

Topics on Real Enumerative Geometry

石川 剛 郎 (Goo ISHIKAWA)

奈良女子大・理

複素領域上の幾何学と異なり, 実領域上の幾何学では, いわゆる "数え上げ" は, 一般にきれいな形をとらない. それは典型的に, 一変数多項式の零点を求める問題に象徴される. しかし, Strum の定理があり, Mapping degree の理論があり, いまだ説明はされていないが, "実数え上げ幾何" と呼ぶべきものが成立すると思われるふしがある. こんなことを [5] を読みながら考えた. ここでは, "実数え上げ幾何" を形成するとき参考になるような topics を集めてみた.

§1. Legendre 変換の特異点を数える.

$S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^n$ を "generic" な algebraic hypersurface of deg d とする. ここでは generic ということを定義しないが, hypersurfaces 全体の空間の中で proper algebraic set をのぞいたところで以下のことが成立する.

$$PT^*\mathbb{R}P^n = \{ \text{tangent hyperplanes of } \mathbb{R}P^n \},$$

とあくと, よく知られているように $PT^*\mathbb{R}P^n$ には自然に contact

structure が入る. 図式

$$\begin{array}{ccc}
 PT^*\mathbb{RP}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{RP}^{n\vee} \\
 \swarrow j \quad \downarrow \pi & & \\
 S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{RP}^n & &
 \end{array}$$

を考える. ここで π は projection, φ は各 tangent hyperplane に対し対応する $\mathbb{RP}^n$ の hyperplane を対応させる写像, j は, $S_{\mathbb{R}}$ の各点に, その点の $S_{\mathbb{R}}$ の tangent space を対応させる写像である. すると, π, φ は Legendre fibration, j は Legendre immersion となる. $\varphi \circ j(S_{\mathbb{R}}) = S_{\mathbb{R}}^{\vee}$ は $S_{\mathbb{R}}$ の dual あるいは Legendre 変換とよばれる. そこで, Legendre 変換の特異性は, Legendre map $\varphi \circ j$ の特異性としてとられる. たとえば次のような評価を得る:

$$\begin{aligned}
 n=1: \quad \# \text{ cusps of } S_{\mathbb{R}}^{\vee} &\leq 3d(d-2) \\
 &\equiv d \pmod{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n=2: \quad \# \text{ swallow tails of } S_{\mathbb{R}}^{\vee} &\leq 2d(d-2)(11d-24) \\
 &\equiv 0 \pmod{2}.
 \end{aligned}$$

(cf. [6], [1]). このような結果は, 古典的な Plücker 公式と結びつく. また Legendre cobordisms と結びつく. Thom 多項式の具体的な応用とも考えられる.

§2. 実代数関数の特異点を数える.

一般に X, Y を real algebraic manifold とし, $A \subset X \times Y$ を subvariety, すなわち, real algebraic correspondence とする. A を generic としたとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \pi \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

の特異性を調べたい. このとき, 次の様な best possible な評価を得る.

$$(1) \quad X = Y = \mathbb{P}^1 \quad A \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \deg A = (d, r)$$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leq 2(d-1)r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leq 2d(r-1), \end{cases}$$

ここで, $s(\cdot)$ は critical points の個数を表わす.

$$(2) \quad X = \mathbb{P}^2, Y = \mathbb{P}^1 \quad A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \quad \deg A = (d, r)$$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leq 3(d-1)^2 r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leq 3d^2(r-2) \end{cases}$$

ここで, $\kappa(\cdot)$ は cusps の個数.

$$(3) \quad X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, Y = \mathbb{P}^1 \quad A \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \deg A = (d, e, r)$$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leq (6de - 4d - 4e + 4)r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leq 6de(r-2) \end{cases}$$

これらの結果は Hilbert 第16問題の一般化としてとらえ

ることができる。また、この問題でも Thom 多項式の具体的な応用が重要になる。

§3. Hilbert 第16問題の前半 (一般論の主要部)

