \right| < +\infty,$$

ただし,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p, q < \infty$ ,  $1/p + 1/q > 1$ ,  $\lambda = 2 - 1/p - 1/q$ .

そのために, まずこの不等式の内容を考えてみたい。実際この不等式の内容がわかれば, 何をすべきかということば, 自ずと見当が付くはずである。定理 6.1 の形で証明する。

### § 1 (HLS) の書きかえ.

さて,  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , における半群

$$(G) \quad (G(t)f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, & t > 0 \\ f(x) & , t = 0 \end{cases}$$

を考える。(HLS) と  $(G)$  とは、密接な関係があるが、それを述べる前に、 $(G)$  のよく知られた性質を列挙しよう。

(G1)  $G(t)$  は contraction である:

$$\|G(t)f\|_p \leq \|f\|_p$$

ただし、 $\|\cdot\|_p$  は  $L^p(\mathbb{R}^n)$  の通常のノルム。

(G2)  $G(t)$  は  $L^2(\mathbb{R}^n)$  において自己共役な強連続半群をなす

(G3)  $f \geq 0$  ならば  $G(t)f \geq 0$

(G4)  $G(t)1 = 1$

(G5) 各  $t > 0$  に対し、 $G(t)$  は  $L^1(\mathbb{R}^n)$  と  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  に写し、そのとき

$$\|G(t)f\|_\infty \leq \text{const } t^{-n/2} \|f\|_1$$

かなりたつ。

これらは  $(G)$  の定義式から直ちに従う。

さらに、(G2)(G1) と補間定理を組合せて用いると、 $G(t)$  は、各  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p < \infty$ , で、解析的半群 (holomorphic semi-group) をなしていることが、すぐわかる。

さて、 $G(t)$  の生成作用素を  $-A$  としよう。(もちろん、 $-A_p$  と書くべきであるが、とくに必要のない限り、 $p$  はつけない。 $A$  が  $\mathbb{R}^n$  の Laplacian であることもよく知られている。) すると、 $G(t) = e^{-tA}$  と標語的に書かれる。このとき、(HLS)

は、つぎのように書きかえられる。

$$(*) \quad A^{-\tau} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^{q'}(\mathbb{R}^n)),$$

$$1 < p < q' < \infty, \quad \tau = \frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}), \quad q' = \frac{2}{2-p}.$$

ただし,

$$(\Delta) \quad A^{-\tau} f = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty t^{\tau-1} G(t) f \, dt,$$

すなわち,  $A^{-\tau}$  は,  $G(t)$  の積分である。実際,  $(G)$  を用いて計算を実行してみると,

$$\begin{aligned} A^{-\tau} f &= \text{const.} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^\infty t^{\tau-1-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dt \right\} f(y) dy \\ &= \text{const.} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |x-y|^{-n(2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q'})} dy \end{aligned}$$

となる。(\*) に,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  と  $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$  の双対性を援用すれば, (HLS) が得られる。

## §2 (\*) の書きかえ

(HLS) に比べて, (\*) の方が意味がわかりやすい。そこで, (\*) の書きかえを試みる。ところで, このあたりに来ると, 157 題は抽象化した方が, 取扱いやすくなる。そこで, 例によって, 補間三組  $(E, F, \mathcal{E})$  を考える。すなわち,  $E, F$  を Hausdorff 線型位相空間  $\mathcal{E}$  に連続に埋込まれた二つの Banach 空間とする。このとき,  $\mathcal{E}$  の中で考えることにより, Banach 空間  $E \cap F, E + F$  が canonical に定義される。今,  $A \in E + F$  で定義された(小松の意味で), 非負な線型閉作用素とする。す

なわち、正実数はすべて、 $-A$  のレジラメント集合に含まれかつ、 $\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|_{E+F \rightarrow E+F} \leq M (< \infty)$ ,  $\lambda > 0$ , がなりたっているとする。そうえ、 $A$  の  $E, F$  への制限  $A_E, A_F$  も非負とする。ただし、

$$A_E x = Ax, \quad x \in D(A_E) = \{x \in D(A) \cap E; Ax \in E\},$$

$A_F$  についても同様。

以上が、われわれの基本的な立場である。もちろん、 $A_E, A_F$  に相当するものを先に与えて、 $A$  を後から構成するのが、ふつうであって、その場合

$$(\lambda + A_E)^{-1}x = (\lambda + A_F)^{-1}x, \quad x \in E \cap F, \quad \lambda > 0,$$

