

# Foliation の Characteristic class と $r$ -extension.

阪大 理 大和健二

多様体  $M$  上の  $\text{codim } p$  foliation  $(M, \mathcal{F})$  が  $r$ -extendable ( $p > r > 0$ ) とは  $M$  上の  $\text{codim } (p-r)$  foliation  $(M, \bar{\mathcal{F}})$  が存在して,  $\mathcal{F}$  の各 leaf は  $\bar{\mathcal{F}}$  の leaf に含まれる事と定義する.

T. H. Clifton, J. W. Smith [1] は  $r=1$  の時 leaf space に "Euler class" を定義して 1-extendable であるための十分条件を与えようとした.

— R. Moussu [2] は ある条件の下で 1-extendable であるための必要条件を exotic characteristic class によって与えた.

ここでは R. Moussu の結果の一般化について考える.

## §1. Exotic characteristic classes.

ここでは normal bundle trivial な foliation

の exotic characteristic class の定義を述べる (cf. [3] [4]).

$(M, \mathcal{F})$  を  $\text{codim } p$   $C^\infty$ -foliation とする。

一般の場合に exotic characteristic class

$$\lambda_{\mathcal{F}}^* : H^*(WOp) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{R})$$

を定義するのと同様で まず cochain complex  $W_p$  を

$$W_p = \wedge(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_p) \otimes \mathbb{R}[c_1, \dots, c_p] / \{ \deg \varphi \geq p \}$$

$$d\mathfrak{h}_i = c_i, \quad dc_i = 0$$

$$\text{但. } \deg \mathfrak{h}_i = 2i-1, \quad \deg c_i = 2i$$

により 定義し 次に  $\nu(\mathcal{F})$  の basic connection  $\nabla'$  を 1) とする。今  $\nu(\mathcal{F})$  は trivial だから  $\nu(\mathcal{F})$  の global frame  $S = \{s_1, \dots, s_p\}$  によ, て与えられる trivialization  $t: \nu(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}^p$  がある。この時  $\nu(\mathcal{F})$  上の metric connection  $\nabla^0$  として  $\nabla_x^0 s_i \equiv 0, \forall i=1, \dots, p, \forall x \in \mathcal{X}(M)$  なるものがとれる。それで  $\theta_1, \theta_0$  を  $\nabla', \nabla^0$  の connection form とし  $\Omega_t$  を  $\nu(\mathcal{F})$  上の connection  $t\nabla' + (1-t)\nabla^0$  の curvature form とする。この時 準同型写像

$$\lambda_{(\mathcal{F}, t)} : W_p \longrightarrow A^*(M)$$

$$\text{が } \lambda_{(\mathcal{F}, t)}(c_i) = C_i(\Omega_1, \dots, \Omega_i) \in A^{2i}(M)$$

$$\lambda_{(\mathcal{F}, t)}(\mathfrak{h}_i) = i \int_0^1 C_i(\theta_1 - \theta_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \in A^{2i-1}(M)$$

但.  $C_i$  は Chern polynomials

として一般の場合と全く同様に定義できる。その induced map  $\lambda_{(\pi, t)}^* : H^*(W_p) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{R})$  の像が normal bundle trivial の場合の exotic characteristic class である。もちろん これは  $\pi$  と  $t$  にはみ依存する。

## §2. 定理

$(M, \pi)$  を  $\text{codim } p$   $C^\infty$ -foliation とする。

記号.  $a > b$  に  $\bar{x}$  として 準同型写像

$$f_{a,b} : WO_a \longrightarrow WO_b \quad (\text{又は } W_a \longrightarrow W_b)$$

$$f_{a,b}(c_i) = \begin{cases} c_i, & i \leq b \\ 0, & i > b \end{cases} \quad f_{a,b}(\bar{c}_i) = \begin{cases} \bar{c}_i, & i \leq b \\ 0, & i > b \end{cases}$$

