

Inside-outside duality and isospectrality of planar billiards

岡田 雄一郎 (Yuichiro Okada), 首藤 啓 (Akira Shudo)
Department of Physics, Tokyo Metropolitan University

1. Kac の問題の反例, および固有関数の移植

1-1. Kac の問題

2次元の平面閉領域 P (平面ビリヤード) 上のディリクレ境界条件のもとでの固有値問題のスペクトル:

$$(1) \quad \text{spec}(P) = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \mid \Delta f_i = \mu_i f_i \text{ in } P, f_i = 0 \text{ on } \partial P \ (i = 1, 2, \cdots)\}.$$

に対して, $\text{spec}(P) = \text{spec}(Q)$ であるような2つの領域 P, Q は等スペクトル (isospectrum) 領域という. 2つの領域が合同であるときには, 自明に $\text{spec}(P) = \text{spec}(Q)$ となるが, 逆に, $\text{spec}(P) = \text{spec}(Q)$ であるような2つの平面領域は合同になるか? という問題は, 「太鼓の形を聞くことができるか?」 (“Can one hear the shape of a drum?”) として M. Kac によって提出された [1]. この問いは, 1992年に Gordon, Webb, Wolpert の3人により, 合同でない2つの平面閉領域 P, Q で, $\text{spec}(P) = \text{spec}(Q)$ となる例が発見されることにより否定的に解決されたことはよく知られるところである [2]. 図1に挙げるのが Gordon らによって構成された反例である. 2つの領域 P, Q は, 同じ形をした二等辺三角形をひとつの構成単位として, それらを7枚貼り合わせることで構成される. これらは, その貼り合わせの仕方が異なるため, 貼り合わせでできあがった図形は明らかに合同でない. Gordon らは, リーマン多様体に対する等スペクトル問題の十分条件 (砂田の定理) [3] を orbifold の設定に拡張することによりその反例の構成に到達したが, 与えられた2つの領域 (たとえば, 図1で与えられる) が実際に等スペクトルであることをみるだけであれば, 以下の移植の方法 (transplantation method) を用いると容易である [4].

1-2. 移植の方法

領域 P 上で固有値 μ をもつ固有関数 f を, 各単位領域上の関数 f_i ($i = 1, 2, \cdots, 7$) を以下の条件を満たすように「移植」することができたとき, 領域 Q 上の対応する固有関数 g は同じ固有値 μ をもつ.

1. 領域 Q 内の各単位領域上で $\Delta g = \mu g$ である.
2. 関数 g は各単位領域の間のすべての境界上で滑らかにつながっている.
3. 関数 g は領域 Q の外側に面した境界上で $g = 0$ となる.
4. 逆の移植もまた存在する.

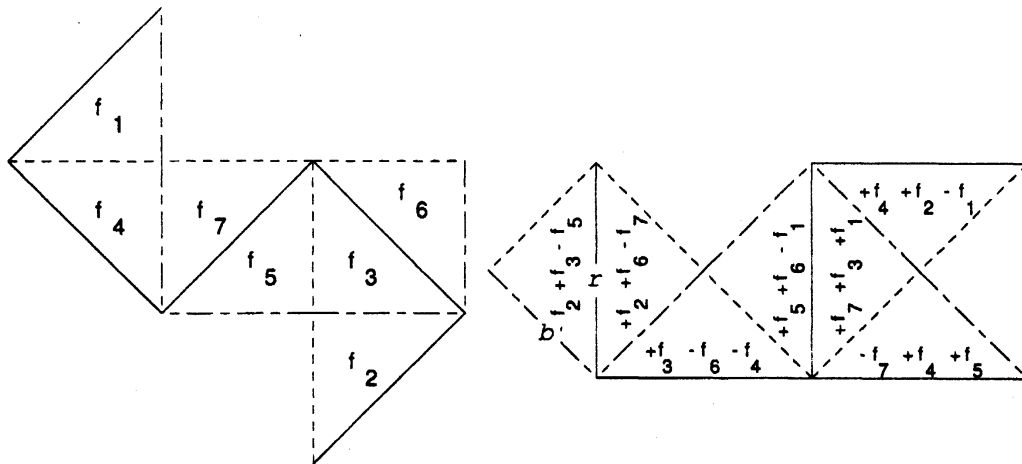


図 1: 等スペクトル領域の例.

1. については, g が f_i の和である限り常に成り立つ. 2. は自明ではないが, 図1の例については確かに成り立っている. 実際, たとえば, 右側の領域 Q の境界 r に注目すると, f_3 と f_6 , あるいは, $-f_5$ と $-f_7$ は領域 P 上で滑らかにつながっており, さらに, $-f_2$ と f_2 は符号が異なるだけで滑らかにつながっている, $-f_2 + f_3 - f_5$ は $+f_2 + f_6 - f_7$ と滑らかにつながっていることがわかる. 同様にすべての単位領域の境界で関数 g は滑らかになっていることを確かめるのも難しくない. また, 3. についても自明ではないが, やはりこの例では成り立っている. たとえば, 境界 b をみると, $-f_2$ と f_3 は領域 P 上で向い合う関係にあったことから相殺し, f_5 は領域 P 上で最初からゼロなので, 結局, $-f_2 + f_3 - f_5$ 全体がゼロになる. その他の境界も同様な議論が成立する. 4. の条件は, 固有値 μ に属する空間の重複度が P と Q とで等しくなっているための十分条件である. 図1の例について成り立っていることを確かめることは容易である.

