

有限回連続微分可能関数空間族の位相同型問題 *

東京理科大学理工学部情報科学科 明石重男

1 序 節

1900 年のパリにおける国際数学会議で、Hilbert により提唱された「数学の将来を方向付ける 23 の問題」の中のひとつである第 13 問題は多変数関数の重ね合わせ表現問題として知られ、約 50 年後に Kolmogorov と Arnold によって、

「どのような多変数同時連続関数も、いくつかの 1 変数連続関数と和演算とを合成することにより表現される。」

という形で解決された。さらに殆ど同じ時期に、「多変数同時連続関数族」を「多変数有限回連続微分可能関数族」で置き換えた重ね合わせ表現問題も Vituskin によって解決されている。このような一連の問題を解決するために用いられた ε -エントロピーの手法は、単に「重ねあわせ表現問題」だけでなく「同型問題」にも応用することが可能である。

本稿では、Kolmogorov により示された「多変数解析関数族の同型問題」による手法と、Vituskin による「多変数有限回微分可能関数の重ね合わせ表現問題」を組み合わせることにより、「多変数有限回連続微分可能関数族の同型問題」に関する結果を紹介することを目的とする。

2 多変数有限回連続微分可能関数族の ε -エントロピー

(X, d) を距離空間、 A を X の部分集合とする。 ε を任意の正数として、 $N_\varepsilon(A)$ により、集合 A を被覆するために必要となる半径 ε の開球の最小個数を表すことにしたとき、

$$S_\varepsilon(A) \stackrel{\text{def}}{=} \log N_\varepsilon(A)$$

によって定義される値 $S_\varepsilon(A)$ を距離空間 (X, d) における部分集合 A の ε -エントロピーと定義する。 $n, q \in \mathbb{N}$, $c > 0$ を任意に選ぶ。このとき、 $[0, 1]^n$ 上で定義された実数値関数 f が q 回までの偏微分係数に関する有界条件を満たす。すなわち、任意の $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ に対して、

$$\left| \frac{\partial^k f(x_1, \dots, x_n)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} \right| \leq c, \quad 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k, \quad 0 \leq k \leq q$$

を満たすことを仮定する。さらに、偏微分係数に関する有界条件を満たす関数の全体、すなわち q 回連続微分可能な n 変数関数で第 0 次から第 q 次までの導関数がある有界であるような関数の全体

*2000 Mathematics Subject Classification. Primary 94A17.

を $W_q^n([0, 1]^n, c)$ と書く。このとき、次の不等式が成り立つ。

定理 1. (Kolmogorov-Vituskin の不等式)

$\frac{1}{n^q} > \varepsilon_0 > 0$ を満たす十分小さい ε_0 に対して、

$$b \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n}{q}} \leq S_\varepsilon \left(W_q^n([0, 1]^n, c) \right) \leq B \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n}{q}} \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

が成り立つ。ここで b, B は共に ε に無関係な正定数である。

証明. 上からの評価式が成り立つことを示す。 n 次元立方体 $[0, 1]^n$ を 1 辺 $\varepsilon^{\frac{1}{q}}$ の n 次元小立方体に分割し、作製される小立方体の頂点の族を

$$\vec{u}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n}), \quad i = 1, \dots, \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}} + 1 \right)^n$$

と書く。いま、 $f \in W_q^n([0, 1]^n, c)$ に対して、Taylor 展開を施して、

$$f(\vec{u}_i + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\vec{u}_i) + \frac{1}{q!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^q f(\vec{\xi})$$

が得られたとする。ただし、 $\vec{\xi}$ は、 $\vec{u}_i \leq \vec{\xi} \leq \vec{u}_i + \vec{h}$ を満たすあるベクトルとする。ここで関数 f を、ある n 次元小立方体 $\vec{u}_i + [0, \varepsilon^{\frac{1}{q}}]^n$ 上で精度 ε で近似するためには、 $\{\partial^{\vec{\alpha}} f / \partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n; |\vec{\alpha}| = k, 0 \leq k \leq q\}$ の各微係数を精度 $\varepsilon / e^{n\varepsilon^{\frac{1}{q}}}$ で近似すれば十分である。そこで、

$$p_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^q \sum_{|\vec{\alpha}|=k} \frac{a_{\vec{\alpha}}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}; a_{\vec{\alpha}} = \frac{\varepsilon i}{e^{n\varepsilon^{\frac{1}{q}}}}, i \in \mathbb{Z}, |a_{\vec{\alpha}}| \leq c, |\vec{\alpha}| \leq q \right\}$$

