

Link の Hoste 多項式について

東大文理 小林一章

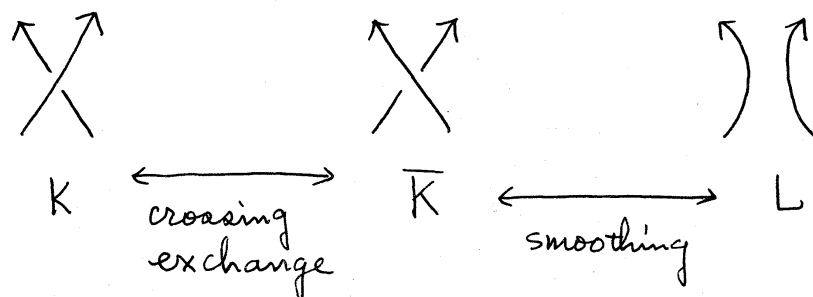
(Kazuaki Kobayashi)

定義1. $Q_K(x, y, z)$ は次の2つの条件を満足して link K に対応する x, y, z に関する Laurent polynomial である。

1. K が k -components trivial link なら $Q_K(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$
2. 3つの links $K, \bar{K}, L$ が1つの crossing point の附近で次の図のようになっており, 他の部分では一致しているなら

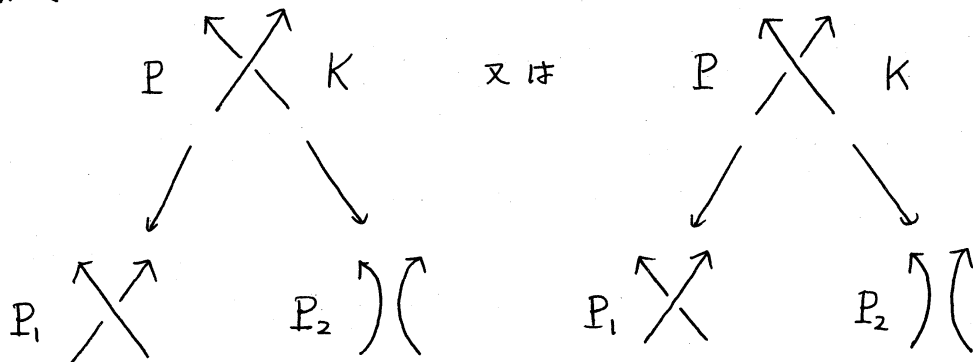
$$xQ_K(x, y, z) - yQ_{\bar{K}}(x, y, z) = zQ_L(x, y, z)$$

を満足する。



link K の diagram P が与えられたとき P の左下には, ある crossing point の crossing exchange した diagram P_1 をかき, P の右下にはその crossing pt. を smoothing した diagram P_2

をかく



P, P_1, P_2 を vertices, P と P_1, P と P_2 を結ぶ edge を考えると, 3 頂点, 2 辺から成る tree が出来る。これを P を始点 (root) とする tree という。更に P_1, P_2 を各々 roots とする tree がつなげられる。このようにして P から tree を作っていき outermost vertices が全て trivial links の diagram に対応しているとき, この tree 全体 R を P の resolution という。

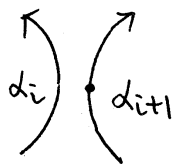
そこで P の resolution R が与えられると定義の 2. で与えられた式を使って $Q_P(x, y, z)$ が計算出来る。

命題. 任意の P に対し R は有限の tree である。

証明. [I] Pointing & Ordering による方法. link L の diagram を P とする。先ず P の成分に適当に順序をつけておき各成分に 1 点ずつ指定点をおく (distinguished point)。

crossing exchange を行なっても各成分は変わらないから順序, 指定点是不変 (このとき crossing exchange, smoothing は指定点でない所で行うとしてよい)

smoothing を行なったとき (i) 異なる 2 つの成分 α_i, α_j ($i < j$) で smoothing を行なったとき, 出来た結果の成分に番号 i を振り, 指定矢は元の α_i の指定矢を採用する。 j 以後の成分の番号は 1 つづつ増える。(ii) 同じ番号の成分 α_i 上で smoothing を行なったとき 2 つの成分に分かれるが, その 2 つの成分の間の crossing points の所で over passes を多くもつ方に番号 i を振り, 他方の番号を $i+1$ とする。そして元々 i より大きな番号をもっていた成分に対しては番号を 1 つづつ減らす。 over passes の数が同じときは smoothing の場所で左に向かう成分に番号 i を, 右に向かう成分に番号 $i+1$ を振る。指定矢は元のものを含み成分はそれを利用し, 指定矢を含まない方には smoothing を行なった場所に図のように指定矢を作る。



ある crossing point が同じ成分 α_i 同志の crossing point のとき, この crossing point に指定矢から orientation に沿って到達するのに over

pass に先にたどりついたら, この crossing point は well-positioned という。またある crossing pt. が α_i, α_j ($i < j$) の crossing pt. で α_i が over pass になっているとき, この crossing pt. は well-positioned という。 diagram P の全ての crossing points が well-positioned なら P は trivial link の diagram である。

P を始点とする tree の作り方: crossing exchange を行なって well-positioned crossing pt. が増えるように行なう。
(crossing exchange の仕方をきめると smoothing は自動的にきまり, smoothing の結果 well-positioned crossing pts が減る事もある。)

diagram P において P の crossing pts の個数 $\Rightarrow \alpha$

P の well-positioned でない crossing pts の個数 $\Rightarrow \beta$ とおき
 P の complexity $c(P)$ を $c(P) = (\alpha, \beta)$ とおく。 $\{(\alpha, \beta)\}$ に辞書式順序を入れ, $c(P)$ に順序をつける。

tree P_0 において $c(P_i) = (\alpha_i, \beta_i)$ $i=0, 1, 2$ とすると

$$\begin{array}{c} P_0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ P_1 \quad P_2 \end{array} \quad \alpha_i \geq \beta_i \quad \text{で} \quad \alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_1 = \beta_0 - 1, \quad \alpha_2 = \alpha_0 - 1$$

 $\alpha = \alpha_0$ とおくと $d(P_i) = \alpha_i + \beta_i$ とおくと $d(P_0) \leq 2\alpha_0$, $d(P_1) \leq 2\alpha_0 - 1$,
 $d(P_2) \leq 2(\alpha_0 - 1)$ となり, P_0 を高々 $2\alpha_0$ 回 crossing exchange
 又は smoothing を行なうと必ず trivial link になるから P は有限な tree (= resolution) をもつ。

[II] Unlinking number による方法.

P を link L の 1 つの diagram とする。 P の unlinking number $u(P)$ とは P が trivial link の diagram になるための crossing exchange の最少回数 (up to Reidemeister move)
 L の unlinking number $u(L) \Rightarrow \min_P u(P)$.