が成立していればよい。また、半群の生成作用素は、一般に非負であるから、この場合には、半群に対応する条件を求めることができる。

さて、こういう状況のもとで、(\*)に対応する条件を考える。つぎの命題は自明のようであるが、われわれの証明の手がかりにもなるのである。

**命題 2.1.**  $E = \overline{R(A_E)} = \overline{D(A_E)}, \quad F = \overline{R(A_F)} = \overline{D(A_F)}$  とする。

このとき、つぎの2条件は同値である。

$$(2.1) \quad \text{ある } \sigma > 0 \text{ に対して, } A^{-\sigma} \in \mathcal{L}(E, F);$$

$$(2.2) \quad E \subset R(A^\sigma) \quad \text{かつ} \quad D(A^\sigma) \subset F.$$

ここで、 $R(T)$  は作用素  $T$  の値域、 $D(T)$  は  $T$  の定義域、 $\overline{R(T)}, \overline{D(T)}$

は、それぞれ (の空間内での)  $R(T)$ ,  $D(T)$  の閉包をあらわす。また  $A^\alpha$  は、非負作用素  $A$  の分数巾である。その正確な定義は次節で述べる。

### §3 非負作用素の分数巾

$X$  を Banach 空間とし、 $A$  を  $X$  で定義された非負作用素とする。われわれの目的には、 $D(A)$ ,  $R(A)$  が  $X$  で稠密と仮定して十分であるから、そう仮定しておく (しかし、これはこの節の本来的内容には必要ではない)。さて、 $A$  の自然数巾  $A^m$  は、作用素論的に定義される。 $D(A^m)$  は、グラフノルムにより、Banach 空間になる。われわれの仮定のもとでは、 $A^m$  には逆があって、 $(A^m)^{-1}$  を  $A^{-m}$  と定義することができ、かつ、 $R(A^m) = D(A^{-m})$  となる。この意味で  $R(A^m)$  も Banach 空間である。

非負作用素の分数巾の定義を与えるためには、 $X$  と  $D(A^m)$ , または、 $R(A^m)$  との平均空間の性質に通じていることが望ましいが、これは、小松助教授の講演で十分であろうから、ここでは述べない。

以上の注意のもとに、分数巾の定義を与える。

3.1.  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  :  $\sigma > 0$  とする。 $(X, D(A^m))_{\sigma/m, 1} = D(A_\sigma^\alpha)$  ( $\sigma < m$ ) とおき、 $x \in D(A_\sigma^\alpha)$  に対し、 $0 < \operatorname{Re} \alpha < \sigma$  のとき、

$$A_\sigma^\alpha x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty r^{\alpha-1} (A(r+A)^{-1})^m x \, dr$$

と定義する。  $A$  の分母中  $A^\alpha$  は,  $A_0^\alpha$  の最小閉拡張として定義される。

3.2  $\operatorname{Re} \alpha < 0$ :  $\sigma > 0$  とする。  $(X, R(A^m))_{\sigma, m} = D(A_{-\sigma}^\alpha)$  ( $\sigma < m$ ) とおき,  $x \in D(A_{-\sigma}^\alpha)$ ,  $0 < -\operatorname{Re} \alpha < \sigma$ ,  $1 \leq \lambda < \infty$  に対して,

$$A_{-\sigma}^\alpha x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(m+\alpha)} \int_0^\infty r^{\alpha-1} (r(r+A)^{-1})^m x dr$$

と定義する。  $A$  の分母中  $A^\alpha$  は,  $A_{-\sigma}^\alpha$  の最小閉拡張として定義される。

3.3  $\sigma > 0, \tau > 0$  とし,  $-\tau < \operatorname{Re} \alpha < \sigma$  とする。  $x \in D(A^\sigma) \cap D(A^{-\tau})$  に対して,

$$A_{\sigma, -\tau}^\alpha x = \begin{cases} x, & \alpha = 0 \\ -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left\{ (-1)^m \int_0^N r^{\alpha+m} (r+A)^{-1} A^{-m} x dr + \sum_{k=-m}^n (-1)^{k+1} \frac{N^{\alpha-k}}{\alpha-k} A^k x + (-1)^{n+1} \int_N^\infty r^{\alpha-n-1} A(r+A)^{-1} A^n x dr \right\} \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