以上は, 各閉領域の境界にディリクレ境界条件を課した場合についてであったが, 以上の条件が満たされれば, 領域 P と Q は, ノイマン条件を課した固有値問題としても等スペクトルになる. また逆に, ノイマン条件に対する等スペクトル領域がひとたび得られると, その等スペクトル対からディリクレ境界条件を課した等スペクトル領域を構成することも可能である.

以上の移植の方法から明かないように, 等スペクトル領域対は, 単位領域の形状には依存しない. 図1の例では二等辺三角形が単位領域になっていたが, 単位領域の張り合わせを許すように3つの境界をもっていればどんな形(境界に曲線を含もうと)その貼り合わせによってつくられる領域は等スペクトル対になる. この事実を踏まえると, 移植の方法は, 貼り合わせ領域のつなぎ方の問題に帰着し, 以下の行列を用いた定式化が可能になる [5].

2. 辺彩色グラフを用いた移植可能性の定式化

2-1. 辺彩色グラフ

基本単位領域の貼り合わせを以下の対応により辺彩色グラフ (edge-colored graph) を用いて表現する.

貼り合わせ領域	辺彩色グラフ
各基本領域	頂角
基本領域間の境界	辺
境界の種類	辺の色

すなわち, 各基本領域はグラフの頂角, 基本領域間の境界線をグラフの辺, また, 基本領域のもつ3種類の境界 (図1の実線, 破線, 一点破線にそれぞれ対応) の, 区別をグラフの色でそれぞれ表現する. また, 基本領域の境界が外側に面している, つまり, 領域 P 自身の境界になっている場合には, そのような辺は閉ループによって表すことにする. たとえば, 図1の領域 P の辺彩色グラフは図2の右図のようになる.

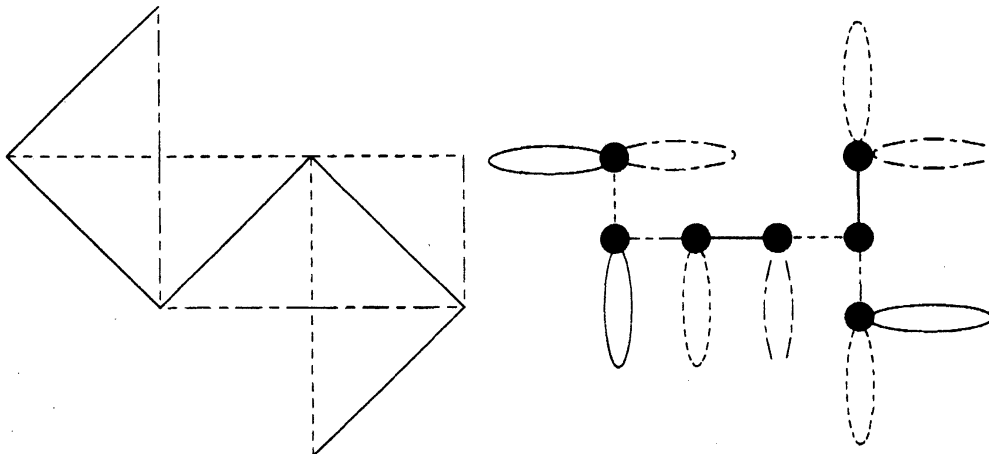


図2: 領域 P とそれに対応する辺彩色グラフ. グラフ上の●が基本領域, 辺が二等辺三角形の基本領域を表す. 実線, 破線, 一点破線はそれぞれ3種類の境界を区別する.

以上の辺彩色グラフは, 以下の隣接行列を用いて表現される. すなわち, 単位領域の貼り合わせのルールは, 以下で定義される隣接行列を用いて記述することができる:

$$(2) \quad (M_{\gamma}^P)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{基本領域 } i \text{ と } j \text{ が境界 } \gamma \text{ を介して接しているとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし, $\gamma = a, b, c$. また, 基本領域 i の境界 γ が外側の境界になっている場合, $(M_{\gamma}^P)_{ij}$ の対角項は1とする. ここで, 頂角の順番の付け方に自由度があるため, 与えられた辺彩色グラフに対して隣接行列は一意ではない点には注意したい.

2-2. 移植可能性

以上の設定のもとで、2つの貼り合わせ領域 P, Q は、以下を満たす置換行列 U

$$(3) \quad UM_a^P U^{-1} = M_a^Q, \quad UM_b^P U^{-1} = M_b^Q, \quad UM_c^P U^{-1} = M_c^Q.$$

が存在するとき合同となる。ここで、置換行列とは $N \times N$ (N は基本領域の枚数) の行列で、その各行、各列に1がひとつだけあり、それ以外は0になっているような行列のことである。各基本領域の形が何らかの対称性をもつような場合、たとえば、先の二等辺三角形のようにある軸に対称であるような場合、非置換行列でない行列が上記の関係を満たし、にもかかわらず、2つの合同領域 P, Q が合同になってしまうこともあり得るが、一般の形状をもつ s 基本領域については、(3)を満たす置換行列の存在が、領域 P, Q が合同であることの必要かつ十分条件となる。