P を始点とする tree の作り方: crossing exchange を行な

って常に unlinking number が減るようにする (crossing exchange の仕方をきめると smoothing は自動的にきまるので smoothing の結果 unlinking number が増える事もある.)

diagram P において P の crossing points の個数 $\Rightarrow \alpha$

P の unlinking number $u(P) \Rightarrow \beta$

$c(P) = (\alpha, \beta)$ とおき $\{(\alpha, \beta)\}$ に辞書式順序を入れる。以下 [I] の場合の証明と全く同じ。 (unlinking number の定義は up to amb. isotopy (= up to Reidemeister move) だから R は確かに有限だが up to amb. isotopy である。従って L -poly. Q_k が amb. isotopy invariant である事を証明するのにこの tree の作り方を利用するときには注意が必要)。

定理 (Hoste) I. $Q_P(x, y, z)$ は R の取り方に依らない。

II. P, P' が links L, L' の diagrams で $L \approx L'$ (amb. isotopic) $\Rightarrow Q_P = Q_{P'}$ $\square$

(II について: $L \approx L'$ なら P と P' は type I, II, III の Reidemeister moves で移り合える事が知られており、 R -moves で移り合える 2 つの diagrams の polynomial Q が等しい事を証明している)。

L -poly. $Q_k(x, y, z)$ は次のように言いかえてもよい。

定義 1' $Q_k(x, y, z)$ は次の 3 つの条件を満足して link K に

対応する x, y, z は互いに異なる Laurent polynomial である。

1'. Q_K は K の amb. isotopy invariant である。

2'. K が trivial knot $\Rightarrow Q_K = 1$.

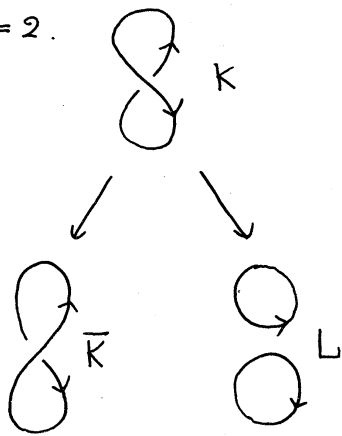
3'. 3つの links $K, \bar{K}, L$ が定義1と同じ関係にあるとき

$$xQ_K - yQ_{\bar{K}} = zQ_L \quad \text{を満足する。}$$

定理' K が k -component trivial link $\Rightarrow Q_K = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$

証明 k についての帰納法. $k=1 \Rightarrow Q_K = 1$ (条件 2' より).

$k=2$.



$$3' \text{ より } xQ_K - yQ_{\bar{K}} = zQ_L$$

$K \approx \bar{K}$ で K が trivial knot だから

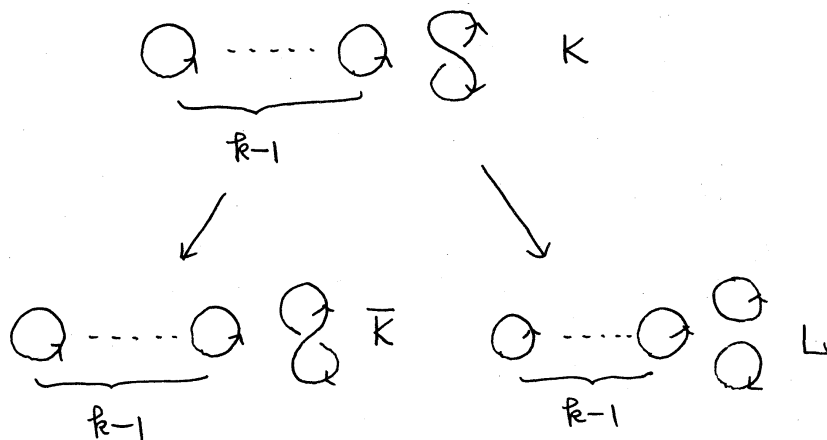
$$1', 2' \text{ より } Q_K = Q_{\bar{K}} = 1.$$

$$\therefore Q_L = \frac{x-y}{z}$$

K が k -comp. trivial link のとき

$$Q_K = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1} \text{ が成立したと}$$

する。



$K \approx \bar{K}$ で K が k -comp. trivial link だから 1', 2' より

$$Q_K = Q_{\overline{K}} = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{R-1} \quad \text{よ'り } xQ_K - yQ_{\overline{K}} = zQ_L$$

$$\therefore Q_L = \left(\frac{x-y}{z}\right)^R //$$

以下で Hoste polynomial の基本的な性質及び応用を述べていきます。

命題. K_1, K_2 を 2 つの links, その連結和を $K_1 \# K_2$ とすると

$$Q_{K_1 \# K_2} = Q_{K_1} \cdot Q_{K_2}$$

(ただし links の連結和は K_1, K_2 各々の適当な成分で連結和を取る。従って $K_1 \# K_2$ は一意な link type を表わさない)

証). K_1 の 1 つの diagram P_1 を取り P_1 の resolution を R_1 とする。 K_2 の 1 つの diagram P_2 を取り P_2 の resolution を R_2 とする。(連結和を取る所が交差点 (crossing point) になっていないとしてよい。) $K_1 \# K_2$ の resolution を先ず K_1 の部分の resolution を行ない。そこで R_1 の outermost vertices は R_1 の outermost vertices に対応し, R_1 の outermost vertices が k -comp. trivial link なら R_1 の対応する outermost vertices における diagram は $(k-1)$ -comp. trivial link と P_2 との disjoint union. そこで R_1 の各 outermost vertices に続けて P_2 の resolution R_2 を行なうと R_1 の outermost vertices の 1 つ 1 つの下に R_2 に対応する tree がかけ, それらの tree 全体を R とおくと R_2 の outermost vertex $\tilde{P}$ の diagram が k -comp. trivial link なら P の対応する outermost vertex $\tilde{P}'$ の diagram

は $(l+k-1)$ -comp. trivial link.

$$\S \text{ : } Q_{\tilde{P}} = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{l-1}, \quad Q_{\tilde{P}'} = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{l+k-2} = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1} \left(\frac{x-y}{z}\right)^{l-1}$$

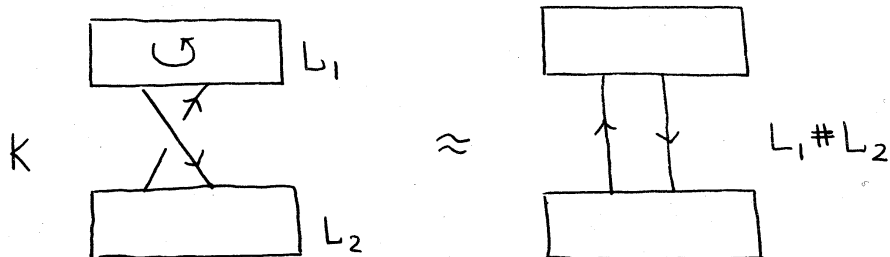
従って R' の全ての outermost vertices の diagram に対応する L -poly. は R'_2 の全ての outermost vertices の diagram に対応する L -poly. に比べて $\left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$ がかゝっている。それ故 R'_1 の全ての outermost vertices の diagram に対応する poly. は P_2 の L -poly. に $\left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$ がかゝったもの。逆に R'_1 の outermost vertices の diagram に対応する L -poly. は R_1 の outermost vertices の diagram に対応する poly. $(= \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1} \text{ for some } k)$ に Q_{P_2} がかけられたもの。 $\therefore Q_{K_1 \# K_2} = Q_{K_1} \cdot Q_{K_2}$.