ただし,  $N > 0$ , 任意に固定,  $\sigma > m, \tau > n$  とおく。  $A_0^\alpha$  を  $A_{\sigma, -\tau}^\alpha$  の最小閉拡張として定義すると, これは  $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$  に応じて, 3.1, 3.2 の定義と一致することが知られている。

われわれの議論で後に必要となるのは,  $m > \operatorname{Re} \alpha > 0$  のとき,  $(X, D(A^m))_{\alpha, m, p}$  と  $D(A^\alpha)$ ,  $(X, R(A^m))_{\alpha, m, p}$  と  $R(A^\alpha) = D(A^{-\alpha})$  の包含関係, および,  $A$  の純虚数中である。このうち, 一般論からわかることは F に述べる。しかし, (HLS) を含む定理を証明するためには, もっと立入った議論が必要なことは, 言

うまでもなからう。そのあたりについては、本節の終りに言及する。

**命題 3.1.** 作用素論的に,  $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ ,  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$ . また  $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$ .

その他, もっと詳しいことが知られているが, いちいち述べない。われわれの議論に支障は起さぬ程度によい性質をもっていることは幸いである。

**命題 3.2**  $m > \operatorname{Re} \alpha > 0$  とする。このとき,

$$(X, D(A^m))_{\operatorname{Re} \alpha/m, 1} \subset D(A^\alpha) \subset (X, D(A^m))_{\operatorname{Re} \alpha/m, \infty},$$

$$(X, R(A^m))_{\operatorname{Re} \alpha/m, 1} \subset D(A^{-\alpha}) \subset (X, R(A^m))_{\operatorname{Re} \alpha/m, \infty}$$

また,

$$(X, D(A^m))_{\operatorname{Re} \alpha/m, p} \supseteq D(A^\alpha)$$

がある  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  で成立すれば, 任意の  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  で成立する。

$(X, R(A^m))_{\operatorname{Re} \alpha/m, p}$  と  $D(A^{-\alpha})$  の関係においても同様である。

**命題 3.3.**  $D(A^\alpha) \subset (X, D(A^m))_{\alpha/m, p}$ ,  $\alpha > 0$ , が成立すれば, 任意の自然数  $k$  に対し,  $m > k$ ,  $p' = p/(p-1)$  とおいて,

$$(X^*, D(A^{*m}))_{k/m, p'} \subset D(A^{*k}) \quad (p < \infty)$$

がなりたつ。ただし,  $X^*, A^*$  は,  $X, A$  の双対である。特に

$X$  が再帰的ならば,  $k$  を任意の正数としてよい。また, 一般

に, 仮定の包含関係を逆にすれば, 結論の包含関係も逆にな

る。  $D(A^{-\alpha})$  と  $(X, R(A^m))_{\alpha/m, p}$  の関係においても同様。

**命題 3.4**  $A^{ir} \in \mathcal{L}(X, X)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\|A^{ir}\|_{X \rightarrow X} \leq C e^{|r|}$  ならば,

$$D(A^\alpha) = [X, D(A^m)]_{\alpha, m}, \quad 0 < \alpha < m,$$

$$R(A^\alpha) = [X, R(A^m)]_{\alpha, m},$$

ただし, 上式はノルムの同値の意味でなりたつ。また,  $[\cdot, \cdot]_\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , は複素補間空間である。

さて, §2 の状況に立戻って考える。  $A, A_E, A_F$  と非負作用素が与えられているわけであるが, 命題 3.4 に類似したものとして, つぎの命題を得ることが出来る。

**命題 3.5**  $A_E, A_F$  が 命題 3.4 の  $A$  の仮定をみたすとする。

すなわち,  $A_E, A_F$  の純虚数巾は,  $E, F$  で有界, かつ, そのノルムは, 指数的に増大するならば,

$$[D(A_E^\alpha), D(A_F^\beta)] = D(A_\theta^{\alpha+\beta}),$$

ただし,  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, 0 < \theta < 1$ , かつ,  $A_\theta$  は  $A$  の  $[E, F]_\theta$  への制限である。  $R(A_E^\alpha), R(A_F^\beta)$  等についても同様。