なるものとして定義し  $O_{p,r} \subset H^*(WO_p)$  (又は  $H^*(W_p)$ ) を

$$O_{p,r} = \text{Im } f_{p+r,p}^* \cap \text{Ker } f_{p,p-r}^*$$

と置く。また  $j_p : WO_p \longrightarrow W_p$  は自然な包含写像とする。

### 定理 A.

$(M, \pi)$  が  $C^\infty$ -foliation に 1-extendable

$\square \Rightarrow \forall \omega \in O_{p,1} \subset H^*(WO_p)$  に  $\bar{x}$  として

$$\lambda_{\pi}^*(\omega) = 0 \in H^*(M; \mathbb{R})$$

定理 B.  $\nu(\pi)$  が trivial の時,

$(M, \pi)$  が normal bundle trivial な  $C^\infty$ -foliation

に  $r$ -extendable

$$\Rightarrow \forall \omega \in O_{p,r} \cap \text{Im } j_p^* \subset H^*(W_p) \text{ に対して}$$

$$\lambda_{(\bar{\pi}, t)}^*(\omega) = 0 \in H^*(M; \mathbb{R}).$$

==>  $t: D(\bar{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}^p$  は trivialization.

注意 1. 次の事はすぐ判る。

$$[a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_n} \otimes c_{i_1} \dots c_{i_m}] \in O_{p,r}$$

$$\Leftrightarrow (1) \forall j_n \quad j_n + i_1 + \dots + i_m > p+r$$

$$\text{かつ (2)} \exists j_n \quad j_n > p-r \text{ 又は } i_1 + \dots + i_m > p-r$$

また  $O_{p,r}$  は 上の様な cohomology class で生成される。

注意 2. 定理 B で  $(M, \bar{\pi})$  が  $(M, \bar{\pi})$  に  $r$ -extendable したとし さらに  $D(\bar{\pi})$  の trivialization  $\bar{t}: D(\bar{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}^{p-r}$  が  $\bar{t} = t|_{D(\bar{\pi})}$  なるようにとれると仮定すれば  $\forall \omega \in O_{p,r}$  に対して  $\lambda_{(\bar{\pi}, t)}^*(\omega) = 0$  が判る。これが  $r=1$  の場合に R. Moussu の結果を言っている。

また 上の時 generalized Godbillon-Vey class  $\omega = [a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p \otimes c^p] \in H^*(W_p)$  について  $\omega \notin O_{p,r}$  だけど  $\lambda_{(\bar{\pi}, t)}^*(\omega) = 0$  は判る。

§3. 定理の証明.

定理 A も B も 証明は同様であるので 定理 B を示す。

今  $\text{codim } p$   $C^m$ -foliation  $(M, \mathcal{F})$  が  $C^m$ -foliation  $(M, \bar{\mathcal{F}})$  に  $r$ -extendable であるとし  $t: \nu(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}^p$   
 $\bar{t}: \nu(\bar{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbb{R}^{p-r}$  を各々の trivialization とする。

(I)  $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\bar{\mathcal{F}}) \oplus \tilde{\nu}$  とかける。

$\nabla^0$  (resp.  $\bar{\nabla}^0$ ) を  $\mathbb{R}^1$  におけるように trivialization  $t$  (resp.  $\bar{t}$ ) によつて一意に決まる  $\nu(\mathcal{F})$  (resp.  $\nu(\bar{\mathcal{F}})$ ) 上の metric connection とする。  $\tilde{\nabla}^0$  を  $\tilde{\nu}$  上の metric connection とすれば  $\nu(\mathcal{F})$  上に  $\nabla^0 = \bar{\nabla}^0 \oplus \tilde{\nabla}^0$  なる  $\nu$  の metric connection が定義される。