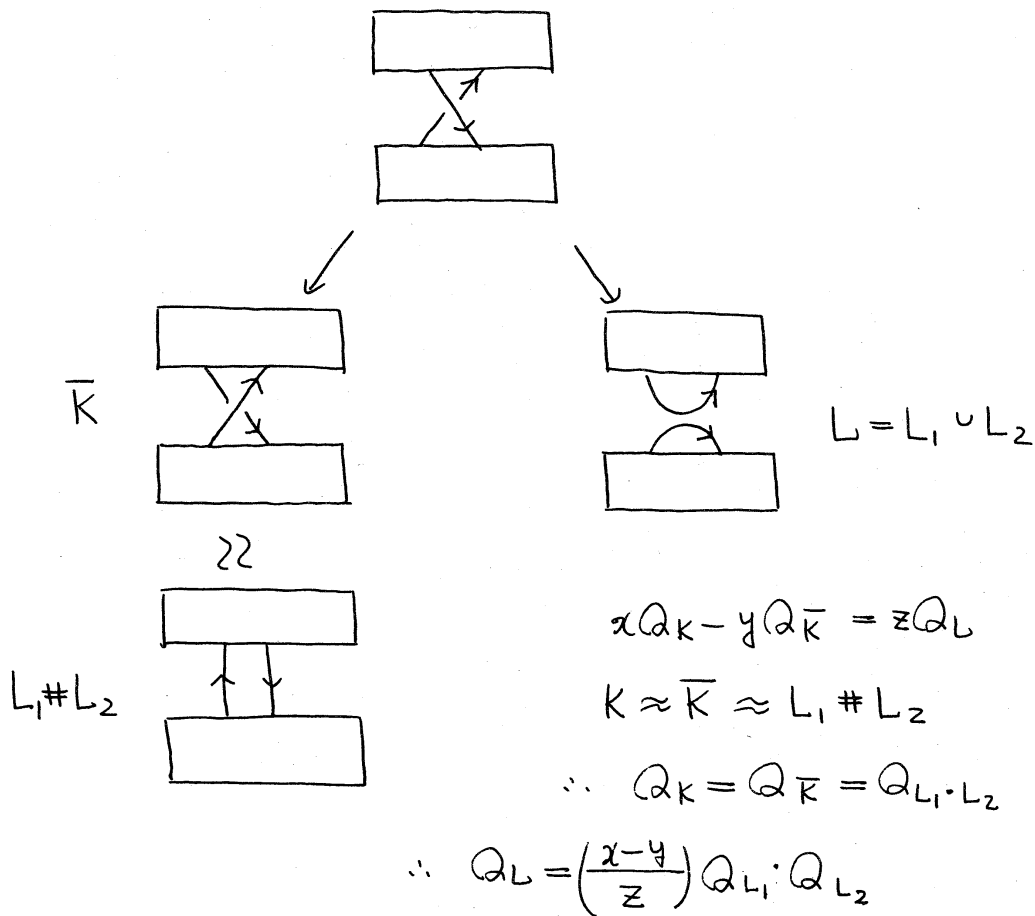
系. 異なる link types で等しい L -poly. をもつものがある。

証). $K_1 \# K_2$ は K_1 または K_2 が link のとき一意的な link type を表わさない。(連結和を取る成分に依存する)。

命題. $L = L_1 \cup L_2$ (disjoint union) で L_1 と L_2 が split しているとき $Q_L = \left(\frac{x-y}{z}\right) Q_{L_1} \cdot Q_{L_2}$

証).

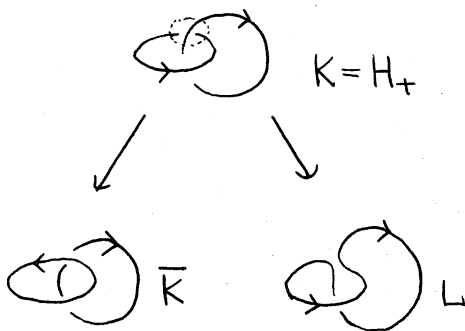




例1. Hopf link $H =$

Hopf link は linking number $(= +1 \text{ or } -1)$ によってその ambient isotopy class が定まる。

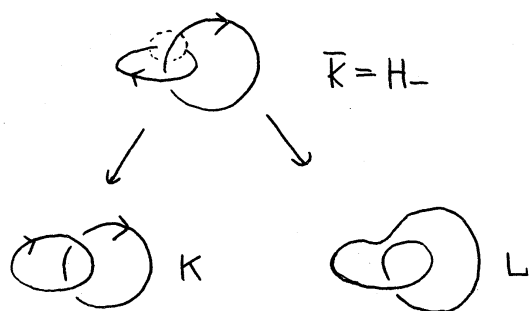
それを以下 $H_+ =$, $H_- =$ とおく



$$Q_K = \frac{y}{x} Q_{\overline{K}} + \frac{z}{x} Q_L$$

$$= \frac{y}{x} \cdot \frac{x-y}{z} + \frac{z}{x}$$

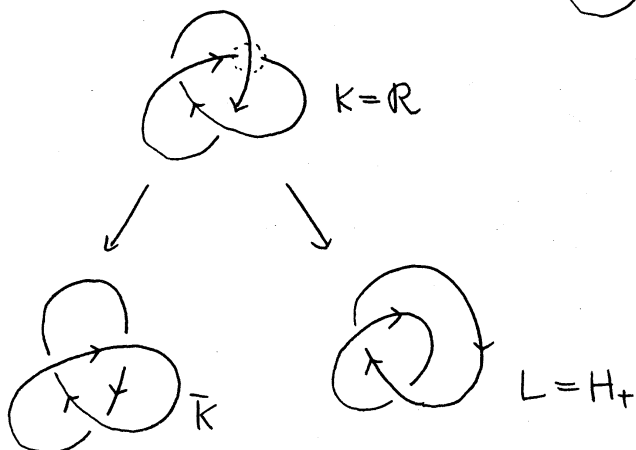
$$\therefore Q_{H_+} = \frac{xy - y^2 + z^2}{xz}$$



$$\begin{aligned} Q_{H_-} &= Q_{\bar{K}} = \frac{x}{y} Q_K - \frac{z}{y} Q_L \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{x-y}{z} - \frac{z}{y} \\ &= \frac{x^2 - xy - z^2}{yz} \end{aligned}$$

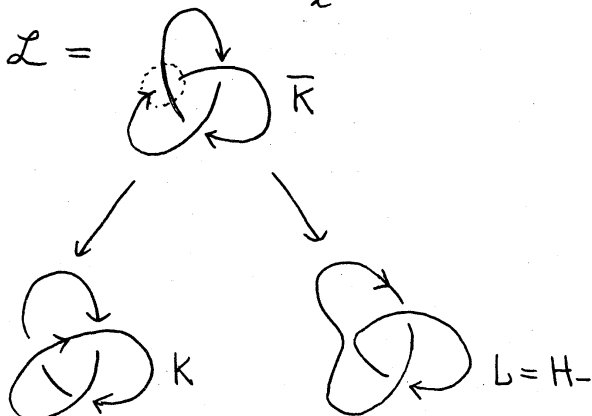
Ex 2. trefoil knot

Right handed trefoil $R =$



$$Q_R = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}} + \frac{z}{x} Q_L = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} Q_{H_+} = \frac{2xy - y^2 + z^2}{x^2}$$

Left handed trefoil $L =$



$$Q_{\bar{L}} = Q_{\bar{K}} = \frac{x}{y} Q_K - \frac{z}{y} Q_L = \frac{x}{y} - \frac{z}{y} Q_{H_-} = \frac{2xy - x^2 + z^2}{y^2}$$

命題. (I) $h_1: (S^3, L) \longrightarrow (-S^3, -L)$ } S^3 の orientation
 (II) $h_2: (S^3, L) \longrightarrow (-S^3, L)$ } reversing homeo.