われわれの以下の議論の難点は, 一般に, 作用素の純虚数巾の満足な理論がないという事による。幸い, 具体的に与えられた作用素の場合, 例えば (HLS) は Laplacian に関わるわけであるけれども, Laplacian の場合には Mikhlín の定理を援用すれば, 純虚数巾が有界であり, かつ, ノルムは多項式の増大度をもつことが知られる。その他, 藤原氏や高倉氏の計算例などにかた, Mikhlín または Marcinkiewicz の定理

を用いている。そして、われわれの場合も実は、Stein による Mikhlin の定理の一般化を用いる。正直の所、このあたりが気持ちよくない所以である。私見であるが、絶虚数中の議論は、半空間の正則関数の理論に関係があるようである。しかし、増大度の仮定から、Hardy class の理論等には収容できないと思われる。

#### §4 class $(\sigma, m, E, F)$

さて、§2 の状況にもどって考える。われわれの目的は、(HLS) の証明であるから、このために  $(\sigma, m, E, F)$  というクラスを導入する。

**定義 4.1.**  $\sigma > 0$ ,  $m$  自然数とする。  $A \in (\sigma, m, E, F)$  とは、各  $\lambda > 0$  に対し、  $(\lambda + A)^{-m}$  が  $E$  を  $F$  に写し、かつ、

$$\|(\lambda + A)^{-m}\|_{E \rightarrow F} \leq L \lambda^{\sigma - m}$$

がなりたつことをいう。ここで、 $A$ ,  $A_E$ ,  $A_F$  の非負性を仮定する。

ただちにわかることをいくつか述べる。

**命題 4.1.**  $A \in (\sigma, m, E, F)$  ならば  $A \in (\sigma, m+1, E, F)$ 。逆に、 $m > \sigma$  なる限り、 $A \in (\sigma, m+1, E, F)$  ならば  $A \in (\sigma, m, E, F)$ 。

**命題 4.2.**  $A \in (\sigma, m, E, F)$  ならば、 $N(A_E) = \{x \in D(A_E); A_E x = 0\} = \{0\}$ 。

これより、 $E$  が再帰的ならば、Abel 型エルゴード定理より

$\overline{R(A_E)} = E$  がわかる。

**命題 4.3.**  $A \in (\sigma, m, E, F)$  とする。  $(r+A)^{-m} \overline{R(A_E)} \subset \overline{R(A_F)}$

$(r+A)^{-m} \overline{D(A_E)} \subset \overline{D(A_F)}$  ( $r > 0$ ) である。

今,  $G(t)$  を  $E+F$  の  $(C_0)$  半群,  $G(t)$  の  $E, F$  への制限  $G_E(t)$ ,  $G_F(t)$  も,  $E, F$  で  $(C_0)$  半群をなしていると仮定する。  $G(t)$  の生成作用素を  $-A$  とし,  $G(t) = e^{-tA}$  と記すと,  $G_E(t) = e^{-tA_E}$ ,  $G_F(t) = e^{-tA_F}$  となることが容易にわかる。

**定義 4.2**  $\sigma > 0$  とする。  $G(t) \in \mathcal{S}(\sigma, E, F)$  とは, 各  $t > 0$  に対し,  $G(t)$  は,  $E$  と  $F$  に有界に写し, かつ,

$$\|G(t)\|_{E \rightarrow F} \leq K t^{-\sigma}$$

がなりたつことをいう。

$G(t) = e^{-tA} \in \mathcal{S}(\sigma, E, F)$  ならば,  $A \in (\sigma, m, E, F)$ ,  $\sigma < m$ , である。  $G(t)$  が “解析的” 半群である場合には逆もなりたつ。

§1 で導入された半群  $(G)$  は, 補間定理を用いることにより,  $1 < p < q < \infty$  に対して,

$$(4.1) \quad G(t) \in \mathcal{S}\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)\right)$$

を満足していることに注意しよう。そして,  $G(t) = e^{-tA}$  とすれば, 命題 4.2 により, 各  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p < \infty$ , において,