また,  $\bar{\nabla}^1$  を  $\nu(\bar{\mathcal{F}})$  上の basic connection とする時  $(M, \mathcal{F})$  が  $(M, \bar{\mathcal{F}})$  に  $r$ -extendable である事より  $\nu(\mathcal{F})$  上の basic connection  $\nabla^1$  として

$$(i) \nabla_x^1 \gamma - \bar{\nabla}_x^1 \gamma \in \Gamma(\tilde{\nu}), \quad x \in \mathfrak{X}(M), \gamma \in \Gamma(\nu(\bar{\mathcal{F}}))$$

$$(ii) \nabla_x^1 \gamma \in \Gamma(\tilde{\nu}), \quad x \in \mathfrak{X}(M), \gamma \in \Gamma(\tilde{\nu})$$

をみたすものがとれる。(ii)より  $\tilde{\nu}$  上の connection が得られる それを  $\tilde{\nabla}^1$  とかく。

今  $\nu(\mathcal{F})$  の local frame  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_p\}$  を  $\{s_1, \dots, s_{p-r}\}$  は  $\nu(\bar{\mathcal{F}})$  の,  $\{s_{p-r+1}, \dots, s_p\}$  は  $\tilde{\nu}$  の local frame であるようにとる。これによつて表わされる上の connections の connection form を順に  $\theta_0, \bar{\theta}_0, \tilde{\theta}_0, \theta'_0, \bar{\theta}_1, \theta_1, \tilde{\theta}_1$  とかけば次が成立す

る。

$$(3.1) \quad \theta'_0 = \left( \begin{array}{c|c} \bar{\theta}_0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\theta}_0 \end{array} \right) \quad \theta_1 = \left( \begin{array}{c|c} \bar{\theta}_1 & * \\ \hline 0 & \tilde{\theta}_1 \end{array} \right)$$

(注) 定理Bの注意2のように  $\bar{t} = t|_{\nu(\bar{\tau})}$  なる条件があれば  $\nabla^0 = \nabla^{0'}$  と出来て  $\theta_0 = \theta'_0$  となる。

(II)  $\omega \in W_p$  (resp.  $W_{p-r}$ ) に対して  $\lambda_{(\bar{\tau}, t)}(\omega)$  (resp.  $\lambda_{(\bar{\tau}, \bar{t})}(\omega)$ ) を  $\omega(\bar{\tau})$  (resp.  $\omega(\bar{\tau})$ ) と書く。また,  $\Omega'_t$  を  $\nu(\bar{\tau})$  上の connection  $t\nabla' + (1-t)\nabla^{0'}$  の curvature form とし

$$h'_i(\bar{\tau}) = i \int_0^1 C_i(\theta_1 - \theta'_0, \Omega'_t, \dots, \Omega'_t) dt$$

とおく。但、 $C_i$  は Chern polynomial である。

$$\frac{d}{dt} C_i(\Omega'_t, \dots, \Omega'_t) = d(i \cdot C_i(\theta_1 - \theta'_0, \Omega'_t, \dots, \Omega'_t))$$

に注意して (3-1)より 計算すれば 次を得る。

補題 (3.2).  $\tilde{\Omega}_1 \in \tilde{\nabla}'$  の curvature form とすれば

$$(1) \quad C_i(\bar{\tau}) = \sum_{j+h=i} C_j(\bar{\tau}) \wedge C_h(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1), \quad i=1, \dots, p.$$

(2)  $i > r$  の時

$$h'_i(\bar{\tau}) = \sum_{j+h=i} h'_j(\bar{\tau}) \wedge C_h(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1) + dV_i$$

但  $\equiv \equiv$  で  $C_0(-) = 1$ .  $j > p-r$  の時  $C_j(\bar{\tau}) = h'_j(\bar{\tau}) = 0$ ,  $i > r$  の時  $C_h(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1) = 0$  とする。

(注) (I) の注と同じく  $\bar{t} = t|_{\nu(\bar{\tau})}$  ならば 微分形式として  $h'_j(\bar{\tau}) = h_j(\bar{\tau})$  である。