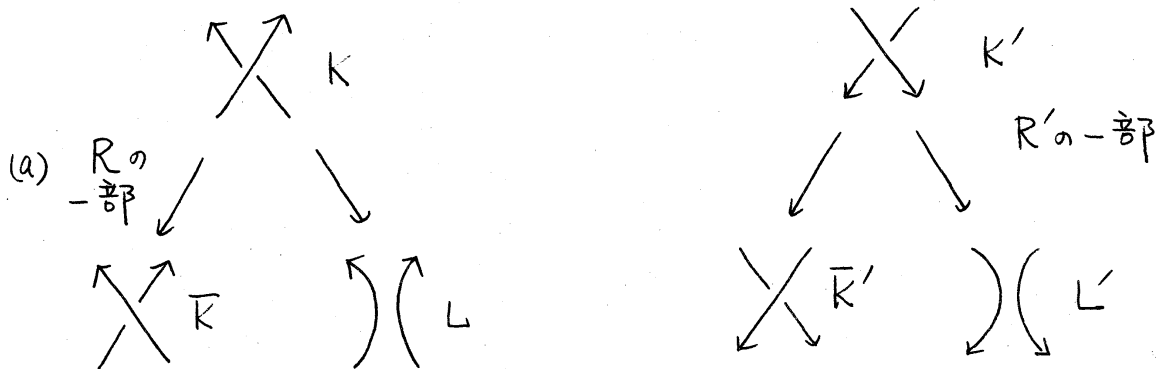
$$h_i(L) = L' \quad \text{とおくと} \quad Q_{L'}(x, y, z) = Q_L(y, x, -z). \quad (*)$$

証). (I). L の diagram P の resolution を R とする. P の鏡像を P' (i.e. $h_1(P) = P'$) とすると, P' の交差表の状態は P と上下反対で P' の向きと P の向きは反対. そこで R の各 stage での crossing exchange, smoothing に対応する tree を考え, それを R' とすると, 各頂点に対応する diagram の crossing exchange の状態は R と反対で向も逆. しかし R' は P' の resolution を与えていて, 対応する outermost vertices に対応する diagrams $\tilde{P}, \tilde{P}'$ は同じ位相の成分からなる trivial link.

$$Q_{\tilde{P}} = \left(\frac{x-y}{z} \right)^{R-1}, \quad Q_{\tilde{P}'} = \left(\frac{x-y}{z} \right)^{R-1}$$

$$\therefore Q_{\tilde{P}'}(x, y, z) = Q_{\tilde{P}}(y, x, -z)$$

そこで tree の outermost vertices からみている level $\tilde{L}$ (*) が成り立っているとする。

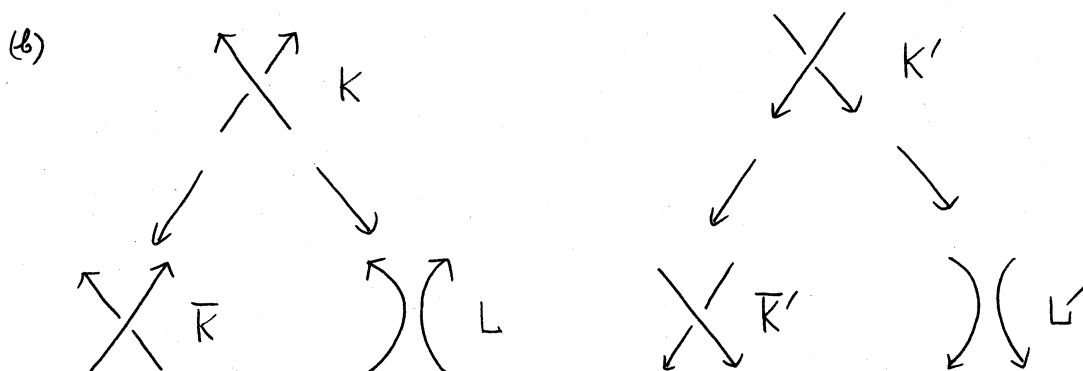


$$\therefore Q_{K'}(x, y, z) = Q_K(y, x, -z), \quad Q_{L'}(x, y, z) = Q_L(y, x, -z)$$

が成立しているとする。一方 $Q_K(x, y, z) = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}}(x, y, z) + \frac{z}{x} Q_L(x, y, z)$

$$Q_{K'} = \frac{x}{y} Q_{\bar{K}'}(x, y, z) - \frac{z}{y} Q_L(x, y, z).$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{よって } Q_{K'}(x, y, z) &= \frac{x}{y} Q_{\bar{K}}(y, x, -z) - \frac{z}{y} Q_L(y, x, -z) \\ &= Q_K(y, x, -z). \end{aligned}$$



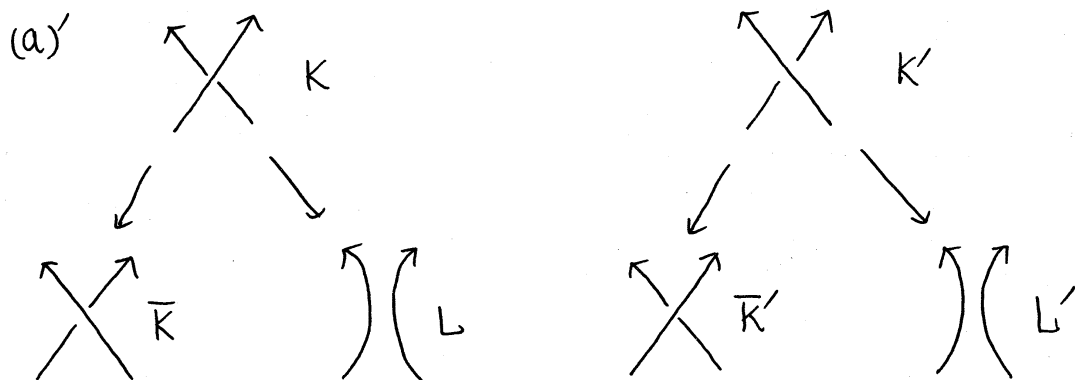
$$Q_{\bar{K}'}(x, y, z) = Q_{\bar{K}}(y, x, -z), \quad Q_{L'}(x, y, z) = Q_L(y, x, -z)$$