次に、隣接行列を用いて移植可能性 (transplatability) を以下のように定義する。ここで、移植可能性とは、先に述べた移植の方法で、等スペクトル性が確認できるような性質のことである。その前にまず、「移植」を以下の線型変換で導入する。すなわち、それぞれ N 個の基本領域から成る2つの貼り合わせ領域 P, Q に対して、線型変換 $T: L^2(P) \ni f \mapsto g \in L^2(Q)$ によって、 P 上の関数 f が、 Q 上の関数 g に

$$(4) \quad g_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

によって移されるとき T を移植と呼ぶ。ここで、 f_i, g_i は、関数 f および、 $g = Tf$ のそれぞれの基本領域への制限を表す。この段階では、 g は、 Q 上の固有関数になっているかどうかは問題ではないことに注意したい。

さてその上で、変換 T が

$$(5) \quad TM_a^P T^{-1} = M_a^Q, \quad TM_b^P T^{-1} = M_b^Q, \quad TM_c^P T^{-1} = M_c^Q.$$

を満たすとき、貼り合わせ領域 P, Q は互いに移植可能である、ということにする。容易に示されるように、上記の変換が T が存在すれば、移植の方法で要請した先の4つの条件は、ただちに満たされる。

ここで、 T が置換行列であるときには先に述べたように領域 P, Q は合同になってしまうので、合同でない等スペクトル領域を探すには、変換 T が置換行列にならずに上記の条件を満たすものを探さなければならないことになる。この事実は、砂田の定理のなかにあらわれる almost conjugate condition に類似のものである。

3. 移植可能性と等周期軌道スペクトル

3-1. 周期軌道スペクトルと跡公式

よく知られるように、平坦トーラス上に作用する Laplace-Beltrami 作用素の固有値のスペクトルと、その上の閉測地流の長さのスペクトルは跡公式を介してつながっている。具体的には以下のようなものである。 n 次元の格子 Γ から定まる平坦トーラス上のヘルムホルツ方程式 $\Delta f = \mu f$ の固有値は、 Γ^* を Γ の双対格子とすると、

$$(6) \quad \{4\pi^2 \|\sigma\|^2 \mid \sigma \in \Gamma^*\}.$$

で与えられ、一方、平坦トーラス上の閉測地流のスペクトル（周期軌道スペクトル）は、原点 O と格子 Γ の各点への距離で与えられ、

$$(7) \quad \{\|\gamma\| \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

である。以上のエネルギー固有値のスペクトルと周期軌道スペクトルこれらは、いわゆる Poisson の和公式（あるいは、Jacobi の恒等式）

$$(8) \quad \sum_{\sigma \in \Gamma^*} \exp(-4\pi^2 \|\sigma\|^2 t) = (4\pi t)^{-n/2} \text{vol}(\mathbf{R}^n/\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-\|\gamma\|^2/4t).$$

によって結ばれる。Milnor は、 $n = 16$ の場合、周期軌道スペクトルが同一でありながら、合同でない平坦トーラス上に存在する事実から、以上の跡公式を介することにより、「太鼓の形を聞くことができるか？」と類似な問題に対する反例を与えた [6]。定負曲率をもつ測地流の問題に対しても、いわゆる Selberg の跡公式が存在し、固有値スペクトルと周期軌道スペクトルとは関係付けられる。このように、厳密な跡公式が存在する場合には、固有値スペクトルと周期軌道スペクトルの間には双対の関係が存在し、跡公式を介することにより固有値スペクトルに対する等スペクトルの問題と周期軌道スペクトルに対する等スペクトルの問題とは等価な問題となるが、平面閉領域内での固有値問題と周期軌道スペクトルとのあいだにはそのような厳密な跡公式が存在しないため、両者の間にはいかなる関係があるのか自明ではない。以下では、平面の太鼓の問題についても、等スペクトルの問題に関して類似の関係が存在することを示す [5]。

3-2. 周期軌道の持ち上げ数

まず最初に、基本領域 B 内の周期軌道スペクトルと、それらを貼り合わせて得られる領域 P 内での周期軌道スペクトルとの関係を見る。貼り合わせ領域 P 内の周期軌道は基本領域 B 内の周期軌道の持ち上げである、という自明な事実から、領域 P 内の周期軌道は必ず基本領域 B 内でも周期軌道であることがわかる。しかし、逆は必ずしも真ではない。1つの基本領域 B 内の周期軌道のうち、あるものは貼り合わせ領域 P 内でも周期軌道となるが、あるものはそうではない。先に導入した隣接行列を用いると、基本領域 B 内の周期軌道が、貼り合わせ領域 P 内で周期軌道になる数は、

$$(9) \quad n^P(\gamma) = \text{Tr}(M_{\gamma_m}^P M_{\gamma_{m-1}}^P \cdots M_{\gamma_1}^P),$$

となる。ここで、 $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ ($\gamma_i = a, b, c$) は、基本領域 B 内の周期軌道 γ が衝突する境界を表す列である。いま考えている軌道は周期軌道であるから、当然、 $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ が周期

軌道の列を表したとすると、それらの循環で得られる、たとえば、 $\gamma_2 \cdots \gamma_m \gamma_1$, $\gamma_3 \cdots \gamma_m \gamma_1 \gamma_2$ とも周期軌道である。実際、

