

鋼構造骨組の最小重量設計問題における凸緩和

A CONVEX RELAXATION FORMULATION FOR MINIMUM WEIGHT DESIGN PROBLEM
OF STEEL FRAME STRUCTURES

宋 昶*, 山川 誠**, 上谷 宏二***

Chang SONG, Makoto YAMAKAWA and Koji UETANI

A convex relaxation formulation for a minimum weight design problem of steel frame structures is proposed in this paper. The non-convexity of this kind of problem usually results in only local optimal solutions. Further, although the global optimal solution is not always necessary, a better local optimal solution is always preferred. To measure the accuracy of a local optimal solution, we use branch and bound approach with reformulation-linearization technique. We propose a new region partitioning technique for this approach. The effectiveness of the formulation is investigated with two numerical examples.

Keywords: Steel frame structure, Minimum weight design, Reformulation-Linearization Techniques, Branch and bound approach

鋼構造骨組, 最小重量設計, RLT線形緩和, 分枝限定法

1 はじめに

構造設計者は構造物をモデル化した上で適当な設計を仮定し、応答解析を行う。得られた応答値が設計条件を満足していなければ、設計を変更し再び応答解析を行う必要がある。論理的な手法を適切な部分に導入すれば、構造設計のサイクルにおける創造的な部分に設計者は専念できるようになると考えられる。このような設計の論理化において最適化の手法が有効であり、機械、航空機、自動車などの分野では最適設計として製品の開発プロセスの一部に取り入れられ、コスト低減や安全性向上などに結びついている^{1, 2)}。建築構造の分野でも、鋼材量最小化問題として鋼構造骨組の部材断面を設計変数として許容応力度および層間変形角に関する条件を満たし最小の鋼材量となるような設計解を求めるための研究が行われている。このような最適化問題において、断面分布のパターンが大きく異なる設計解、即ち局所解が多数存在することが知られており³⁾、問題の初期断面と局所解の関連性についての検討も行われている⁴⁾。このような初期値依存性は、問題の非凸性に起因すると考えられる。

1.1 問題の性質と研究の背景

凸計画問題とは目的関数が凸関数、実行可能領域が凸集合であるような問題である⁵⁾。ここで、集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとは、

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in S \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

が成り立つことをいう。また、関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が凸であるとは f の epigraph が凸、すなわち

$$f(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in [0, 1]$$

が成り立つことをいう。これらの関係を図1に示す。

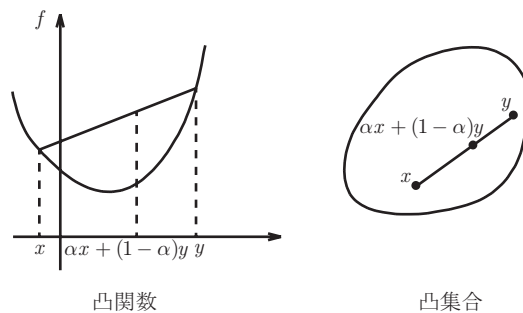


図1 凸関数と凸集合

凸計画問題では任意の局所最適解は大域的最適解である。一方、非凸計画問題では局所最適解が大域的最適解である保証はなく、大域的最適解から大きく劣った局所最適解が多数存在する可能性がある⁶⁾。鋼構造建築物の鋼材量最小化問題においても非凸制約条件が多数存在する。1次設計における許容応力度制約、層間変形制約、2次設計における必要保有水平耐力制約はすべて非凸制約条件に分類される。このような非凸制約条件の存在により、局所的な最適性条件を満たす設計解は多数存在し、それらの中から大域的最適

* 京都大学大学院工学研究科建築学専攻
大学院生・修士(工学)

** 京都大学工学研究科 助教・博士(工学)

*** 京都大学工学研究科 教授・工博

Graduate Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto University, M. Eng.

Research Assoc., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto University, Dr. Eng.
Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto University, Dr. Eng.

