

位相変数に基づくカオスの表現とその解析

JST ERATO 合原プロジェクト／東京大学生産技術研究所 末谷 大道¹

我々の身の回りには様々な振動現象が偏在しそれらが階層的な構造を形成している。例えば、真性粘菌では、時間スケールの異なる複数の代謝反応がその形態変化に影響を及ぼし、環境の変化に対する柔軟な応答に役立っている [1]。同様に、より複雑な脳神経系においてはスパイクレベルから LFP や脳波といった集団的なレベルに至るまでの様々な時間スケールのダイナミクスが共存し情報処理や認知の基礎となっている [2]。非線形力学の分野では、振動現象を取り扱うのに位相変数が重要な役割を果たしている。リミットサイクルに対してはアイソクロンという状態空間上のスカラー場として位相変数を厳密に定義することが可能で、多数のリミットサイクル素子集団が示す協力現象に関する数理的な研究も進んでいる。一方、カオス力学系については一意にカオスの位相というものを定めることはできないものの、『カオス位相同期』[3] など、便宜的に位相変数を導入することによって見えてくる興味深い非線形現象も知られており、脳神経系や循環器系などの様々な生理データで観察される同期現象とも絡んで最近注目を集めている [4]。講演では、位相変数によるカオスの表現と解析に関して以下の二つの話題を紹介した。

連続時間力学系におけるカオスの混合性

カオスの混合性 (不変測度への収束) については、離散時間力学系のカオスでは Perron-Frobenius 作用素の固有モード解析を通じて理解が深まっている。一方、連続時間力学系のカオスでは中立的なモード (=“位相”方向) に沿って引き伸ばしと折りたたみが行われるため、カオスの初期値鋭敏性とその結果もたらされる混合性との関係は自明ではない。講演では、基本的な連続時間カオス系である Rössler モデルを用いてその位相方向に関する混合過程に関する数値シミュレーション結果を報告した。更に、カオスの位相混合の速さが、一本の軌道の適当な Poincaré 断面への再帰時間の揺らぎの大きさ (再帰時間時系列の自己相関関数の積分) で評価できることなどを示した。

時系列データからの位相変数の抽出

ローレンツカオスに代表されるように、一般に連続時間のカオス系では複数の振動中心が存在し、一つのスクロール内の振動とスクロール間を遷移する振動という様にダイナミクスは複数の特徴的な時間スケールを持つ。このとき、適切な位相変数はどうあるべきか、どのようにデータから抽出できるのかということが問題になる。信号処理の分野では、位相変数を与える方法の一つとして、Gabor によって提案された解析信号が知られている [5]。解析信号とは、与えられた元のスカラー信号 $x(t)$ を実部、その Hilbert 変換 $x_H(t)$ の各 Fourier 成分の位相を $\pi/2$ ずらした信号として解釈される) を虚部として構成される複素信号: $s(t) = x(t) + ix_H(t)$ であり、 $s(t)$ の偏角として時刻 t での (瞬時的な) 位相と振幅が定義される。Gabor の解析信号が時間に対する単調増加性の意味で適切な位相変数を与えることができるのは狭帯域の信号に限られる。Huang らは、この困難を乗り越えるために、広帯域で非定常性を含む信号に対しても極大値・極小値の位置情報に基づいてトレンド除去を再帰的に繰り返すことによって各成分の解析信号が時間に関して単調増加であるという意味で適切な位相変数を持つように分解することを可能にする『経験的モード分解』(Empirical Mode Decomposition: EMD) と呼ばれる方法を提案した [6]。講演では、EMD について簡単な例題を通じてその手法を導入するとともに、実際のカオス力学系で生成される時系列にも適用した結果や問題点について論じた。

参考文献

- [1] Y. Kakiuchi and T. Ueda, Biol. Rhyth. Res. **37**, 137 (2006).
- [2] G. Buzsaki, “Rhythms of the Brain”, (Oxford University Press, 2006).
- [3] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **76**, 1804 (1996).

¹現所属：鹿児島大学理学部

- [4] C. Schäfer, M.G. Rosenblum, J. Kurths, and H.-H. Abel, *Nature* **392**, 239 (1998); E. Rodriguez et al., *Nature* **397**, 6718 (1999); F. Varela et al., *Nat. Rev. Neurosci.* **2**, 229 (2001).
- [5] D. Gabor, *J. IEE (London)* **93**, 429 (1946).
- [6] N.E. Huang et al., *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **454**, 903 (1998).