と定義したとき、任意の $f \in W_q^n([0, 1]^n, c)$ 、および任意の n 次元小立方体 $\vec{u}_i + [0, \varepsilon^{\frac{1}{q}}]^n$ に対して、 p_ε の要素をうまく選ぶと

$$\begin{aligned} & \sup_{\vec{h} \in [0, \varepsilon^{\frac{1}{q}}]^n} \left| f(\vec{u}_i + \vec{h}) - \left[\sum_{k=0}^q \sum_{|\vec{\alpha}|=k} \frac{a_{\vec{\alpha}}(f)}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \right] \right| \\ & \leq \sup_{\vec{h} \in [0, \varepsilon^{\frac{1}{q}}]^n} \sum_{k=0}^q \sum_{|\vec{\alpha}|=k} \left| \frac{h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^k f(\vec{u})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} - a_{\vec{\alpha}}(f) \right) \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \left[\frac{\varepsilon}{\exp(n\varepsilon^{\frac{1}{q}})} \right] \left\{ \sum_{|\vec{\alpha}|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \varepsilon^{\frac{\alpha_1}{q}} \dots \varepsilon^{\frac{\alpha_n}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{\varepsilon}{\exp(n\varepsilon^{\frac{1}{q}})} \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} (n\varepsilon^{\frac{1}{q}})^k \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立ち、 p_ε の要素を用いると、小立方体 $\vec{u}_i + [0, \varepsilon^{\frac{1}{q}}]^n$ 上で精度 ε で近似可能であることが

分かる。従って、 $[0, 1]^n$ を分割する n 次元小立方体の族：

$$\left\{ \vec{u}_i + [0, \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}]^n; i = 1, \dots, \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{q}}} \right\}$$

を構成する要素ごとに精度 ε で近似する多項式を ρ_ε の中から選ぶと、 f は n 次元立方体 $[0, 1]^n$ 上で、多項式を連結して構成される関数によって精度 ε で近似される。ここで ε を十分小さい正数としたとき、 f を $\vec{u}_i + [0, \varepsilon^{\frac{1}{q}}]^n$ 上で精度 ε で近似するために必要となる ρ_ε の個数は、上から

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^q \prod_{|\vec{\alpha}|=k} \left[\frac{2c}{\frac{\varepsilon}{e^{n\varepsilon^{\frac{1}{q}}}}} + 1 \right] &\leq \prod_{k=0}^q \left(\frac{2ce^{n\varepsilon^{\frac{1}{q}}}}{\varepsilon} + 1 \right)^{n^k} \\ &\leq \left(\frac{2ce^{n\varepsilon^{\frac{1}{q}}}}{\varepsilon} + 1 \right)^{\frac{n^{q+1}-1}{n-1}} \\ &\leq \left(\frac{2ce}{\varepsilon} + 1 \right)^{\frac{n^{q+1}-1}{n-1}} \end{aligned}$$

と評価される。一方 n 次元立方体 $[0, 1]^n$ を構成する小立方体の個数は $\left\{ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}} \right\}^n$ であるから、上の2式より、 f を $[0, 1]^n$ 上で精度 ε で近似するために必要となる多項式を連結して得られる関数の総数に関する上からの評価は、

$$\left\{ \left(\frac{2ce}{\varepsilon} \right)^{\frac{n^{q+1}-1}{n-1}} \right\}^{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}}$$

で与えられる。したがって、

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(W_q^n([0, 1]^n, c)) &\leq \left(\frac{n^q - 1}{n - 1} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n}{q}} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + \log 2ce \right) \\ &\leq B \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n}{q}} \log \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

を得て、上からの評価式が示された。次に、下からの評価式の成立を示す。

ϕ を $\mathbb{R}^n$ で定義された実数値関数で、以下の3条件を満たすものとする：

$$\begin{aligned} \phi &\in W_q^n(\mathbb{R}^n, c), \\ 0 &\leq \phi(\vec{x}) \leq c = \phi(\vec{0}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \text{supp } \phi &\subset \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2} \right]^n, \end{aligned}$$

ただし、 a はある正数とする。これらの条件を満足する関数 ϕ の存在は明らかである。このとき、十分小さい正数 ε に対して、

$$\phi_\varepsilon(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \phi \left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}} \right), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