解を選ぶことは極めて困難である。大域的最適解という意味では、部材断面を離散変数として定式化し列挙法を用いて求める方法が提案されている⁹⁾。ただし、離散最適化問題も同様に解くことが難しい問題である。このような困難が存在する一方で、大域的最適解自体への実用的な必要性は小さく、許容解が得られれば十分であるとも考えられる。ただし、複数の局所解の目的関数値がそれほど変わらなければどの局所解でも良いのであり、他の局所解よりも大きく劣った解であれば、それはできる限り排除すべきである。以上より、実用的な意味においても、局所解と厳密解との目的関数値の乖離度を測り局所解の良さを評価することには意義があると考えられる。

1.2 研究の位置づけ

局所解（上界）の良さを測るために、緩和問題の最適解（下界）を利用することが可能である。元問題の非凸性を何らかの方法で除去し、凸計画問題に緩和した問題を構成できれば、局所最適性により問題の下界を特徴づけることができる。このような大域的最適化アルゴリズムの研究は1960年代には始まっている。近年になり、高速かつ大容量の計算環境が提供されるようになったため、実用上の応用についてより多くの研究が行われるようになってきている⁹⁾。

目的関数および制約条件が変数の多項式で書かれた最適化問題は多項式計画問題と呼ばれる。多項式計画問題は非凸二次計画問題の一般化であるとともに、新しい変数を導入することにより多項式計画問題を非凸二次計画問題として再定式化することも可能である⁷⁾。このような定式化に対する凸緩和として線形緩和⁸⁾、二次錐緩和⁹⁾、半正定値緩和¹⁰⁻¹²⁾等の方法が知られている。これらの中では半正定値緩和が理論的には最も優れている。一方で、大規模な問題を数値的に安定かつ高速に解くことができる線形計画ソルバーに基づく線形緩和の利点も指摘されている^{13, 14)}。実際に近年の線形計画ソルバーは設計変数および制約条件をそれぞれ1千万以上有する問題を数時間で解くことができる¹⁵⁾。このような背景の下、線形緩和法の一つであるReformulation-Linearization Techniques (RLT) と分枝切除法とを組み合わせた方法^{8, 16)}の有効性が報告されている。

第2章で示すように鋼構造骨組の鋼材量最小化問題も多項式計画問題として定式化できる。このような点から鋼材量最小化問題を考察することは実用的にも理論的にも興味深いものと思われるが、十分な既往の研究はなされていないようである。

1.3 研究の目的と論文の構成

本論文では、弾性解析に基づく許容応力度設計についての設計条件を単純化して考慮した上で、鋼構造平面骨組の鋼材量最小化問題を多項式計画問題として定式化し、問題の性質を調べる。このような立場から以下について論じる。

- 1) 鋼構造平面骨組の鋼材量最小化問題について、多項式計画問題としての定式化を行った上で緩和問題を導出する。
- 2) 領域分割に基づく分枝切除法により緩和問題の精度を向上する方法を提案する。
- 3) 緩和を用いて局所解の信頼性をどの程度定量的に評価することが可能かについて、数値解析例を通じて調べる。

第2章では本論文で対象とする設計問題の定式化を紹介し、RLT及び分枝限定法を説明する。次に第3章では3層3スパンモデルと7層3スパンモデルの解析例を用いて提案手法の有効性を検証し、上界と下界により局所解の信頼性について定量的な評価を行い、得られた

結論を第4章にまとめる。

1.4 表記について

非負整数全体の集合を $\mathbb{N}_0$ 、実数を成分とする n 次元ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表す。二つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、各成分を $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ と表せば $x_i \leq y_i; i = 1, \dots, n$ であるとき $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ と書く。零ベクトルは $\mathbf{0}$ と表す。 $(\cdot)$ および $(\cdot)$ によって、対応する変数の上下限値を表す。集合 S に対し、 $|S|$ は S の要素数（または濃度）を表す。最小化問題を対象として、単に「最適解」と言った場合には大域的な最小解を指し、そうでない局所的な最小解を指す場合には局所解と呼ぶ。ある問題の最適解に対応する目的関数値を最適値と呼び、解が存在しない問題に対する最適値は $+\infty$ とする。

2 設計問題の定式化

前章で述べたように鋼構造建築物の鋼材量最小化問題は局所解が多数存在する非凸計画問題である。まず2.1節で単純モデルを通じて問題の性質を把握することを試み、緩和問題の意義を説明した上で、2.2節で多項式計画問題としての一般的な定式化を与える。2.3節ではRLTおよび妥当不等式を用いた線形緩和問題について述べ、緩和問題に対する領域縮小および分枝限定法を2.4および2.5節にそれぞれ説明する。