この問題については、あまり知られていないので、とりわけ重要な結果を挙げておく。

X を 実代数多様体 i.e. (X, τ) , X : compact 複素多様体, $\tau: X \rightarrow X$ conjugation が与えられ、埋め込み $e: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ で $e \circ \tau = \text{conj} \circ e$ となるものが存在するとする。ここで conjugation とは anti-holomorphic な involution のことである。また $\text{conj}: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$ は、複素共役から定義される conjugation を表わす。

$\mathbb{R}X = X_{\mathbb{R}} = X^{\tau} = \{x \in X \mid \tau(x) = x\}$, $X_{\tau} = X/\tau$ とおくと, X^{τ} は C^{∞} submanifold, $\dim_{\mathbb{R}} X^{\tau} = \dim_{\mathbb{C}} X$, (又は $X^{\tau} = \emptyset$). $\dim X = 1$ ならば X_{τ} は境界付"実曲面", $\dim X = 2$ ならば X_{τ} は closed 4-mfld, 一般に X_{τ} は orbifold となる。

$$P_t(X, K) = \sum_i \dim H_i(X; K) t^i \quad (K: \text{体})$$

$$\chi(X) = P_{-1}(X; K) \quad (\text{Euler 標数})$$

とおく。 X^{τ} のベッチ数の評価が次のように得られる。

Theorem (Harnack-Thom)

$$P_i(X^{\tau}; \mathbb{Z}/2) \leq P_i(X; \mathbb{Z}/2)$$

(等号成立のとき, (X, τ) を M-多様体 とする)

Theorem. (Petrovskii - Oleinik - Kharlamov) $\dim_{\mathbb{C}} X = 2n$ のとき,

$$|\chi(X^{\tau}) - 1| \leq h^{n,n}(X) - 1$$

ここで, $h^{n,n}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \{ \text{harmonic } (n,n)\text{-forms} \}$.

さらに, M-多様体の重要な性質として

$$(1) \quad \tau_*: H_*(X; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2, \quad \tau_* = \text{id}$$

$$(2) \quad \chi(X^{\tau}) \equiv \sigma(X) \pmod{16}$$

ここで $\sigma(X)$ は X の signature である.

M-多様体の典型的なものは, (P^n, conj) である.

M-curve に対し, $X^{\tau} \cong S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ ($g(X)+1$),

$$X^{\tau} \cong \text{図}$$


となる. X が M-surface のとき, $X^{\tau} \cong S^4$ となるか, というのは, 大きな問題に思える. この方面での未解決問題としては

他に, Ragsdale - Viro 予想 「 X : 1-connected, $\dim X = 2 \Rightarrow$

$$\dim H_1(X^{\tau}; \mathbb{Z}/2) \leq h^{1,1}(X)$$

」 がある.

§4. 実代数関数の特異点を数える. (つづき)

いま, M-多様体の構成問題を取りあげてみる. $X^1 \subset P^2$

$\deg X = d$ に対しては Harnack (1876), $X^2 \subset P^3$, $\deg X = d$ に対し

ては, Viro (1979) が示した. $X^1 \subset P^1 \times P^1$ $\deg X = (d, r)$ に対しては答

易である. $X^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ に関しては次に述べることにより構成される.

いま, $A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, $\deg A = (d, r)$ に対し, 次数 (d, r) を制限したとき, A の種々の不変量がどんな制約を受けるか? ということをとりあける. 図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

について, A は平面曲線族 $\{\pi\varphi^{-1}[L;\mu]\}_{[L;\mu] \in \mathbb{P}^1}$ と思える. このとき φ の (real) crit. pt. = curve の (real) sing. pt., π の (real) cusp pt. = envelope の (real) cusp pt. が成立する.