で定義される関数 ϕ_ε は次の条件を満たす:

$$\begin{aligned}\phi_\varepsilon &\in W_q^n(\mathbb{R}^n, c), \\ 0 \leq \phi_\varepsilon(\vec{x}) &\leq c\varepsilon = \phi(\vec{0}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \text{supp} \phi_\varepsilon &\subset \left[\frac{-a\varepsilon^{\frac{1}{q}}}{2}, \frac{a\varepsilon^{\frac{1}{q}}}{2} \right]^n.\end{aligned}$$

最初に与えられた n 次元立方体 $[0, 1]^n$ を 1 辺が $a\varepsilon^{\frac{1}{q}}$ である n 次元小立方体に分割する。このとき、分割されてできる小立方体の個数 $M(\varepsilon)$ は下から $\{1/(a\varepsilon^{\frac{1}{q}})\}^n$ と評価される。そこで、各小立方体の重心を

$$\left\{ \vec{v}_i; i = 1, \dots, \left\{ \frac{1}{(a\varepsilon^{\frac{1}{q}})} \right\}^n \right\}$$

と置く。いま、

$$\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{M(\varepsilon)}) \in \{-1, 1\}^{M(\varepsilon)}$$

としたとき、

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon^{\vec{\beta}}(\vec{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \beta_i \phi_\varepsilon(\vec{x} - \vec{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} (\beta_i \varepsilon) \phi\left(\frac{\vec{x} - \vec{v}_i}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}\right)\end{aligned}$$

と定義し、上式で定義される関数の族

$$\left\{ \Phi_\varepsilon^{\vec{\beta}}; \vec{\beta} \in \{-1, 1\}^{M(\varepsilon)} \right\}$$

を作製する。このとき、次の性質が満たされる:

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon^{\vec{\beta}} &\in W_q^n([0, 1]^n, c), \quad \vec{\beta} \in \{-1, 1\}^{M(\varepsilon)}, \\ \left| \left\{ \Phi_\varepsilon^{\vec{\beta}}; \vec{\beta} \in \{-1, 1\}^{M(\varepsilon)} \right\} \right| &= 2^{M(\varepsilon)}, \\ \|\Phi_\varepsilon^{\vec{\beta}} - \Phi_\varepsilon^{\vec{\gamma}}\| &= 2c\varepsilon, \quad \vec{\beta} \neq \vec{\gamma}.\end{aligned}$$

したがって、これらの条件が満たされることは、 $\left\{ \Phi_\varepsilon^{\vec{\beta}}; \vec{\beta} \in \{-1, 1\}^{M(\varepsilon)} \right\}$ が $W_q^n([0, 1]^n, c)$ の中で $c\varepsilon$ -分離集合になっていることを示している。このことから、

$$\begin{aligned}S_{c\varepsilon}(W_q^n([0, 1]^n, c)) &\geq \log 2^{M(\varepsilon)} \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{q}}\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 ε を ε/c で置き換えると

$$S_\varepsilon(W_q^n([0, 1]^n, c)) \geq \left(\frac{1}{a}\right)^n c^{\frac{n}{q}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{q}}$$

が得られ、下からの評価式が示された。 □

3 多変数有限回連続微分可能関数族の同型問題

任意のコンパクト部分集合 V および任意の原点の近傍 U に対して、適当な有限個の点列 $\{x_1, \dots, x_n\}$ を選び、

$$\bigcup_{k=1}^n x_k + \varepsilon U \supset V$$

を成立させることを考える。このとき、 U の平行移動の和集合によって V を被覆するために必要となる点の最小個数、すなわち、上式を満たすために必要となる点列の最小個数を $Cov(V, U)$ で表す。 ϕ を $(0, \infty)$ 上で定義され $[0, \infty)$ に値をとる関数としたとき、任意の有界集合 V および任意の原点の近傍 U に対して、ある適当な正数 $\varepsilon(V, U)$ を選ぶと、

$$\phi(\varepsilon) \geq Cov(V, \varepsilon U), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon(V, U)$$

を成立させることができるとき、 ϕ を (X, τ) の位相的近似次元評価関数と呼ぶ。さらに位相的近似次元評価関数の全体を $\Phi(X)$ もしくは $\Phi(X, \tau)$ で表し、 (X, τ) の位相的近似次元と呼ぶ。

F_q^n を $[0, 1]^n$ 上で定義された q 回連続微分可能な実数値 n 変数関数の全体とする。さらに、 $F_q^n([0, 1]^n)$ 上のノルムを

$$\|f\|_{n,q} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\vec{x} \in [0,1]^n} \sum_{k=0}^q \sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{\partial^k}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} f(\vec{x}) \right|, \quad f \in F_q^n([0, 1]^n)$$

と定義すると、 $(F_q^n([0, 1]^n), \|\cdot\|_{n,q})$ は Banach 空間となることが知られている。これらの結果を用いて、次の定理が示される。以下、 $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ とする。

定理 2.