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M_{\gamma_m}^P \cdots M_{\gamma_2}^P M_{\gamma_1}^P) &= \text{Tr}(M_{\gamma_1}^P M_{\gamma_m}^P \cdots M_{\gamma_2}^P M_{\gamma_1}^P (M_{\gamma_1}^P)^{-1}) \\ &= \text{Tr}(M_{\gamma_1}^P M_{\gamma_m}^P \cdots M_{\gamma_2}^P) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

となるが、貼り合わせ領域 P の周期軌道スペクトルは、この $n^P(\gamma)$ によって決まることが容易にわかる。

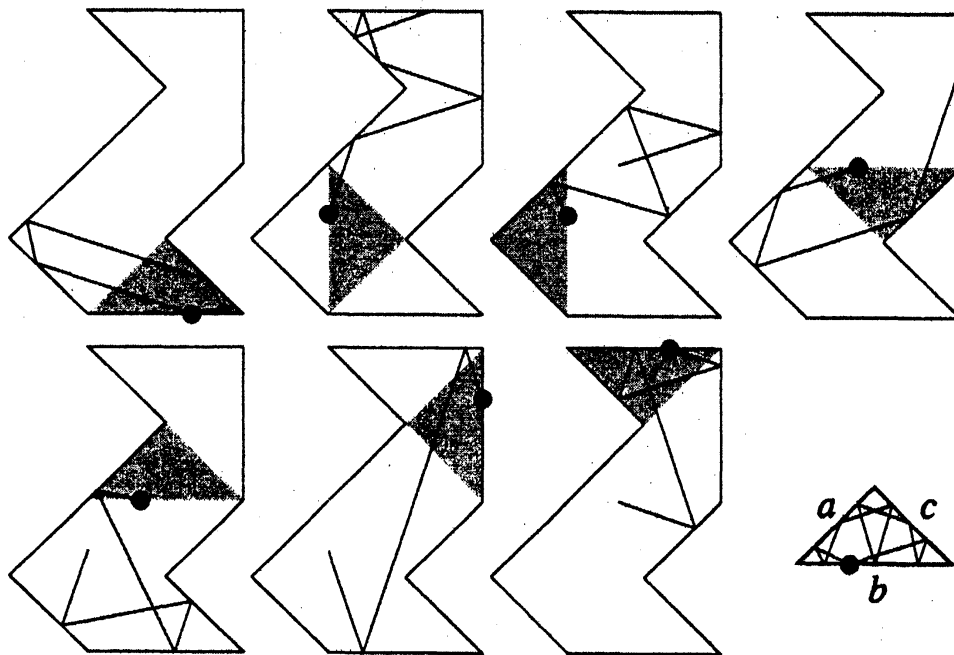


図 3: 基本領域 B 内の周期軌道とその持ち上げ。上の例では、 $\gamma = babacbacbc$ で、 $n^P(\gamma) = 1$ となる。

以上の準備のもとに以下が成立する [5].

Proposition 1 P, Q を N 枚の基本領域からなる貼り合わせ領域とする。もし、 P, Q が移植可能であるならば、任意の列 γ に対して、 $n^P(\gamma) = n^Q(\gamma)$ となり、 P, Q は等周期軌道スペクトルをもつ。

逆に、

Proposition 2 任意の列 γ に対して、 $n^P(\gamma) = n^Q(\gamma)$ であるならば、貼り合わせ領域 P, Q は移植可能である。従って、 P, Q は等スペクトルである。

以上の命題より、平面閉領域内での固有値スペクトルの等スペクトル性と周期軌道スペクトル

の等スペクトル性は以下のような関係でつながっていることがわかる：

$$\begin{aligned}
 \text{等スペクトル性} &\Leftarrow \text{移植可能性} \\
 &\Leftrightarrow \forall \gamma \quad n^P(\gamma) = n^Q(\gamma) \\
 &\Rightarrow \text{等周期軌道スペクトル性}
 \end{aligned}$$

3-3. 移植可能対の列挙 ($N \leq 13$)

以上の命題を用いると、移植可能な貼り合わせ領域の列挙が容易になる。基本領域の枚数 N を固定すると、辺彩色グラフ $\mathcal{U}_N$ の数は有限であることから、与えられた N に対してすべてのグラフを求め、それらの組み合わせに対して移植可能性を調べれば、原理的には移植可能な領域対をすべて列挙することができるはずである。しかし、基本領域の枚数 N に対して、辺彩色グラフの数は指数関数的に増えることから、その組み合わせの数は膨大になり、計算機をもってもその列挙可能な枚数は限られる。しかしながら、(9) で定義される $n^P(\gamma)$ が各貼り合わせ領域 P に付随する特性量となることから、 $n^P(\gamma)$ を計算しそれらが等しいものだけを探しだし、そのあとに移植可能か否かを判定すればその手数を大幅に省くことができる。より具体的には、

1. 辺彩色グラフ $P \in \mathcal{U}_N$ のすべての γ に対して特性指数 $n^P(\gamma)$ を計算する。
2. 特性指数 $n^P(\gamma)$ を適当な順番で並べ、特性指数のリスト $\{n^P(\gamma)\}$ をつくる。
3. 同じリストをもつ辺彩色グラフを探す。