2.1 単純モデル（剛棒連結モデル）

単純モデルとして、図2に示すような二本の鉛直柱が水平な剛棒 R に連結されている剛棒連結モデルを考える。二本の鉛直柱はそれぞれ断面積 A_1, A_2 および断面二次モーメント I_1, I_2 を有するとし、柱の長さを h 、ヤング係数を E とする。

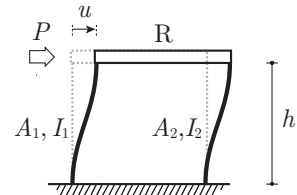


図2 剛棒連結モデル

外力 P に対して生じる変位を u とすると、系剛性方程式は

$$P = \left(12EI_1 / h^3 + 12EI_2 / h^3 \right) u \quad (1)$$

と表せる。さらにそれぞれの柱の断面積、断面二次モーメント関係はパラメータ α を用いて

$$I_1 = \alpha A_1^2, \quad I_2 = \alpha A_2^2 \quad (2)$$

と与える。各柱の断面積の上下限値制約 $\underline{A}_1 \leq A_1 \leq \bar{A}_1, \underline{A}_2 \leq A_2 \leq \bar{A}_2$ および変位制約 $0 \leq u \leq \bar{u}$ を与えた上で、鋼材量 $hA_1 + hA_2$ を最小化するような A_1, A_2, u を見出す問題

$$\begin{aligned} \min_{A_1, A_2, u} \quad & hA_1 + hA_2, \\ \text{s.t.} \quad & P = \left(\frac{12E}{h^3} I_1 + \frac{12E}{h^3} I_2 \right) u = \frac{12E\alpha}{h^3} (A_1^2 u + A_2^2 u), \\ & \underline{A}_1 \leq A_1 \leq \bar{A}_1, \quad \underline{A}_2 \leq A_2 \leq \bar{A}_2, \quad 0 \leq u \leq \bar{u}. \end{aligned} \quad (3)$$

を考える。簡単のために $h = 1, 12E\alpha / h^3 = 1, P = 1, \bar{u} = 1$ と与え、 u について縮約するとこの問題は

$$\begin{aligned} \min_{A_1, A_2} \quad & A_1 + A_2, \\ (\text{PE}_0): \quad \text{s.t.} \quad & A_1^2 + A_2^2 \geq 1, \\ & \underline{A}_1 \leq A_1 \leq \bar{A}_1, \quad \underline{A}_2 \leq A_2 \leq \bar{A}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

と書き換えることができる。ここで、 $(0 <) \underline{A}_1 < \underline{A}_2 (< 1)$ および $(1 <) \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}$ とする。問題 (PE_0) は非凸二次計画問題であり、その非凸性は制約条件 $A_1^2 + A_2^2 \geq 1$ に由来するものである。問題 (PE_0) の許容領域および目的関数の等高線を白抜き領域および灰色の線としてそれぞれ描いた図を図3に示す。問題 (PE_0) には二つの局所解

$$\text{局所解1: } (A_1, A_2) = (\underline{A}_1, \sqrt{1 - \underline{A}_1^2})$$

$$\text{局所解2: } (A_1, A_2) = (\sqrt{1 - \underline{A}_2^2}, \underline{A}_2)$$

が存在し、あわせて図3に黒点で示す。図3の目的関数の等高線からもわかるように局所解1が最適解である。しかし、局所的な勾配情報に基づく非線形最適化法を適用した場合に、局所解1,2のいずれが解として得られるかは初期値や実装方法に依存する。これが鋼材量最小化問題において初期値依存性として知られる現象である。

問題 (PE_0) において、独立変数 $y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(1)}, y_2^{(2)}$ を新たに導入して変数の置き換え

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = A_1, & y_1^{(2)} = A_1^2, \\ y_2^{(1)} = A_2, & y_2^{(2)} = A_2^2, \end{cases} \quad (5)$$