$\overline{R(A_p)} = L^p(\mathbb{R}^n)$  がなりたっていることがわかる。また,  $G(t)$

は,  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p < \infty$ , で解析的であるから, 特に  $(C_0)$ ,

したがって,  $\overline{D(A_p)} = L^p(\mathbb{R}^n)$  でもある。すなわち, 命題 2.1

の仮定は,  $(G)$  の生成作用素に関しては満足されている。そこで (HLS) を証明するためには, (2.2) を示せばよいわけである。

### §5 ニつの埋込み定理

そこで, つぎの定理を示す。

**定理 5.1**  $A \in (\sigma, m, E, F)$  とする。  $k > \sigma/(1-\theta)$  なる整数,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \theta < 1$  に対し,

$$(E, D(A_E^k))_{\theta+\sigma/k, p} \subset (F, D(A_F^k))_{\theta, p}$$

がなりたつ。

**定理 5.2**  $A \in (\sigma, m, E, F)$  とする。このとき,  $k, p, \theta$  は前定理の如くとれば,

$$(E, R(A_E^k))_{\theta, p} \subset (E+F, R(A^k))_{\theta+\sigma/k, p}$$

がなりたつ。

このうち, 定理 5.1 は, Besov-Nikol'skii 型の埋込み定理の一般化になっている。さて, これらから, §3 の結果を用いることにより, つぎの命題の成立がわかる。

**命題 5.1**  $A \in (\sigma, m, E, F)$  とする。このとき,

$$D(A_E^\alpha) \subset D(A_F^\beta), \quad \operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta + \sigma > \sigma;$$

$$R(A_E^\alpha) \subset R(A_F^\beta), \quad 0 < \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \alpha + \sigma.$$

この命題の内容では, (HLS) の証明には不十分である。実

際, (HLS) は, 上の命題で, それぞれ,  $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta + \sigma$ ,  
 $\operatorname{Re} \beta = \operatorname{Re} \alpha + \sigma$ , の場合に対応する ことか, 以下の命題から  
 推察される。

**命題 5.2.**  $\sigma > 0$  とする。つぎの三条件は同値である。

$$(5.1) \quad D(A_E^\sigma) \subset F;$$

$$(5.2) \quad D(A_E^{\alpha+\sigma}) \subset D(A_F^\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0;$$

$$(5.3) \quad D(A^\alpha) \subset F.$$

なお, これから  $A \in (\sigma, m, E, F)$ ,  $\sigma < m$ , が従うことを  
 注意しておく。値域に関しては,

**命題 5.3.**  $\sigma > 0$  とする。つぎの三条件は同値である。

$$(5.4) \quad E \subset R(A^\sigma);$$

$$(5.5) \quad R(A_E) \subset R(A^{1+\sigma});$$

$$(5.6) \quad R(A_E^\alpha) \subset R(A^{\alpha+\sigma}), \quad \forall \alpha > 0.$$

さて, われわれが (HLS) を証明する場合, 実は命題 2.1 より,  
 やや強い形を用いる。すなわち,

**命題 5.4.**  $X \supset E, F$  なる Banach 空間  $X$  を考え,  $X$  において

$A_E, A_F$  の拡張になる非負作用素  $A_X$  を考える。  $X = \overline{R(A_X)} =$

$\overline{D(A_X)}$  とする。  $\sigma > 0$  に対し,  $D(A_X^\sigma) \subset F, E \subset R(A_X^\sigma)$

ならば,  $A^{-\sigma} \in \mathcal{L}(E, F)$  である。

証明は簡単で,  $A^{-\sigma} \in \mathcal{L}(R(A_X^\sigma), D(A_X^\sigma))$  と閉グラフ定理  
 を組合せればよい。

## §6 一般化された H.L.B 不等式.

いずれにせよ, 問題は命題 5.1 か,  $\alpha, \beta$  のもっとも望ましい関係のもとでなりたつ場合を見つけることである。そして, それが例えば,  $R^d$  の Laplacian の場合がそうだったということが, (HLS) の内容に他ならない。そこで, 証明すべきことは, つぎの定理である。