命題2より、 $\{n^P(\gamma)\} = \{n^Q(\gamma)\}$ となるような貼り合わせ対が見つければ、それらは移植可能対である。 γ にはいくらかでも長いものが出てくるが、隣接行列 (M_a^P, M_b^P, M_c^P) から生成される群が有限群であることから、特性指数のリストが無限個の要素から成る心配はない。

ここで興味深いのは、 γ を構成する要素が何もない場合 (null sequence)、関係式 $n^P(\gamma) = n^Q(\gamma)$ は、領域 P, Q を構成する基本領域の枚数が等しいことを示すが、これは、2つの領域の面積が等しいことを意味する。また、 γ を構成する要素がひとつの場合、関係式 $n^P(\gamma) = n^Q(\gamma)$ ($\gamma = a, b, c$) は、2つの領域の周長が等しいことを意味する。これら2つの項は、ちょうどワイルの展開の第一項、第二項に相当する。 γ を構成する要素の数が2以上の場合、単純な幾何学的意味づけは見つけにくい、たとえば、基本領域が三角形に限れば、 $n^P(\gamma)$ ($\gamma = ab$) は、辺 a と辺 b に挟まれる角の数を示すなどの対応がある。

以上のアルゴリズムを用いて計算機によって $N = 13$ までの辺彩色グラフの列挙から求めた移植可能な貼り合わせ対の個数を以下の表に示す。

N	$\#U_N$		N	$\#U_N$	
2	3	none	8	450	none
3	3	none	9	1326	none
4	10	none	10	4262	none
5	18	none	11	13566	none
6	57	none	12	44772	none
7	143	7 pairs	13	148577	26 pairs

また、図 5 に、文献 [4] にある等スペクトル対を辺彩色グラフを用いて表示したものであるが、ここでの方法で得られた等スペクトル対は、文献 [4] にあるリストと完全に一致する。

4. 平面ビリヤードの固有値と散乱行列の極との間の双対性

4-1. 平面ビリヤード問題に対する境界要素法

冒頭に述べたように、等スペクトル問題に対する Kac の問いは、その反例の発見によって否定的に解決された。このことは、2次元閉領域の形状は、そのヘルムホルツ方程式の固有値スペクトルだけでは決定されないことを意味する。では、逆にどのような情報があれば、あるいは、何を測定すれば形状は一意に決定されるのだろうか？ この種の逆問題は設定の自由度が大きいため、自明な答えが存在し、自明な問いがいくらでも考えられる。ここでは、物理的に測定可能な量によって、2次元閉領域の形状識別の問題を考えることにする（もちろん、何が物理的に測定可能で何が測定可能でないかも峻別されるものではないが）。

ヒントになるのは、以下で述べる2次元閉領域の内部領域の固有値と外側散乱問題の散乱行列の極との間に成り立つ双対性である。内側・外側問題の双対性については、最近いくつか異なる方向からの研究がなされているが [7, 8, 9, 10]、ここでは、平面ビリヤードを数値的に解く際に有効な境界要素法に現れるフレドホルム行列式から導かれる内側・外側双対性に注目する。そのための準備としてまず、境界要素法についての説明を行う。

平面閉領域 P 内のヘルムホルツ方程式は、

$$(10) \quad \Delta \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in P),$$

である。ここでは、境界条件として以下のディリクレ型

$$(11) \quad \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in \partial P).$$

を考える。(10) を、境界 ∂P 上の密度関数 $\rho(s)$ を用いて以下の積分形

$$(12) \quad \Psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial P} \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}(s); k)}{\partial \nu_s} \rho(s) ds,$$