を考える。問題 (PE_0) における線形不等式を掛け合わせて作られるような不等式は妥当不等式と呼ばれ、(5)のような関係を用いて条件式を書き換えることは線形化と呼ばれる。第 i 部材についての線形不等式 $\underline{A}_i \leq A_i, A_i \leq \bar{A}_i$ から作られる妥当不等式およびその線形化を次に示す。

$$\begin{cases} (\underline{A}_i - A_i)^2 \geq 0 \\ (\underline{A}_i - A_i)(A_i - \bar{A}_i) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_i^{(2)} - 2\underline{A}_i y_i^{(1)} + \underline{A}_i^2 \geq 0 \\ -y_i^{(2)} + (\underline{A}_i + \bar{A}_i)y_i^{(1)} - \underline{A}_i \bar{A}_i \geq 0 \end{cases} \\ (A_i - \bar{A}_i)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i^{(2)} - 2\underline{A}_i y_i^{(1)} + \underline{A}_i^2 \geq 0 \\ -y_i^{(2)} + (\underline{A}_i + \bar{A}_i)y_i^{(1)} - \underline{A}_i \bar{A}_i \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

問題 (PE_0) において妥当不等式は明らかに冗長な制約条件であり、問題 (PE_0) の許容領域に何ら影響を与えない。(5)に対応する等式制約 $y_i^{(2)} = (y_i^{(1)})^2$ を黒線で、(6)の線形化された妥当不等式により作られる集合を白抜きの領域で描いた図を図4に示す。(5)の本質は二次等式制約であり、これは非凸制約である。一方、線形化された妥当不等式により作られる集合は凸集合であり、 $\underline{A}_i \leq A_i \leq \bar{A}_i$ において非凸制約(5)を含む。つまり、線形化された妥当不等式(6)は非凸制約(5)の凸緩和である。以上のような考えから問題(4)の凸緩和問題

$$(PE_L'') : \begin{aligned} & \min_{y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(1)}, y_2^{(2)}} y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, \\ & \text{s.t.} \quad y_1^{(2)} + y_2^{(2)} \geq 1, \\ & \quad \underline{A}_i \leq y_i^{(1)} \leq \bar{A}_i, \\ & \quad 2\underline{A}_i y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \leq \underline{A}_i^2, \\ & \quad -(\underline{A}_i + \bar{A}_i)y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \leq -\underline{A}_i \bar{A}_i, \\ & \quad 2\bar{A}_i y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \leq \bar{A}_i^2, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

が導かれる。問題 (PE_L'') は線形制約のみからなるので線形計画問題である。問題 (PE_L'') に非線形制約条件(5)を加えれば元問題 (PE_0) と等価な問題となるので、問題 (PE_0) から非凸制約(5)を取り除いた問題 (PE_L'') は問題 (PE_0) の緩和問題であることは明らかである。このような線形緩和を用いる方法がRLTである。問題 (PE_L'') における許容領域および最適解（緩和解1）の例を白抜きの領域および白点としてそれぞれ図5に示す。図5から分かるように、緩和問題 (PE_L'') の許容領域は元問題 (PE_0) すなわち図3の許容領域を含む凸領域である。

対象となる領域を分割すれば緩和精度を高めることができる。

例えば、 $\underline{A}_1 \leq A_1^C \leq \bar{A}$ となるような A_1^C を用いて上下限制約を $\underline{A}_1 \leq A_1 \leq A_1^C$ および $A_1^C \leq A_1 \leq \bar{A}$ に分割し、対応する二つの緩和問題をそれぞれ解くことにより緩和精度を向上させることができる。領域分割された緩和問題の許容領域および最適解（緩和解2）の例を白抜きの領域および白点としてそれぞれ図6に示す。