Theorem $A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, $\deg A = (d, r)$, 一般の位置, $\mathbb{R}$ 上 def. に対し 次の best possible な一様評価がある;

$$\begin{cases} P_1(\mathbb{R}A; \mathbb{P}/2) \leq 3 + d^2 + 3(d-1)^2(r-1) & (r \geq 1) \\ \Delta(\mathbb{R}\varphi) \leq 3(d-1)^2r & (r \geq 1) \\ \kappa(\mathbb{R}\pi) \leq 3d^2(r-2) & (r \geq 2) \end{cases}$$

一般に, $A \subset X \times \mathbb{P}^1$ を, X 上の line bundle L に対し, $P^*L \otimes P_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r))$ への "transverse" な section の零点集合とすると,

$$\begin{cases} P_1(\mathbb{R}A; \mathbb{P}/2) \leq P_1(A; \mathbb{P}/2) = (3r-2)C_1(L)^2 - (2r-2)C_1(L)C_1(TX) + rC_2(TX) \\ \Delta(\mathbb{R}\varphi) \leq \Delta(\varphi) = r(3C_1(L)^2 - 2C_1(L)C_1(TX) + C_2(TX)) \\ \kappa(\mathbb{R}\pi) \leq \kappa(\pi) = 3(r-2)C_1(L)^2 \end{cases}$$

が成立する. ここで $c_i(\cdot)$ は Chern class.

この計算は Thom 多項式の具体的な適用に F 得られる.

§5 Thom 多項式を使って数える.

$\Sigma \subset J^k(n, p)$ を座標変換で不変な algebraic set とする.

$f: X \rightarrow Y$ に対し, $j^k f: X \rightarrow J^k(X, Y) \supset \Sigma(X, Y)$ を考え,

$\Sigma f = j^k f^{-1}(\Sigma(X, Y))$ とおく. このとき, $j^k f$ が Σ に transverse なら

ば, Σf の Poincaré dual in $X = P(c(TX), f^*c(TY))$ と書ける.

ここで重要なのは多項式 P が Σ にのみ F することである. 多項式

P を Thom 多項式 と F ぶ.

Thom 多項式の具体的な応用は, 次の F うな Process を通い

て行なう. X を $P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_s}$ の submanifold とし, $f: X \rightarrow Y$

で, 簡単のため $\text{codim } \Sigma = \dim X$ とする. このとき $j^k f$ が Σ

ならば Σf は有限集合である;

$$\# \Sigma f = \langle 1, [\Sigma f] \rangle = \langle P, [X] \rangle.$$

多くの問題では, $P = i^* \alpha$, $\alpha \in H^*(P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_s})$, $i: X \hookrightarrow$

$P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_s}$ と表わすことがで F ぶ. $i^*[X]$ の Poincaré dual を β と

おけば, したがって,

$$\# \Sigma f = \langle i^* \alpha, [X] \rangle = \langle \alpha, i_* [X] \rangle$$

$$= \langle \alpha \beta, [P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_s}] \rangle = \int_{P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_s}} \alpha \beta$$

Thom 多項式については, Postens, Ronga, Gaffney, Ando 等の仕事がある.

§6. Mapping degree を使って教える.

まず言及すべきは、代数方程式の解の分岐を、Mapping degree の言葉で記述する Fukuda, Aoki, Sumi, Nishimura 等の理論 (cf. [6]) である。それについては、他に解説があると思う。ここでは、Mapping degree を使って、generic singularity を perturb したとき得られる cusps を教える話 ([4]) の1つ。

$f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ を "generic" な singularity とする。 f を perturb することにより multi-stable な $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をうる。もともと f は 0 以外では stable だから perturbation は 0 の十分小さな近傍上に support をもつようにできるが、このとき、 f の cusp (i.e. $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$ at 0 と equivalent) の個数は、もともとの f からどのような制約を受けるだろうか？

Theorem ([4]) $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ を generic な map-germ $\tilde{f}: \tilde{D}^2 \rightarrow D_\delta^2$, ($\tilde{D}^2 = f^{-1}(D_\delta^2) \cap D_\varepsilon^2$; $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$) を f の stable な perturbation とする。このとき、

$$\pi_1(\tilde{f}) \equiv 1 + \frac{1}{2} (C(f) \text{ の branch の個数}) + \deg f \pmod{2}.$$