$m/p < n/q$ が成立するとき、 $F_q^n([0, 1]^n)$ と $F_p^m([0, 1]^m)$ を同型にする位相写像で、両空間の一樣ノルムを同値にするものは存在しない。

証明. $m=2, n=3$ の場合についてのみ証明する。一般の場合も同様にして証明可能である。 $\Phi_p^m([0, 1]^m)$ および $\Phi_q^n([0, 1]^n)$ をそれぞれ Banach 空間 $F_p^m([0, 1]^m, \|\cdot\|_{m,p})$ および $F_q^n([0, 1]^n, \|\cdot\|_{n,q})$ の近似的位相次元とする。以下では、 $F_q^n([0, 1]^n)$ 上で定義され $F_p^m([0, 1]^m)$ に値をとる位相写像 h の存在を仮定して矛盾を導く。任意の正数 c に対して、 $W_q^n([0, 1]^n, c)$ を $[0, 1]^n$ 上で定義された q 回連続微分可能な関数で、第 0 階から第 q 階までの全ての導関数が有界で、その絶対値が定数 c に因って押さえられるものの全体とする。 K を $F_p^m([0, 1]^m)$ の任意のコンパクト部分集合とする。このとき、ある正数 a が存在して、

$$K \subset \{f \in F_p^m([0, 1]^m); \|f\|_{m,p} \leq a\}$$

が成立する。一方、

$$\{f \in F_p^m([0, 1]^m); \|f\|_{m,p} \leq a\} \subset W_p^m([0, 1]^m, a)$$

が成立する。ここで位相写像 h が、 $F_q^n([0, 1]^n)$ および $F_p^m([0, 1]^m)$ 上で定義される一樣ノルムを同値にするという仮定より、ある適当な正定数 k_1, k_2 をうまく選ぶと、

$$k_1 \|f\| \leq \|h(f)\| \leq k_2 \|f\|, \quad f \in F_q^n([0, 1]^n)$$

という不等式が成立する。したがって、定理 1 によりある適当な正数 B が存在して、十分小さな ϵ に対して、

$$S(K, \epsilon) \leq B \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{m}{p}} \log \frac{1}{\epsilon},$$

を成立させることができる。従って、任意の正数 δ に対して

$$d_{\delta}^{m,p}(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{m}{p} + \delta}, \quad \epsilon > 0,$$

と定めたとき、 $d_{\delta}^{m,p}$ は $F_p^m([0, 1]^m)$ の近似的次元評価関数である。ところで、任意の正数 c に対して、 $W_q^n([0, 1]^n, c)$ は $F_q^n([0, 1]^n)$ のコンパクト部分集合であり、さらに、ある適当な正数 ϵ_0 および b が存在して、十分小さな正数 ϵ に対して、

$$b \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{n}{q}} \leq S(W_q^n([0, 1]^n, c), \epsilon),$$

が成り立つ。一方、十分小さい正数 δ に対して、

$$\frac{m}{p} + \delta < \frac{n}{q}$$

を成立させることができるから、このような δ に対しては、 $d_{\delta}^{m,p}$ は $F_q^n([0, 1]^n)$ の近似的次元評価関数とならない。以上の結果より、両 Banach 空間の近似的位相次元が異なることが示されたため、 $(F_q^n([0, 1]^n), \|\cdot\|_{n,q})$ と $(F_p^m([0, 1]^m), \|\cdot\|_{m,p})$ は位相同型とはならない。□

註 1. 近似的位相次元は、与えられた 2 つの線形位相空間の同型問題に関する不変量として知られており、参考文献 [3] に、Kolmogorov の結果である「開領域上で定義された多変数解析関数族にコンパクト開位相を導入して構成される位相空間の同型問題」が具体例として記載されている。

参考文献

1. S. Akashi, A version of Hilbert's 13th problem for analytic functions, The Bulletin of the London Mathematical Society, 35(2003), 8-14.
2. S. Akashi, ϵ -entropy theoretic aspects of homeomorphism problems of analytic function spaces, to appear in Taiwanese Journal of Mathematics.
3. G. G. Lorentz, Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1966.
4. A. N. Kolmogorov, On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of one variable and addition, Dokl., 114(1957), 679-681.
5. A. G. Vitushkin, Some properties of linear superpositions of smooth functions, Dokl., 156(1964), 1003-1006.