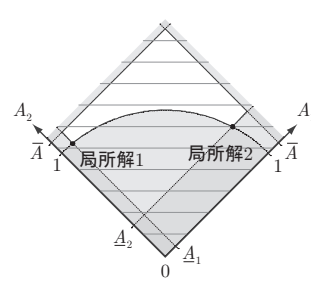


図3 剛棒連結モデルの許容領域と局所解

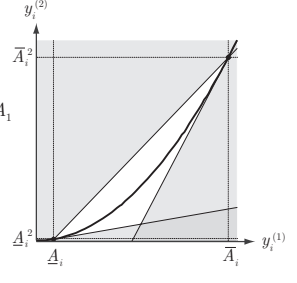


図4 二次式と妥当不等式

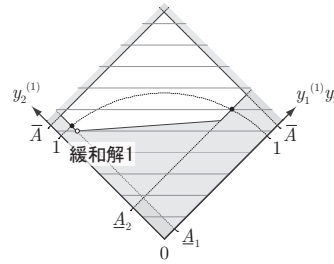


図5 緩和問題の許容領域と最適解

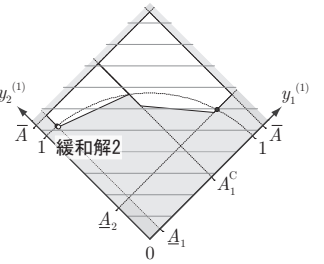


図6 領域分割された緩和問題の許容領域と最適解

例として $\underline{A}_1 = 0.1, A_1^C = 0.6, \bar{A} = 1.1, \underline{A}_2 = 0.3$ と与えた場合の、上記各ケースの目的関数値および大域的最適解（局所解1）からの目的関数値の乖離の割合を表1に示す。

表1 単純モデルにおける最適解の目的関数値

	局所解1 (上界)	局所解2 (上界)	緩和解1 (下界)	緩和解2 (下界)
目的関数値	1.095	1.254	1.043	1.084
乖離度	—	+14.51%	-4.76%	-0.99%

緩和問題の最適解を用いて、元問題の局所解の良さを測ることにについて簡単に説明する。まず、元問題の任意の許容解は緩和問題でも許容解である。よって、元問題のどの許容解の目的関数値よりも緩和問題の最適値は小さい。例えば図3の許容領域と図5の緩和解1を比較すれば、この関係は容易に理解される。よって、緩和問題の最適値は元問題の最適値の下界である。次に、定義から元問題の任意の許容解の目的関数値は元問題の最適値よりも大きい。例えば、図3において最適解（局所解1）は他のどの許容解よりも小さな目的関数値をとっている。よって、元問題の任意の許容解の目的関数値は元問題の最適値の上界である。元問題の最適値はこのような上界と下界の間に存在する。ある局所解の目的関数値を上界とすれば、下界（緩和問題の最適値）との差を測ることにより、その局所解の

良さを評価することができる。上界と下界が一致した場合には、その局所解は真の最適解である。表1において、緩和解2のように精度の高い目的関数値の下界が得られていれば、局所解1は大域的最適解からの乖離度は高々1%以下に過ぎないことがわかり、一方で局所解2については他に大域的最適解が存在する可能性が高いことがわかる。より一般的な定式化を次節以降に述べる。

2.2 多項式計画問題としての鋼材量最小化問題の定式化（元問題）

まず、鋼構造平面骨組鋼材量最小化問題の定式化を示す。 n_x, n_v をそれぞれ部材断面数、系全体の自由度数として、設計変数を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ および $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_v}$ とする。これらの第 i 成分を x_i および u_i と書く。第 i 部材断面に関係する設計変数 x_i と断面積 A_i 、形状係数 Z_i 、断面二次モーメント I_i との関係は

$$A_i = A_i(x_i) = \alpha_i x_i^2, Z_i = Z_i(x_i) = \beta_i x_i^3, I_i = I_i(x_i) = \gamma_i x_i^4, \quad (8)$$

と与える。 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ はそれぞれ部材の形状によって定められる定数である。柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用い、 $i \in \mathcal{I}^C$ は柱断面に関係する部材断面番号、 $i \in \mathcal{I}^G$ は梁断面に関係する部材断面番号を表すとして、

$$\begin{cases} \alpha_i = 1, \beta_i = 0.8, \gamma_i = 1.2 & \text{for } i \in \mathcal{I}^C, \\ \alpha_i = 1, \beta_i = 1.5, \gamma_i = 4.0 & \text{for } i \in \mathcal{I}^G, \end{cases} \quad (9)$$

と与える。目的関数を鋼材量とし、

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_M} \sum_{i=1}^{n_x} L_j C_{ij} A_i \quad (10)$$