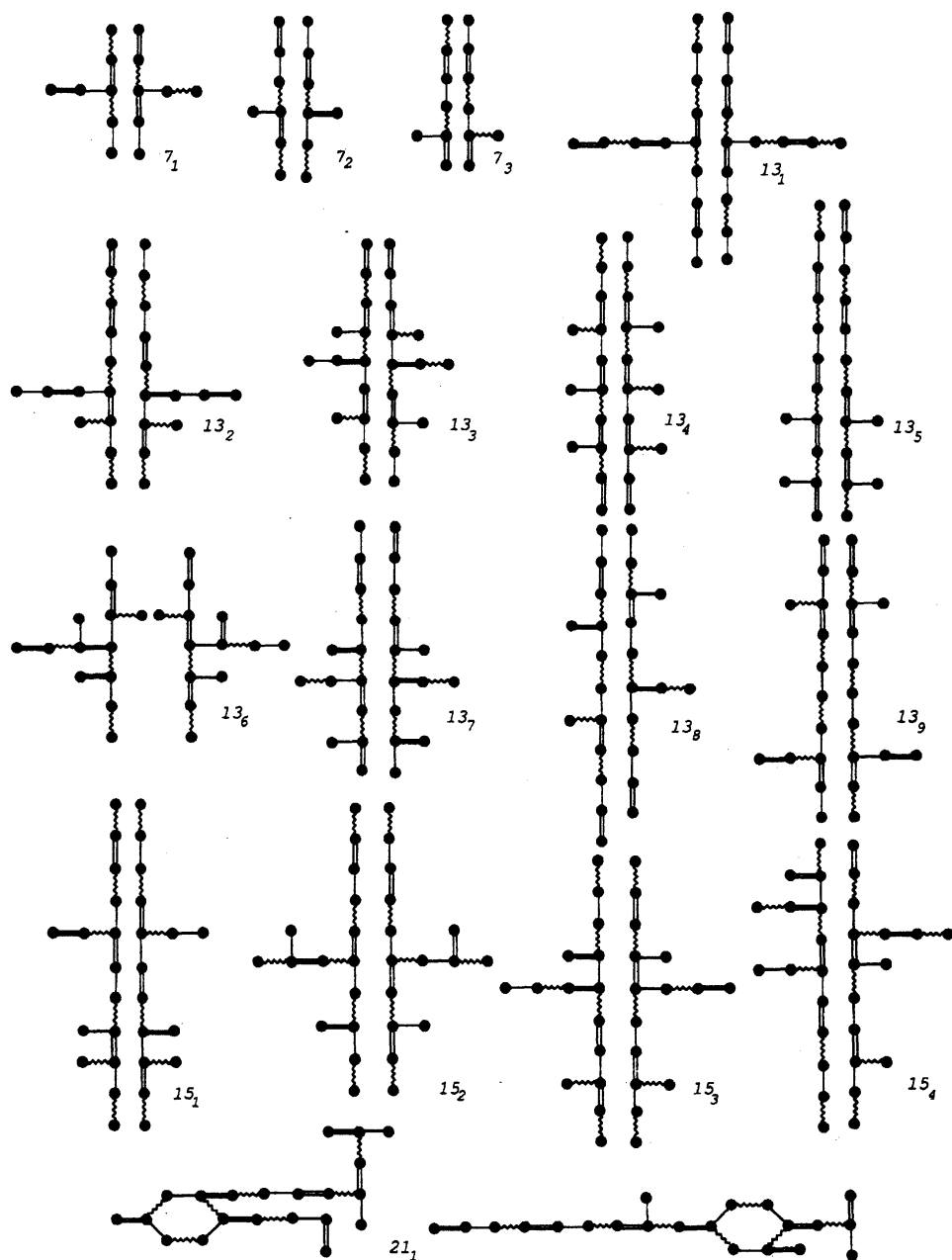


図 4: 文献 [4] にある等スペクトル対を辺彩色グラフを用いて表示したもの. 3 種類の色は, 3 種類の線種 (実線, ジグザグ, 2 重) で表現した. また, ループ部分は省略してある.

で表すと、境界条件 (11) は以下の積分方程式として表すことができる：

$$(13) \quad \rho(t) - \int_{\partial P} K(t, s; k) \rho(s) ds = 0,$$

$$(14) \quad K(t, s; k) := -2 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(s); k)}{\partial \nu_s},$$

ここで、 ν_s は、境界上の点 s (s は、境界に沿って測った座標) での外向き法線単位ベクトル、 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は 2 次元上の自由グリーン関数である。具体的には、

$$(15) \quad G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) := -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|).$$

さて、以下では境界の形を C^2 級であると仮定すると、 $K(t, t; k) = -\kappa(t)/2\pi$ 、とおくことにより、積分核 K は、 $\partial P \times \partial P$ に拡張される。ここで $\kappa(t)$ は、 $\mathbf{r}(t)$ での境界の曲率である。フレドホルム理論より、境界条件 (11) のもとでのヘルムホルツ方程式 (10) の固有値は、以下のフレドホルム行列式のゼロ点として与えられる：

$$(16) \quad d(k) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} d_j(k),$$

ここで、

$$(17) \quad d_j(k) := \frac{(-1)^j}{j!} \int_{\partial P} ds_1 \cdots \int_{\partial P} ds_j \begin{vmatrix} K(s_1, s_1; k) & \cdots & K(s_1, s_j; k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(s_n, s_1; k) & \cdots & K(s_n, s_j; k) \end{vmatrix}.$$

さらに、フレドホルム行列式 $d(E)$ は、ディリクレ境界条件を課した内側の領域の固有値スペクトルと、ノイマン境界条件を課した外側散乱問題の散乱極によって以下のように完全に決定される [9]：

$$(18) \quad d(E) = d(0) d_{int}(E) d_{ext}(E),$$

ただし、 $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ 。ここで、 $d_{int}(E)$ は以下の Hadamard 分解をもつ。

$$(19) \quad d_{int}(E) = e^{i \frac{m|P|E}{2\hbar^2}} \left(\frac{m|\partial P|E}{2\hbar^2} \right)^{-\frac{m|P|E}{2\pi\hbar^2}} e^{-\frac{m|P|\gamma'E}{\pi\hbar^2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{E}{E_n} \right) e^{\frac{E}{E_n}},$$

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、内側ディリクレ境界問題の固有値である。 $|\partial P|$ 、 $|P|$ は、領域 P の全周長、面積を表し、 γ' は、境界 ∂P の形状から決まる定数である。一方、 $d_{ext}(E)$ の方は、その第 2 リーマン面への解析接続が、外側に対してノイマン境界条件を課した散乱問題に対する S-行列を用いて以下のように表される：

$$(20) \quad d_{ext}^{II}(E) = e^{-i \frac{m|P|E}{\hbar^2}} \frac{d_{ext}(E)}{\det S^{II}(E)}.$$