**定理 6.1**  $(M, dm)$  をシグマ有限な正值測度空間とする。今,  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  を線型作用素の族で,  $M$  上の函数  $(L^1 + L^\infty)$  を  $M$  上の函数に写すものとする。 $\{T_t\}$  は半群をなし, しかも,  $L^2(M, dm)$  においては, 強連続であるとする。すなわち,  $T_t T_s = T_{t+s}$ ,  $t, s > 0$ ,  $T_0 =$  恒等作用素, かつ  $\|T_t f - f\|_2 \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ ) とする。さらに, つぎの 5 条件を仮定する。

- (i)  $\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty$ .
- (ii) 各  $t > 0$  に対し,  $T_t$  は自己共役 ( $L^2$  で)
- (iii)  $f \geq 0$  なら  $T_t f \geq 0$
- (iv)  $T_t 1 = 1$
- (v) 各  $t > 0$  に対し,  $T_t$  は  $L^1(M, dm)$  を  $L^\infty(M, dm)$  に写し, しかも, ある  $\sigma > 0$  に対して,
 
$$\|T_t f\|_\infty \leq K t^{-\sigma} \|f\|_1$$

これらの仮定のもとで,

$$A^{-\tau} \in \mathcal{L}(L^p(M, dm), L^q(M, dm)), \quad 1 < p < q < \infty,$$

ただし,  $\tau = \sigma(1/p - 1/q)$ , かつ

$$(6.1) \quad A^{-\tau} f = \Gamma(\tau)^{-1} \int_0^{\infty} t^{\tau-1} T_t f dt.$$

これから (HLS) を含んでいることは, §1 の議論を想起すれば, 直ちにわかる。

### §7 定理 6.1 の証明.

言ひ忘れたが,  $T_t = e^{-tA}$  として,  $A^{-\tau}$  は (6.1) で定義してもあるいは §3 のように定義しても, 一致する。そこで, 定理 6.1 を示すためには, つぎの命題を示せばよい。

**命題 7.1.**  $1 < p \leq 2$  とする。任意の  $\alpha > 0$  に對し,

$$R(A_{p \wedge 2}^{\alpha}) \subset (L^p(M, dm) \cap L^2(M, dm), R(A_{p \wedge 2}^k))_{\alpha/k, 2}$$

ただし  $A_{p \wedge 2}$  は  $A$  の  $L^p \cap L^2$  への制限。  $\alpha < k$

**命題 7.2.**  $1 < p \leq 2$  とする。任意の  $\alpha > 0$  に對し,

$$D(A_p^{\alpha}) \subset (L^p(M, dm), D(A_p^k))_{\alpha/k, 2}$$

これから, 何が言えるかということ, 命題 3.3 より,

**命題 7.3.**  $2 \leq p < \infty$  とする。任意の  $\alpha > 0$  に對し,

$$(L^2 + L^p, R(A_{p \vee 2}^k))_{\alpha/k, 2} \subset R(A_{p \vee 2}^{\alpha}),$$

ただし,  $A_{p \vee 2}$  は  $A$  を  $L^2 + L^p$  に拡張したものである (これはできる)。

**命題 7.4.**  $2 \leq p < \infty$  とする。任意の  $\alpha > 0$  に對し,

$$(L^p, D(A_p^k))_{\alpha/k} \subset D(A_p^{\alpha})$$

定理 6.1 を証明するためには、もう一つ命題を用意しておく必要がある。

**命題 7.5** 定理 6.1 の仮定 (i) - (iv) のもとで、 $T_t$  の生成作用素を  $-A$  とするとき、各  $p$ ,  $1 < p < \infty$ , に対し、 $A_p$  の純虚数  $A_p^{ir}$  は有界で、 $\|A_p^{ir} f\|_p \leq M_p e^{\pi |r|} \|f\|_p$  をみたす。

命題 7.1, 7.2, 7.5 の証明を後まわしにして、定理 6.1 の証明をざっと述べる。まず  $p, q, A$  の対称性から  $2 \leq p < q < \infty$  について定理を示し、ついで、双対性を用いれば、 $1 < p < q \leq 2$ , 組合せれば、一般の場合になる。そこで、まず  $p=2$  の場合を示す。そのためには、命題 2.1, 5.2, 5.3 を考慮すれば、