と定義する。ここで、 n_M は総部材数、 $C_{ij}; i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_M$ は第 i 部材断面に関する量から対応する第 j 部材に関する量に変換するための0-1係数、 $L_j; j = 1, \dots, n_M$ は第 j 部材の部材長を表す。以降では表記を簡潔にするために誤解のない限り第 j 部材に関する断面積も同じ記号で A_j と表す。本来は、第 i 部材断面に関する量と第 j 部材に関する量は区別すべきであり、第 j 部材に関する断面積は正確には $\sum_{i=1}^{n_x} C_{ij} A_i$ と表すべきことに注意されたい。このような表記を用いれば、(10)は簡潔に

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_M} L_j A_j \quad (11)$$

と表せる。 I_j および Z_j についても同様の表記を行う。次に、問題の単純化のために以下の仮定をおく。

【仮定1】 剛床仮定を行う。

【仮定2】 柱の伸び変形を考慮しない。

そのため、各層の水平変位は等しく、また鉛直変位は考えない。このとき、第 j 部材の材端力-材端変位関係式を

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{I}_j \mathbf{u}_j \quad (12)$$

と表す。ここで、 $\mathbf{p}_j = (p_j^{(a)}, m_j^{(a)}, p_j^{(b)}, m_j^{(b)}) \in \mathbb{R}^4$ は第 j 部材の（基準座標系）材端力ベクトル、 $\mathbf{u}_j = (u_j^{(a)}, \theta_j^{(a)}, u_j^{(b)}, \theta_j^{(b)})^T \in \mathbb{R}^4$ は第 j 部材の（基準座標系）材端変位ベクトル、 $\mathbf{Q}_j \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ はヤング係数 E および部材長 L_j を用いて表される行列として

$$E \begin{bmatrix} 12 \sin^2 \varphi_j / L_j^3 & -6 \sin \varphi_j / L_j^2 & -12 \sin^2 \varphi_j / L_j^3 & -6 \sin \varphi_j / L_j^2 \\ & 4 / L_j & 6 \sin \varphi_j / L_j^2 & 2 / L_j \\ & & 12 \sin^2 \varphi_j / L_j^3 & 6 \sin \varphi_j / L_j^2 \\ \text{sym.} & & & 4 / L_j \end{bmatrix}$$

と与える。ここで、 φ_j は材軸が（基準座標系）水平方向軸に対してなす角であり、第 j 部材端 a, b の鉛直上向き方向の座標値 $\eta_j^{(a)}, \eta_j^{(b)}$

を用いて $\sin \varphi_j = (\eta_j^{(b)} - \eta_j^{(a)}) / L_j$ とする。(12)を系全体で重ね合わせ、系剛性方程式

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (13)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ は系全体の剛性行列、 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_v}$ はある作用荷重に対する等価節点力ベクトルとする。層数を n_s とし、変位ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_v}$ を層間変形ベクトル $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n_s}$ に変換する行列 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_v}$ 、および許容最大層間変形 $\bar{\boldsymbol{\delta}} \in \mathbb{R}^{n_s}$ を用いて、ある荷重作用時の層間変形制約を

$$\mathbf{R} \mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}} \quad (14)$$

と表す。また、ある荷重作用時の第 j 部材に関する部材端曲げ許容応力度（短期）を満たすための条件式を

$$\begin{aligned} -1.5 f_b Z_j &\leq m_j^{(a)} + q_j^{(a)} \leq 1.5 f_b Z_j, \\ -1.5 f_b Z_j &\leq m_j^{(b)} + q_j^{(b)} \leq 1.5 f_b Z_j; \quad j = 1, \dots, n_M \end{aligned} \quad (15)$$

と与える。ここで、 $m_j^{(a)}, m_j^{(b)}$ は第 j 部材の材端力ベクトル $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^4$ の第2,4成分であり、 $q_j^{(a)}, q_j^{(b)}$ はある作用荷重に対する固定端モーメントとする。(15)をまとめて $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$ と表す。さらに目的関数値（鋼材量）が適当に与えられた上界以下という条件

$$f(\mathbf{x}) \leq \bar{f} \quad (16)$$

を与える。以上を用いて多項式計画問題としての鋼材量最小化問題

$$(P_0): \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{P}, & (\text{剛性方程式}) \\ & \mathbf{R} \mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}, & (\text{層間変形制約}) \\ & \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, & (\text{許容応力度制約}) \\ & f(\mathbf{x}) \leq \bar{f}, & (\text{鋼材量制約}) \\ & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u} \leq \bar{\mathbf{u}}, & (\text{上下限制約}) \end{aligned}$$