が成立しているとする。 $Q_K(x, y, z) = \frac{x}{y} Q_{\bar{K}}(x, y, z) - \frac{z}{y} Q_L(x, y, z).$

$$Q_{K'}(x, y, z) = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}'} + \frac{z}{x} Q_{L'}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{よって } Q_{K'}(x, y, z) &= \frac{y}{x} Q_{\bar{K}}(y, x, -z) + \frac{z}{x} Q_L(y, x, -z) \\ &= Q_K(y, x, -z) \end{aligned}$$

(II) (I)と同じ考え方で証明する。ただし今度は交差点での上下関係は P と P' で反対だが links 上の向きは同じ。



帰納法の仮定より $Q_{\bar{K}}(x, y, z) = Q_{\bar{K}}(y, x, -z)$, $Q_L(x, y, z) = Q_L(y, x, -z)$ が成立しているとする. そして上の diagram より

$$Q_K(x, y, z) = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}}(x, y, z) + \frac{z}{x} Q_L(x, y, z)$$

$$Q_{K'}(x, y, z) = \frac{x}{y} Q_{\bar{K}}(x, y, z) - \frac{z}{y} Q_L(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } Q_{K'}(x, y, z) &= \frac{x}{y} Q_{\bar{K}}(y, x, -z) - \frac{z}{y} Q_L(y, x, -z) \\ &= Q_K(y, x, -z) \end{aligned}$$

(b) の場合も同様に証明される.

系. amb. isotopy type の異なる knot で等しい Hoste-poly. をもつものがある.

証. Rolfsen の本で 10-crossing 迄の knot のうち次のものが strongly negative amphicheiral である.

$$(*) \begin{cases} 4_1, 6_3, 8_3, 8_9, 8_{12}, 8_{17}, 8_{18}, 10_{17}, 10_{33}, 10_{37}, 10_{43}, 10_{45}, 10_{99} \\ 10_{81}, 10_{88}, 10_{99}, 10_{109}, 10_{115}, 10_{118}, 10_{123} \end{cases}$$

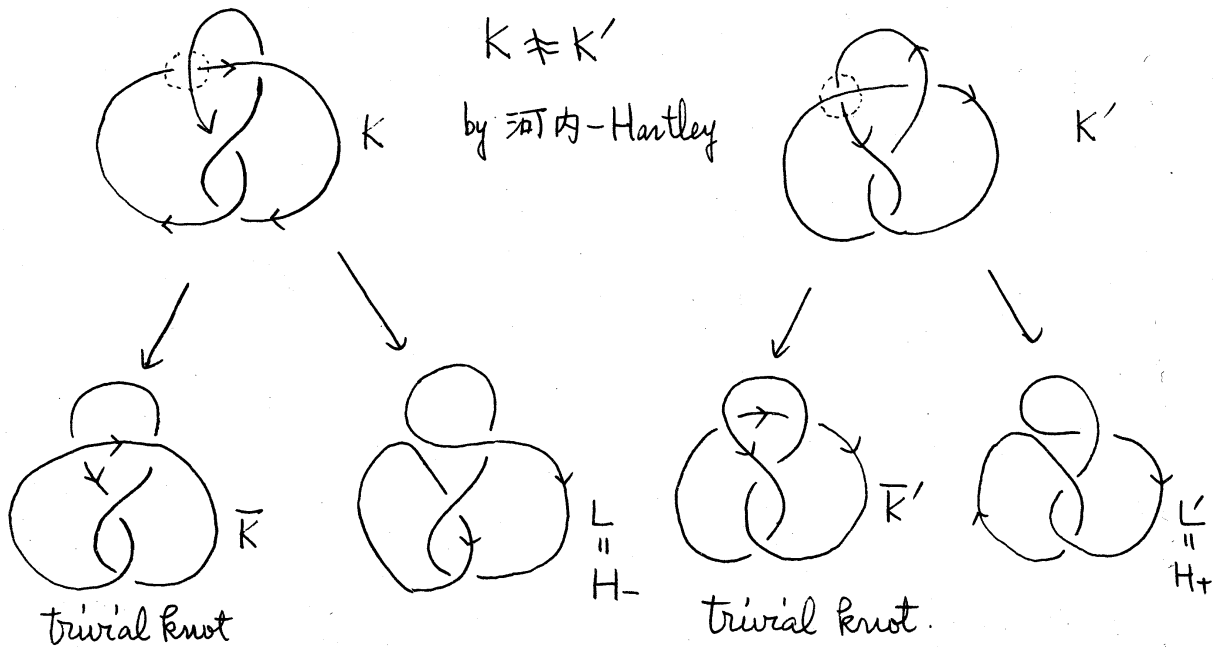
そのうち $10_{99}, 10_{123}$ のみが strongly positive amphicheiral である。(河内-Hartley).

そこで K としてリスト (*) のうちの $10_{99}, 10_{123}$ 以外のものとし $(S^3, K) \longrightarrow (-S^3, +K) \ni K', (-S^3, -K) \ni K''$ とする
と, これらは amphicheiral knot だから

$$Q_{K'}(x, y, z) = Q_{K''}(x, y, z) = Q_K(y, x, -z) \quad \text{である}$$

しかし $K' \neq K''$ である。

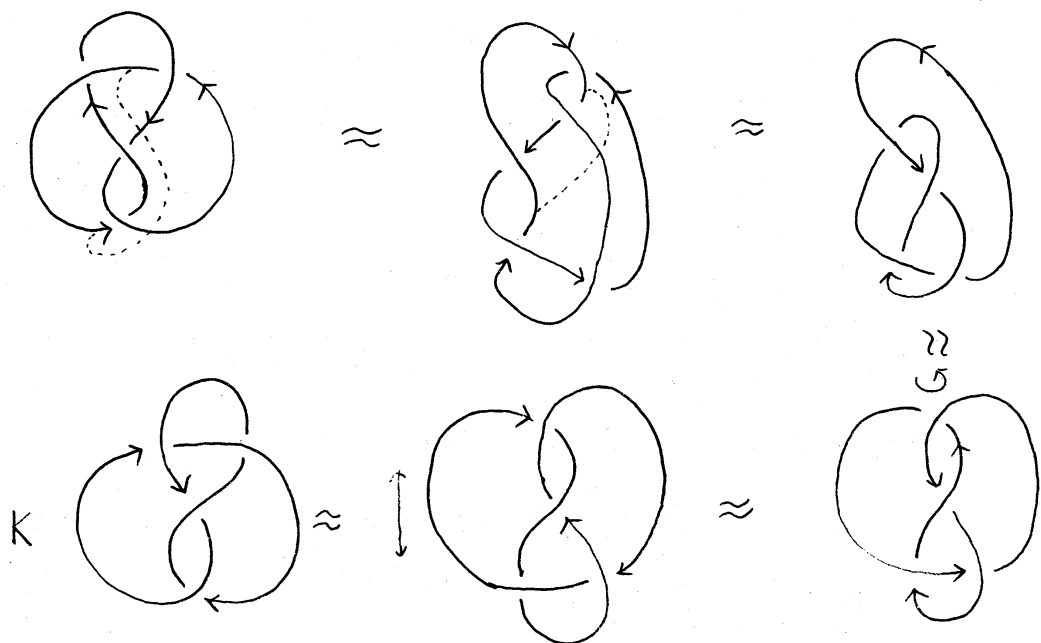
例 3. 41.



$$Q_K = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}} + \frac{z}{x} Q_L = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} Q_{H_-}, \quad Q_{K'} = \frac{x}{y} Q_{\bar{K}'} - \frac{z}{y} Q_{L'} \\ = \frac{x}{y} - \frac{z}{y} Q_{H_+}$$

Q_{H_-} , Q_{H_+} の値を代入すると $Q_K = Q_{K'}$ が示される。

$K \approx K''$ の証明.