$D(A_{2 \vee q}^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_q^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\tau' = \sigma(1/2 - 1/q)$ ,  
および、 $R(A_2^\alpha) \subset R(A_{2 \vee q}^{\alpha+\tau'})$  を示せばよい。§5 の結果から、 $(T_t \in \mathcal{S}(\tau', L^2, L^q))$  になるから、

$$(L^2, R(A_2^k))_{\alpha/k, 2} \subset (L^2 + L^q, R(A_{2 \vee q}^k))_{(\alpha+\tau')/k, 2}$$

$$(L^2, D(A_2^k))_{(\alpha+\tau')/k, 2} \subset (L^q, D(A_q^k))_{\alpha/k, 2}$$

命題 7.3, 7.4 から、 $R(A_2^\alpha) \subset R(A_{2 \vee q}^{\alpha+\tau'})$ ,  $D(A_2^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_q^\alpha)$

命題 5.2 から、 $D(A_{2 \vee q}^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_q^\alpha)$ , したがって、命題 5.2, 5.3, 2.1 を考慮すれば、定理は  $p=2 < q < \infty$  の場合には証明された。さて、 $2 < p < q < \infty$  の場合を取扱うために、

$X_p = [L^q, L^2 + L^q]_\theta$  とおき、 $A_p$  を  $A$  の  $X_p$  への制限とする。まず、命題 7.5 から  $A_p^{ir}$  を、 $X_p$  の有界作用素として自然に定義す

れ、類似の評価をみたすことに注意する。さて、 $D(A_{2\nu_2}^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_f^\alpha)$  と  $D(A_f^\alpha) = D(A_g^\alpha)$  を補間して、 $A_\theta^{\tau'}$  に関する今の注意と命題 3.5 を用いると、 $D(A_\theta^{\alpha+\tau'\theta}) \subset D(A_f^\alpha)$ 、全く同様にして、 $R(A_\theta^\alpha) \subset R(A_\theta^{\alpha+\tau'\theta})$  が得られる。ただし、 $1/p = \theta/2 + (1-\theta)/q$ ,  $0 < \theta < 1$  である。しかも、 $\tau'\theta = \sigma(1/p - 1/q) = \tau$  になる。再び、命題 5.2, 5.3 を用いれば、 $D(A_\theta^\tau) \subset L^q$ ,  $L^p \subset R(A_\theta^\tau)$  となることがわかる。そこで、命題 5.4 を用いれば、 $A^{-\tau} \in \mathcal{L}(L^p, L^q)$ ,  $2 \leq p < q < \infty$ , である。これから一般の  $1 < p < q < \infty$  をどう導くかは、この節の冒頭で述べたから、結局、定理 6.1 は証明されたことになる。

### §8 命題 7.1, 7.2, 7.5 の証明.

この三命題の証明が残った。いずれも、Stein の結果を用いる。命題 7.2 をどう導くかは、Taibleson の論文において、 $\mathbb{R}^n$  の Laplacian の分数中の定義域と、平均空間の間の包含関係、すなわち、Bessel potentials と、Lipschitz spaces の間の関係において、Littlewood-Paley 函数が果たす役割を、Stein の generalized Littlewood-Paley 函数を用いて、並行した議論を行えばよい。命題 7.1 は、命題 7.2 の証明がわかれば、容易である。命題 7.5 は、Stein による一般化された Mihlin の定理を用いればよい。

## 文献

- [1] 小松 孝三 氏 Fractional powers of operators I-V,  
 Pacific J. Math. 19(1966), 285-346, *ibid.* 21(1967), 89-111,  
 J. Math. Soc. Japan 21(1969) 205-220, 221-228; J. Fac. Sci.  
 Univ. Tokyo, Sec. I A, 17(1970) ?
- [2] Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions  
 on Euclidean  $n$ -space, I. J. Math. Mech. 13(1964), 407-479
- [3] Stein, E. M., Topics in Harmonic Analysis Related to the  
 Littlewood-Paley Theory, Ann. Math. Studies 63, Princeton  
 U. P. and the University of Tokyo P., Princeton 1970,
- [4] 荒川 孝二, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I. 15(1968), 209-  
 251, 17(1970) 543-558, 559-566. + 未刊行論文

(XII)