を定義する。ここで、次の仮定をおく。

【仮定3】 $\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}$ は対応する成分について同符号かつ0ではない。すなわち、 $j = 1, 2, \dots, n_v$ に対して $0 < \underline{u}_j \leq \bar{u}_j$ あるいは $\underline{u}_j \leq \bar{u}_j < 0$ のいずれかが成り立つ。ここで、 $\underline{u}_j, \bar{u}_j$ は $\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}$ の第 j 成分とする。

問題 P_0 の目的関数、およびすべての制約関数（制約条件の左辺）はそれぞれ設計変数 x_i および u_j についての多項式関数

$$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=1}^4 a_{ik} (x_i)^k + \sum_{(i,j) \in K} \sum_{k=1}^4 b_{ijk} (x_i)^k u_j + \sum_{j=1}^{n_v} c_j u_j + d \quad (17)$$

と表せる。ここで、 $a_{ik}, b_{ijk}, c_j, d \in \mathbb{R}$ とする。よって、問題 P_0 は多項式計画問題である。

2.3 RLTを用いた線形緩和問題の定式化

多項式(17)の線形化のために、新たな設計変数

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} & y_i^{(3)} & y_i^{(4)} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4; \quad i = 1, \dots, n_x, \\ \mathbf{z}_{i,j} &= \begin{pmatrix} z_{i,j}^{(1)} & z_{i,j}^{(2)} & z_{i,j}^{(3)} & z_{i,j}^{(4)} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4; \quad i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_v \end{aligned} \quad (18)$$

を導入する。これらの変数に対して非凸制約

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} &= x_i, \quad y_i^{(2)} = (x_i)^2, \quad y_i^{(3)} = (x_i)^3, \quad y_i^{(4)} = (x_i)^4; \quad i = 1, \dots, n_x, \\ z_{i,j}^{(1)} &= x_i u_j, \quad z_{i,j}^{(2)} = (x_i)^2 u_j, \quad z_{i,j}^{(3)} = (x_i)^3 u_j, \quad z_{i,j}^{(4)} = (x_i)^4 u_j; \quad (i, j) \in K \end{aligned} \quad (19)$$

を与える。ここで、 $\mathbf{z}_{i,j}$ について考慮する必要のある部材断面番号 i と自由度番号 j の組合せのすべてを $K \subset \{1, 2, \dots, n_x\} \times \{1, 2, \dots, n_v\}$ と表す。さらに、第 i 部材断面に関係する自由度番号 j の集合を $K(i) \subset \{1, 2, \dots, n_v\}$ 、第 j 自由度に関係する部材断面番号 i の集合を $K(j) \subset \{1, 2, \dots, n_x\}$ と表す。 $\mathbf{y}_i; i = 1, \dots, n_x$ および $\mathbf{z}_{i,j}; (i, j) \in K$ のそれぞれを列ベクトルとして並べたものを $\mathbf{y}$ および $\mathbf{z}$ と表し、変位ベク

トル $\mathbf{u}$ とあわせて線形化された問題の設計変数 $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{u}^T, \mathbf{z}^T)^T$ と定義する。 $\boldsymbol{\xi}$ の次元を n とし、 ξ_k と書いた場合には $\boldsymbol{\xi}$ の第 k 成分を表す。ここで、 ξ_k は $y_i^{(1)}, u_j, z_{i,j}^{(l)}$ のいずれかに対応するものである。以降では、非凸制約(19)を簡潔に