ここで、 S^{II} は、 S -行列の第2リーマン面への解析接続である。エネルギー E の第2リーマン面は、波数 k の下半面に対応する。この表式から、フレドホルム行列式 $d(k)$ は、内側ディリクレ境界条件の固有値のみならず、外側ノイマン境界条件の散乱極の情報をもっていることがわかる。この事実は、スペクトルの逆問題の観点から示唆的である。なぜならば、たとえ内側の固有値問題が等スペクトルであったとしても、外側問題の散乱極の情報に形状の違いが反映される可能性があるからである。外側問題の散乱極は物理的にも観測可能な対象物であるので逆問題の設定としても妥当であろう。

4-2. 角がある場合の境界要素法とその正則化

前半で示したように、Kac の等スペクトル問題の反例は、基本領域の貼り合わせから作られる。従って、必然的に境界には角が現れてします。一方、フレドホルム理論がそのまま適用できるのは、上で触れたように境界の形が C^2 級のときである。境界に角がある場合には、積分核 $K(t, s; k)$ は、角の近傍で $|r(s) - r(t)|^{-1}$ のように振る舞うため、積分方程式 (13) は特異的になり、その結果、無限和 (16) は収束しなくなる。従って、このままでは、先の内側・外側分解が成立するか否かは保証されていないことにある。たとえ境界に角が存在したとしても、「外側ノイマン境界問題の散乱極によって等スペクトル領域は区別できるか？」という問い自身は依然として意味があることは言うまでもないが、

ここでは詳しく説明しないが、実は、境界に角が存在する場合でも、以下のような正則化の手続きを踏むことによってフレドホルム行列式を定義しなおすことができ、それを使って上記で示した表式と本質的に同じ内側・外側分解を得ることができる [11]。ここでは、その概略だけを示す。

まず、積分方程式 (13) を離散的にしたもの

$$(21) \quad \rho_i - \sum_{j=1}^n w_j K_{ij}(k) \rho_j = 0,$$

を考え、この線型方程式に対する行列式

$$(22) \quad d^{(n)}(k) = \det(\delta_{ij} - w_j K_{ij}(k)),$$

を考える。ここで、 $K_{ij}(k) := K(t_i, t_j; k)$ である。 n は境界の分点数で、 w_j は、境界上の点 $r(t_j)$ での重み因子である。滑らかな境界をもつ場合には、 $t_j = |\partial P|j/n$ 、 $w_j = |\partial P|/n$ と取ることによって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d^{(n)}(k) = d(k)$ となる。一方、境界に角が存在する場合には、図5に見るように、 k によらず $d^{(n)}(k)$ は n の関数としてゼロに収束してしまう [12]。しかしながら、都合が良いことに、 $d^{(n)}(k)$ がゼロに収束する速さは k に因らない、つまり一様にゼロに近づくことが数値的に観察される [12]。このことを利用して以下のような正則化した行列式

$$(23) \quad \tilde{d}^{(n)}(k) := \frac{d^{(n)}(k)}{d^{(n)}(0)}.$$

を導入すると、この $\tilde{d}^{(n)}(k)$ は n に対して収束することが確認される。実際、この正則化の方法が正当なものであることは厳密に証明することができる [11]。具体的には、積分核 $K(s, t; k)$ を特異部分と非特異部分とに分けることにより、そのままでは特異的であった積分方程式を

$$(24) \quad \rho - (I - K_s)^{-1} K_r(k) \rho = 0$$

とすることで非特異な積分方程式に変換する。この積分方程式のフレドホルム行列式を $D(k)$ と書くと、

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}^{(n)}(k) = \frac{D(k)}{D(0)}.$$

であることが示される。

4-3. 等スペクトル領域の散乱極

以上の議論から、しかるべき正則化のもとでは境界に角がある場合でも、従って、Kac の問題の反例として出てくる等スペクトル領域対についてもフレドホルム行列式は意味を持つことがわかる。このことを踏まえ、前半で検討した等スペクトル領域対のそれぞれに対してフレドホルム行列式を計算し、果たして外側の散乱問題の情報によって形状が区別できるか否かを見てみる。

図 5 には以下のような等スペクトル領域対の例についての計算結果が示されている。一番上の対は、基本領域の枚数がもっとも少ない $N = 7$ の例で、基本領域を直角三角形に取っている。前半部分で述べたように、等スペクトルになるか否かは基本領域のつながり方（辺彩色グラフ）のみで決まるので、基本領域の形はどう変形しても構わない。二番目の対は、一番上の対と同じ辺彩色グラフをもつ、異なった基本領域の形状をもつものの例である。三番目は、貼り合わせの枚数は同じであるが、辺彩色グラフが異なるパターンをとった例である。最後の例は、homophonic な対の例である。homophonic な対とは、領域内の特定の点を選ぶと 2 つの領域に対するすべての固有関数の値が等しくなるような対のことである。

すべての例で、複素面上に存在するフレドホルム行列式のゼロ点は異なった位置にあり（数値計算の誤差は各図のドットの半径と同程度）、等スペクトル領域対は、外側の散乱極の情報まで広げてみることにより区別可能なことがわかる。