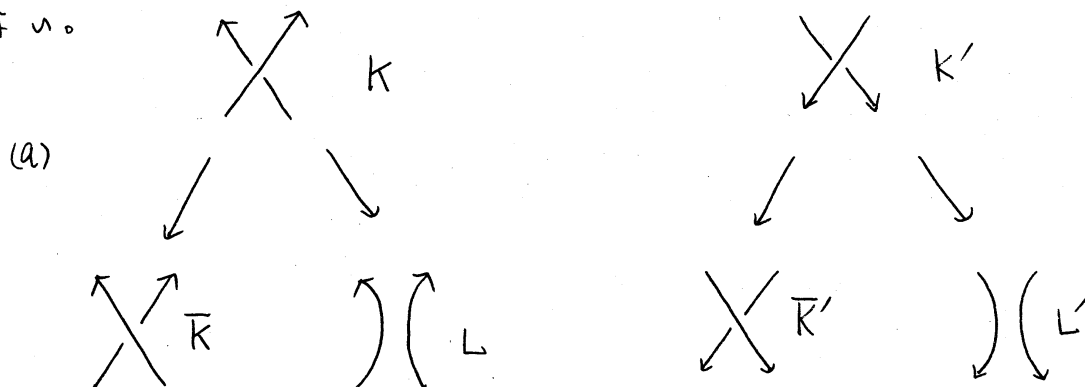


命題. $h: (S^3, L) \rightarrow (S^3, -L)$ (orientation preserving homeo.)

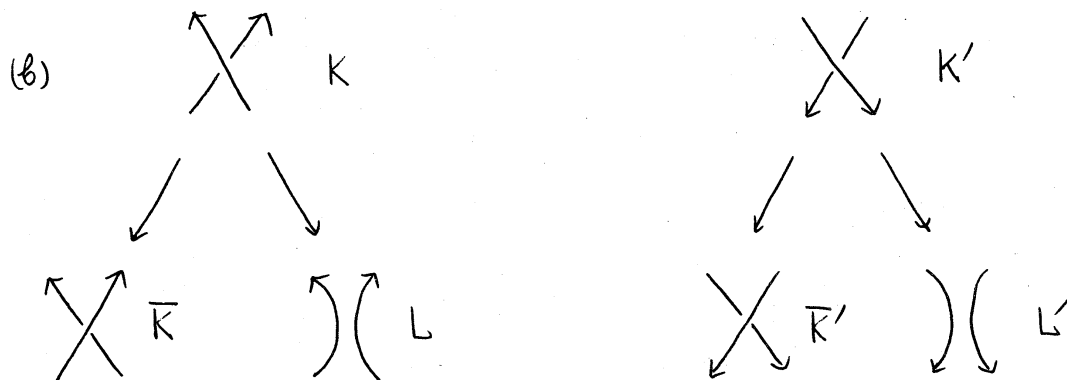
$h(L) = L'$ とおくと $Q_{L'}(x, y, z) = Q_L(x, y, z)$ である。

証明. おの命題と同じ考え方で以下の diagram を調べれば

よい。

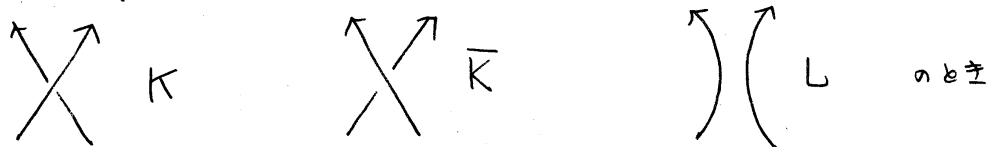


$Q_{\bar{K}'}(x, y, z) = Q_{\bar{K}}(x, y, z)$, $Q_{L'}(x, y, z) = Q_L(x, y, z)$ が成立
 しているとする. 一方 $Q_K = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}} + \frac{z}{x} Q_L$, $Q_{K'} = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}'} + \frac{z}{x} Q_{L'}$
 よって $Q_{K'}(x, y, z) = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}}(x, y, z) + \frac{z}{x} Q_L(x, y, z) = Q_K(x, y, z)$.



このときも同様に証明出来る。□

他の L -poly. との関係.



Conway poly. $\nabla_K(z) - \nabla_{\bar{K}}(z) = z \nabla_L(z).$

Jones poly. $tV_K(t) - \frac{1}{t}V_{\bar{K}}(t) = (\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t})V_L(t).$

因みに reduced Alexander poly. $\Delta_K(x)$ は $\Delta_K(x) \doteq \nabla_K(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$
 ($\doteq$ は $\pm x^n$ を mod. とする という意味).

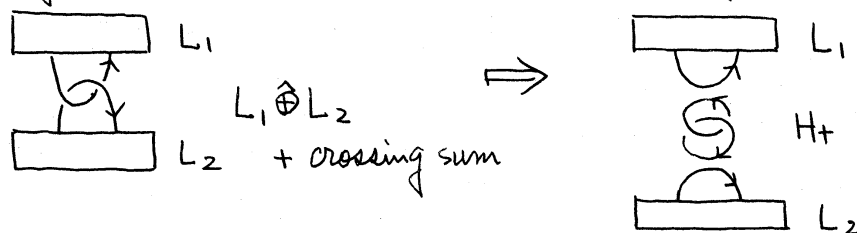
$\Sigma = \bar{c}$ Hoste poly. との関係は

$$Q_K(1, 1, z) = \nabla_K(z)$$

$$Q_K(t, \frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}) = V_K(t) \quad \bar{c} \text{ である。}$$

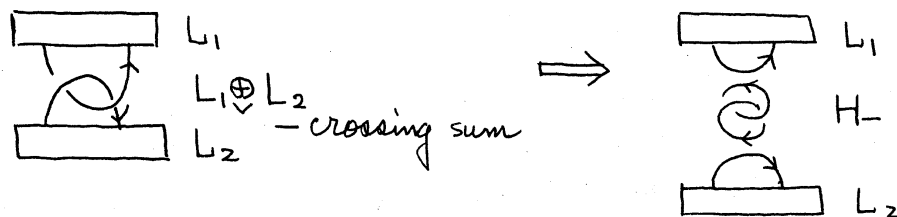
応用

Crossing sum (+ crossing sum, - crossing sum).