(III)  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq p$ ,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq p$  として  
 $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ ,  $I = \{i_1, \dots, i_m\}$  とおき

$$|I| = i_1 + \dots + i_m$$

$$u_J \cdot c_I = u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_n} \otimes c_{i_1} \dots c_{i_m} \in W_p$$

とする。また

$$u'_J(\bar{c}) = u'_{j_1}(\bar{c}) \wedge \dots \wedge u'_{j_n}(\bar{c})$$

とおく。 §2 注意1を見れば 次の補題より 定理B を得る。

補題 (3.3)  $J, I$  は 上の通りとする。

$$(1) [u_J \cdot c_I] \in \text{Im } d_p^* \subset H^*(W_p)$$

$$\Rightarrow u'_J(\bar{c}) \wedge c_I(\bar{c}) = (u_J \cdot c_I)(\bar{c}) + \text{exact}$$

$$(2) j_1 + |I| > p+r$$

$$\Rightarrow u'_J(\bar{c}) \wedge c_I(\bar{c}) = (u_J \cdot c_I)(\bar{c}) + \text{exact}$$

こゝで、もちろん、 $|I| > p-r$  又は  $\exists j_n > p-r$  存す

$$\text{ば } (u_J \cdot c_I)(\bar{c}) = 0$$

(3-3) の証明.

(1) はよく知られてゐる。(2) を示す。

仮定より,  $P_{\text{out}}^*(\tilde{\beta}) = 0$  ( $* > 0$ ) 従つて

$$c_k(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_1) = d\tilde{u}_k, \exists \tilde{u}_k \in A^{2k-1}(M)$$

また  $d u_k(\bar{c}) = c_k(\bar{c})$  である。これより (3.2)

(2) は  $j > r$  の時

(\*)  $\hat{h}_j'(\bar{\tau}) = \hat{h}_j(\bar{\tau}) + \sum_{\substack{i+k=j \\ 0 < k \leq r}} C_i(\bar{\tau}) \wedge \hat{h}_k + \text{exact}$   
と書ける。

今  $j_1 + |I| > p+r$  だから  $\forall j_k > r$  (1)より。 (\*)より

1)  $j_1 + |I| > p+r$  に注意して Bott's vanishing theorem を使えば

(\*\*)  $\hat{h}_j'(\bar{\tau}) \wedge C_I(\bar{\tau}) = \hat{h}_j(\bar{\tau}) \wedge C_I(\bar{\tau}) + \text{exact}$   
を得る。

次に (3.2) (1) を

$$C_i(\bar{\tau}) = C_i(\bar{\tau}) + e_{i1} + \dots + e_{ir}$$

$$\begin{aligned} e_{ik} &= C_{i-k}(\bar{\tau}) \wedge C_k(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_r) \\ &= C_{i-k}(\bar{\tau}) \wedge d\hat{h}_k \end{aligned}$$

とみて 再び  $j_1 + |I| > p+r$  に注意して Bott's vanishing theorem を使えば

(\*\*\*)  $\hat{h}_j(\bar{\tau}) \wedge C_I(\bar{\tau}) = (\hat{h}_j C_I)(\bar{\tau}) + \text{exact}$   
を得る。 従って (\*\*) と合すれば (2) を得る。 (証明終)

また 上の証明を見れば (II) の注より 条件  $\tau = \tau|_{U(\tau)}$  の下では 各 2 注意 2 の前半が得られる事は明らかである。

## References.

[1] T.H. Clifton and J.W. Smith: The euler

class as an obstruction in the theory of foliations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963) 949 - 954.

[2] R. Moussu: Sur les classes exotiques des feuilletages. Lecture Notes in Math. 392 Springer - Verlag.

[3] R. Bott: Lectures on Characteristic Classes and Foliations. Lecture Notes in Math 279 Springer - Verlag.

[4] A. Haefliger: Sur les classes caractéristiques des feuilletages. Séminaire BOURBAKI 24<sup>e</sup> année 1971/72. n° 412.