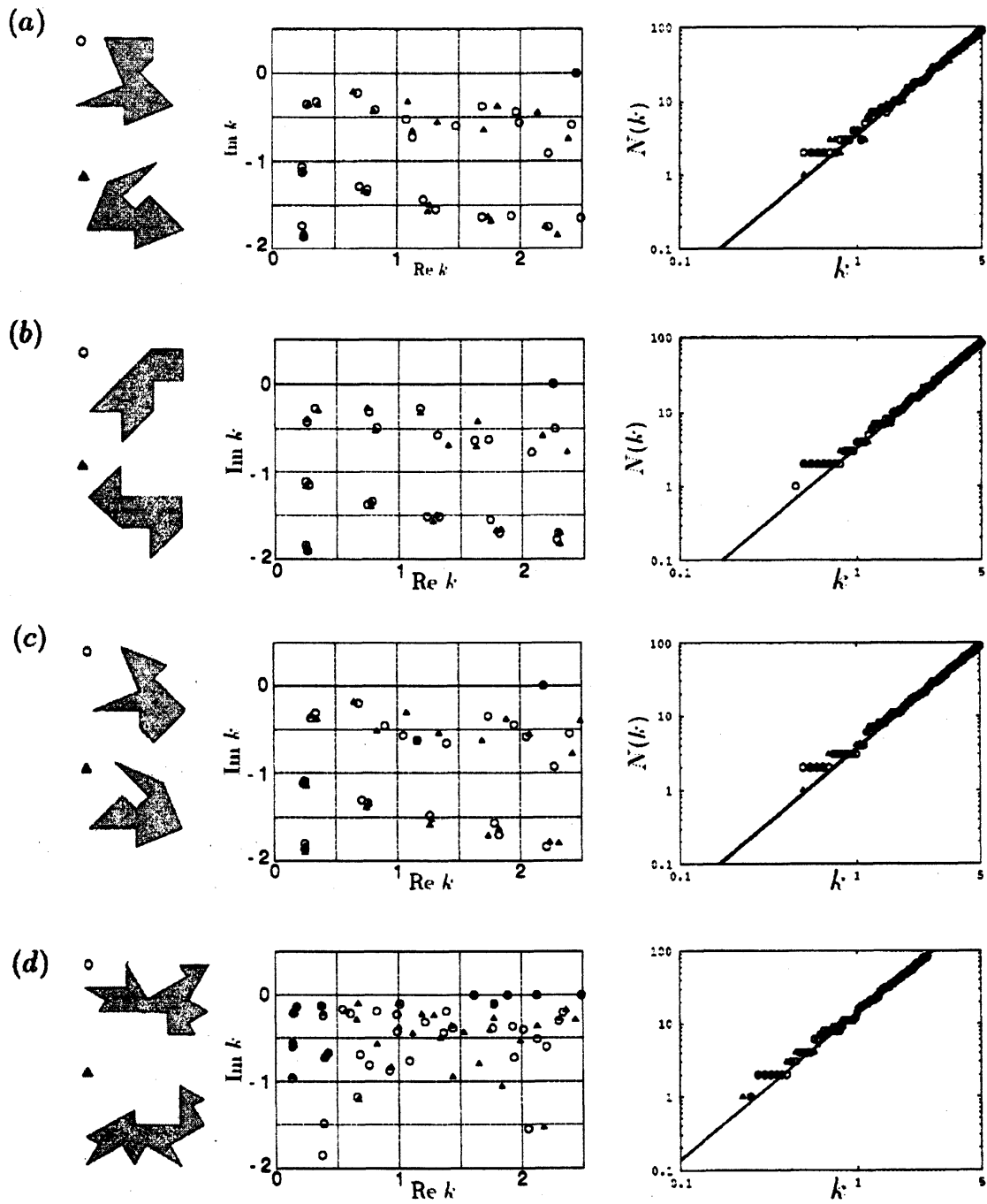


図 5: 右から, それぞれ, 比較した等スペクトル対の形状, $|\tilde{d}_n(k)|$ の極値を k -平面上でプロットしたもの, 共鳴の累積分布 (領域 $\{k' \in \mathbb{C} \mid |k'| < k, -\pi/2 < \arg(k') < -\pi/100\}$ 内に存在する共鳴の数) である.

参考文献

- [1] Kac M 1966 *Amer. Math. Monthly* **73** 1-23.
- [2] Gordon C, Webb D and Wolpert S 1992 *Invent. math.* **110** 1-22.
- [3] Sunada T 1985 *Ann. Math.* **121** 169-86.
- [4] Buser P, Conway J, Doyle P and Semmler K D 1994 *Internat. Math. Res. Notices* **9**
- [5] Okada Y and Shudo A 2001 *J. Phys. A* **34** 5911-22.
- [6] Milnor J 1964 *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **51** 542.
- [7] Berry M.V 1994 *J. Phys. A* **27** L391-98.
- [8] Eckmann J.P and Pillet C.A 1995 *Commun. Math. Phys.* **170** 283-313.
- [9] Tasaki S, Harayama T and Shudo A 1997 *Phys. Rev. E* **56** R13-16.
- [10] Zelditch S 2004 *IMA Volume 137: Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control* C.B. Croke, I. Lasiccka, G. Uhlmann, and M. S.Vogelius eds. (Springer-Verlag, Berlin)
- [11] Okada Y, Shudo A, Tasaki S and Harayama T 2005 *J. Phys. A* **38** 6675-88.
- [12] Okada Y, Shudo A, Tasaki S and Harayama T 2005 *J. Phys. A* **38** L163-L170.