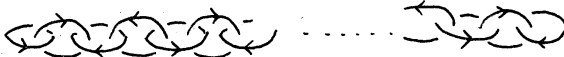
$L_1 \oplus L_2$ は L_1 と H_+ と L_2 との connected sum

$$\text{従って } Q_{L_1 \oplus L_2} = Q_{H_+} \cdot Q_{L_1} \cdot Q_{L_2}$$



$L_1 \oplus L_2$ は L_1 と H_- と L_2 との connected sum

$$\text{従って } Q_{L_1 \oplus L_2} = Q_{H_-} \cdot Q_{L_1} \cdot Q_{L_2}$$

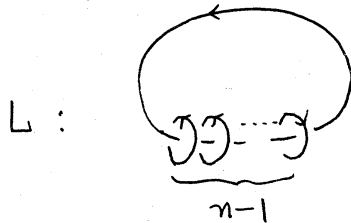
例 4. L :  $Q_L = Q_{H+}^{n-1}$

n -comp. link で隣り合った成分は全て linking number +1.

L_1 : L と同じ diagram をもち linking number +1, -1 の組が各々 k, l 個. ただし $k+l = n-1$

$$\Rightarrow Q_{L_1} = Q_{H+}^k Q_{H-}^l$$

例 5.



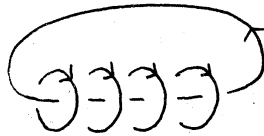
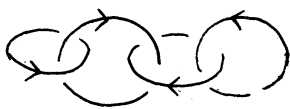
linking number +1 のもの k 本

" -1 " l 本

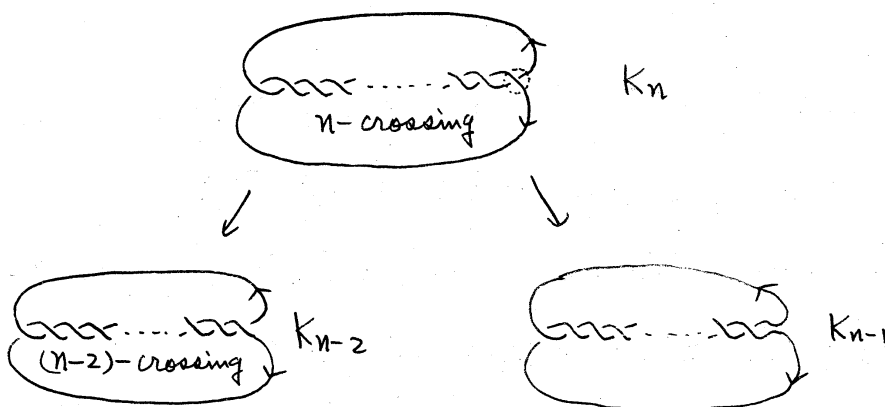
$$k+l = n-1$$

$$\Rightarrow Q_L = Q_{H+}^k Q_{H-}^l$$

従って次の 2 つの links は同じ poly. Q_{H+}^3 をもつ.

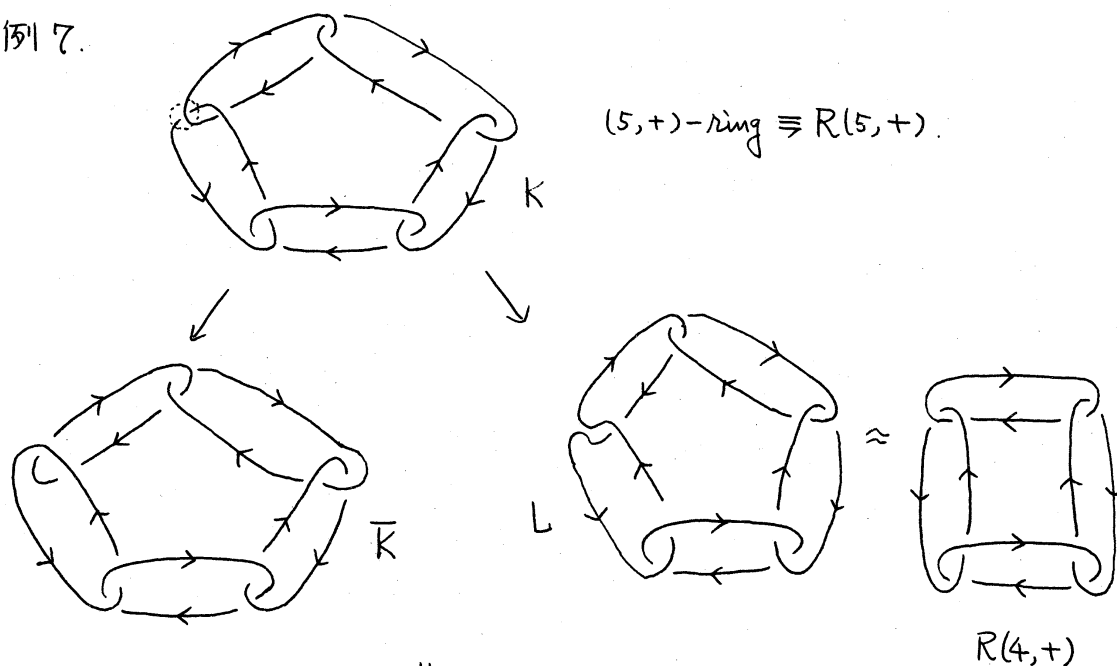


例 6. 帰納的に計算出来る例



$$Q_{K_{n+2}} = \frac{y}{x} Q_{K_n} + \frac{z}{x} Q_{K_{n+1}} \quad (n \geq 1). \quad Q_{K_1} = 1, \quad Q_{K_2} = Q_{H+}$$

例 7.



$$Q_{R(5,+)} = Q_K = \frac{y}{x} Q_{\bar{K}} + \frac{z}{x} Q_L$$

$$= \frac{y}{x} Q_{H+}^4 + \frac{z}{x} Q_{R(4,+)}.$$

一般に n 個の輪をもち隣り合った輪の linking number が全て $z+1 \equiv R(n,+)$ とすると

$$Q_{R(n,+)} = \frac{y}{x} Q_{H+}^{n-1} + \frac{z}{x} Q_{R(n-1,+)}$$

$$Q_{R(1,+)} = \text{link diagram} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} Q_{H+}.$$

田 Link diagram を Braid 表現し, Braid の word を読んで resolution を作り Hoste polynomial を計算する方法.

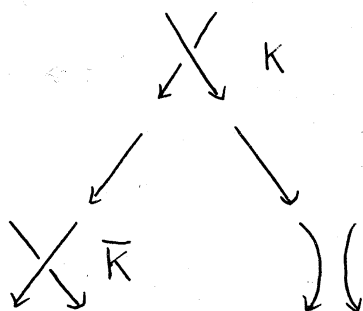
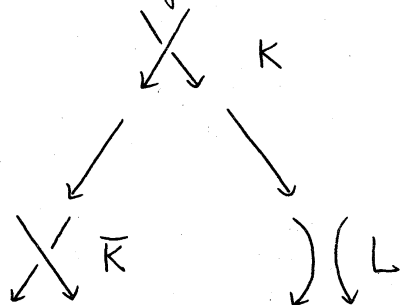
Link diagram $\xrightarrow{\downarrow}$ closed braid $\longrightarrow$ open braid $\longrightarrow$ word 表現

一般的な作り方はあるが実際はかなり面倒.