ここで注意したいのは、 $C(f)$ は f の Jacobian determinant $Jf: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ の零点集合であり、その branch の個数は、前出の Fukuda Aoki-Sumi-Nishimura により、やはり degree の言葉で記述できることである。

この考察は、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^l, 0 & \xleftarrow{F} & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}, 0 \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}, 0 \\ & & \downarrow p_1 \\ & & \mathbb{R}^2, 0 \end{array}$$

に対しても適用できる。すなわち、 F を defining equation と考え、variety $A = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}$ を考える。generic には、 F は isol. sing. であり、 $\pi = p_1|_A : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、0 以外で multi-stable となる。 F を perturb して、 $\tilde{A} = \tilde{F}^{-1}(0)$ が non-singular $\tilde{\pi} = p_1|_{\tilde{A}}$ が multi-stable とできる。また、perturbation の support は好きなだけ小さくとれる。 $\tilde{\pi} : M \rightarrow D_{\mathbb{R}}^2$; $M = D_{\mathbb{R}}^{l+1} \cap \tilde{\pi}^{-1}(D_{\mathbb{R}}^2)$ に対し次が成立する。

$$k(\tilde{\pi}) \equiv_{(2)} \#(\text{comp. of } \partial M) + \frac{1}{2} \#(\text{branches of } C(\pi)) + \deg \pi.$$

先の場合、 $M \cong D^2$ である。

証明は、Quine [8] の結果による。(この振張は、牟屋周氏により示唆された)

§7 $Q(f)$ を使って数える。

Eisenbud-Levine [5] の定理が出発点である。

$$f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0 \quad C^\infty \text{ map-germ}, \quad Q(f) = \mathbb{E}_n / \langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

とおく。 $\dim_{\mathbb{R}} Q(f) < +\infty$ のとき、

$$|\deg f| = \dim_{\mathbb{R}} Q(f) - 2 \dim_{\mathbb{R}} I.$$

ここで、 I は $I^2 = 0$ をみたす $Q(f)$ の ideal のうち極大なもの。

これは、 $\deg f = \text{sign} \langle, \rangle_\varphi$ という記述から導かれる

3. ここで, $\langle, \rangle_\varphi: Q(f) \times Q(f) \rightarrow \mathbb{R}$ は, functional $\varphi: Q(f) \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(h) > 0$ なるものに対し, $\langle h, k \rangle_\varphi = \langle h, k \rangle_\varphi$ により定義される signature $\langle, \rangle_\varphi$ は φ に依存しない。

Mapping degree により記述される invariants は, したがって, 種々の f の algebra $Q(f)$ により記述される。

最後に福田拓生氏による問題を挙げておく。

「 $f: \mathbb{R}^{n,0} \rightarrow \mathbb{R}^{p,0}$ の topological invariants を $Q(f)$ から絞り出せ」

以上

References

- [1] V.I. Arnol'd, Singularities of systems of rays, Russ. Math. Surveys 38-2(1983), 87-176.
- [2] D. Eisenbud, H.I. Levine, An algebraic formula for the degree of a C^∞ -map-germ, Ann. of Math., 106(1977), 19-38.
- [3] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable mappings II, Tokyo J. of Math., 8-2(1985), 501-520.
- [4] T. Fukuda, G. Ishikawa, On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity, preprint.
- [5] S.L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, in Real and Complex Singularities, ed. by P. Holm, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1977.
- [6] V.S. Kulikov, the calculation of the singularities of the embedding of a generic algebraic surface in the projective space $\mathbb{P}^3$, Funct. Anal. Appl., 17(1983), 176-186.
- [7] T. Nishimura, T. Fukuda, K. Aoki, An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams,
- [8] J.R. Quine, A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 236(1978), 307-314.