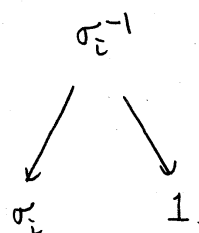
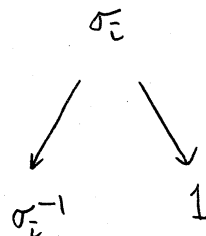
$\longrightarrow$ word の resolution $\longrightarrow$ Link diagram

word 表現が与えられれば後は簡単.

link diagram の tree

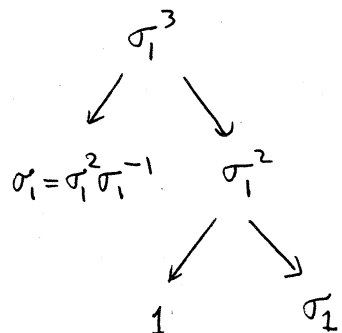
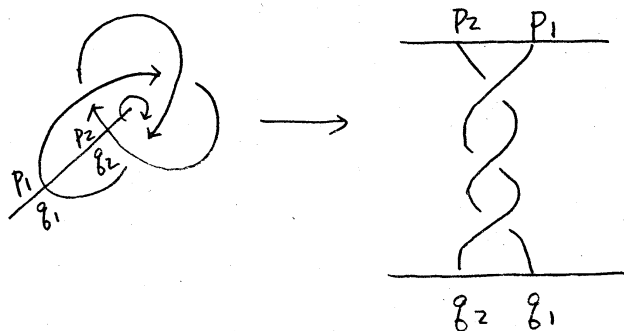


Braid 表現の tree



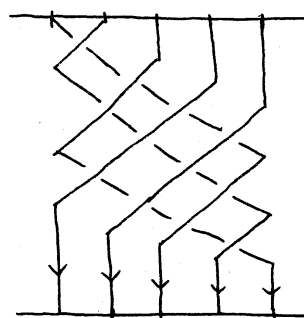
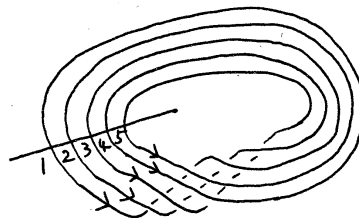
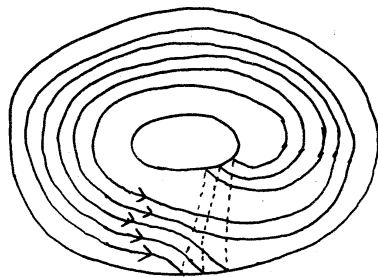
ここで σ_i は n 次 Braid 群 $B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \mid i-j \geq 2 \rangle$ の生成元. また互いに共役な braid 表現は同じ link を与えるから $\sigma_i^{\pm 1} w(\sigma) = w(\sigma) \sigma_i^{\pm 1}$ という関係を使ってもよい ($w(\sigma)$ は $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ から成る word). 更に $u(\sigma) \in B_n$ のとき $u(\sigma) \sigma_n^{\pm 1}$ と $u(\sigma)$ は同じ link を表わすから $u(\sigma) \sigma_n^{\pm 1} = u(\sigma)$ ($\sigma_n \in B_{n+1}$) という関係式も使ってもよい.

例



例. type (p, q) の torus link $T(p, q)$

$(5, 3)$ -torus knot



$$= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^3$$

一般に $T(p, q)$ の Braid 表現は $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-1})^q$ となる。

例. type $(p, 2)$ の torus link $T(p, 2)$ に関する漸化式.

$T(p, 2)$ の Braid 表現

$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-1})^2$$

$\parallel$

$$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-1} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-1}$$

$\parallel$

$$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-3} \sigma_{p-1} \sigma_{p-2} \sigma_{p-1}$$

$\parallel$

$$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-3} \sigma_{p-2} \sigma_{p-1} \sigma_{p-2}$$

$\parallel$

$$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-3} \sigma_{p-2}^2$$

σ_{p-1} が除ける.

$$\begin{array}{c}
 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-3} \sigma_{p-2}^2 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-3} \quad \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-2} \\
 \sigma_{p-2} \text{ が除ける.} \quad \parallel \quad \parallel \\
 (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-3})^2 \quad (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-2})^2 \\
 \therefore Q_{T(p,2)} = \frac{y}{x} Q_{T(p-2,2)} + \frac{z}{x} Q_{T(p-1,2)}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 T(2,2) \longleftrightarrow \sigma_1^2 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 1 \quad \sigma_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 T(3,2) \longleftrightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\
 \parallel \\
 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\
 \parallel \\
 \sigma_1^3 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \sigma_1 \quad \sigma_1^2
 \end{array}$$

componentの数に
注意.

$$\therefore Q_{T(2,2)} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x-y}{z} + \frac{z}{x}$$

$$Q_{T(3,2)} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} Q_{T(2,2)}.$$

□

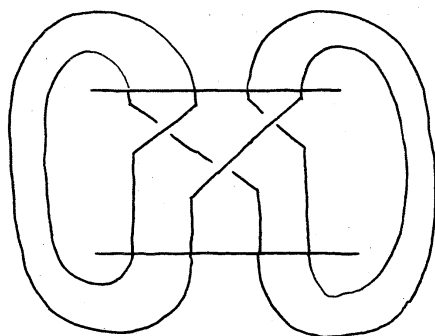
Braid表現を次々と変化させて tree を作っていったとき、その outermost vertex がどのような Braid 表現を持っていると trivial link の Braid 表現なのかを判定するのが重要になる。

次の事が1つの十分条件を与えている。

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ から成る word を $w(\sigma)$ としたとき $w(\sigma)$ の中に同じ σ_i が2回以上出て来なければ $w(\sigma)$ は trivial link の braid 表現になっている (① 一番番号の大きいものから次々と除去出来るから)。また $w(\sigma)$ が同じ番号の σ_i を含まず、番号に限り単調増加(減少)に並んでおり、隣り合った番号の差が2以

上ある1箇所が1箇所あるとき $w(\sigma)$ は $(k+1)$ -comp. trivial link の braid 表現になっている。

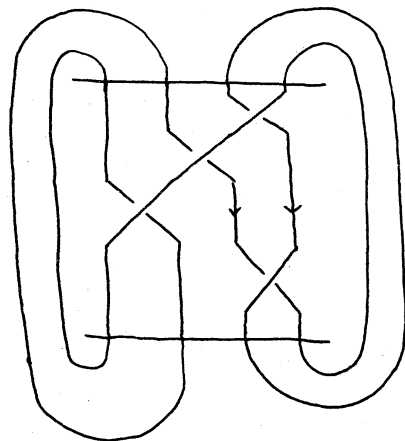
例.



$$\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$$



例.



$$\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3$$



H_+ (+ Hopf link)

Reference

Jim Hoste : A polynomial invariant of knots and links
(to appear in Bull. Amer. Math. Soc.)