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N} \quad (20)$$

と表す。

2.3.1 元問題の線形化

(20)の下で $\boldsymbol{\xi}$ を用いた問題 P_0 を考える。展開した多項式の非線形項に対応する変数に置き換え線形関数化する操作を線形化と呼ぶ。このような操作により線形化された多項式を $[\cdot]_l$ と表す。多項式制約から作られる集合において、要素である各多項式を線形化することにより作られる集合も同じく $[\cdot]_l$ と表す。例えば、多項式 $x_i + (x_i)^2$ に対して $[x_i + (x_i)^2]_l = y_i^{(1)} + y_i^{(2)}$ 、集合 $\mathcal{F} = \{x_i \mid 0 \leq x_i + (x_i)^2 \leq 1\}$ に対して $[\mathcal{F}]_l = \{(y_i^{(1)}, y_i^{(2)}) \mid 0 \leq y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \leq 1\}$ とする。このとき、問題 P_0 を

$$(P'_0) : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}$$

と書き換えることができる。ここで、

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P}, \mathbf{R}\mathbf{u} \leq \bar{\mathbf{d}}, \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, f(\mathbf{x}) \leq \bar{f}\}$$

とする。また、上下限値 $\underline{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{u}^T, \mathbf{z}^T)^T$ 、 $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\mathbf{y}}^T, \bar{\mathbf{u}}^T, \bar{\mathbf{z}}^T)^T$ については余分な領域を取り去ることが望ましい。そのために $\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}$ の各成分を次式から計算する。

$$\begin{aligned} \underline{y}_i^{(k)} &\leftarrow (\underline{x}_i)^k, \quad \bar{y}_i^{(k)} \leftarrow (\bar{x}_i)^k; \quad i = 1, \dots, n_x, k = 1, 2, 3, 4 \\ \underline{z}_{i,j}^{(k)} &\leftarrow \min \{(\underline{x}_i)^k \underline{u}_j, (\bar{x}_i)^k \bar{u}_j\}; \quad (i, j) \in \mathcal{K}, k = 1, 2, 3, 4 \\ \bar{z}_{i,j}^{(k)} &\leftarrow \max \{(\underline{x}_i)^k \bar{u}_j, (\bar{x}_i)^k \underline{u}_j\}; \quad (i, j) \in \mathcal{K}, k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $0 < \underline{x}_i \leq \bar{x}_i$ および仮定3を考慮した。(21)について、 $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}$ に対応して $\underline{\boldsymbol{\xi}}$ および $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ が決まるとみなして、 $\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ および $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ と表す。問題 P_0 と問題 P'_0 は等価であり、これらの問題の最適値は一致する。問題 P'_0 の目的関数は線形関数であり、 $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}$ 以外の制約関数もすべて線形関数である。よって、 $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}$ を問題 P'_0 から取り除けば、問題 P'_0 の線形緩和問題

$$(P'_L) : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}},$$

が得られる。一般に、問題 P'_L の許容領域は問題 P'_0 の許容領域よりも大きく緩和される。より“強い”緩和問題を作るために、次節で述べる妥当不等式を導入する。ここで“強い”緩和問題とは元問題 P_0 の最適値に近い最適値を持つ緩和問題を指す。

2.3.2 妥当不等式を考慮した線形緩和問題

妥当不等式とは、元問題に対して冗長な制約条件であり、一方、緩和問題に対しては許容領域を制限することができる不等式制約である。RLTにおいて、線形化された妥当不等式は緩和の強さに大きな影響を与える重要な制約条件である。元問題におけるいくつかの制約条件を掛け合わせることで妥当不等式は作られる。 $\boldsymbol{\xi}$ についての線形関数として表せる範囲内、すなわち多項式関数(17)で表せる範囲内で妥当不等式を考える。具体的には、元問題における上下限制約と層間変形制約について、妥当不等式を作成する。まず、元問題における設計変数の上下限制約 $\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i; i = 1, \dots, n_x$ についての妥当不等式から作られる集合

$$\begin{aligned} V^I &= V^I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid (-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (-1)^{5-k-l} \leq 0; \\ &\quad i = 1, \dots, n_x, k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0, 2 \leq k+l \leq 4\} \end{aligned} \quad (22)$$

を定義する。次に、変位の上下限制約 $\underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j; j = 1, \dots, n_u$ を含めて作られる妥当不等式の集合

$$\begin{aligned} V^{II} &= V^{II}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid (-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (-u_j + \underline{u}_j) (-1)^{4-k-l} \leq 0, \\ &\quad (-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (u_j - \bar{u}_j) (-1)^{4-k-l} \leq 0; \\ &\quad (i, j) \in \mathcal{K}, k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k+l \leq 4\} \end{aligned} \quad (23)$$

を定義する。層間変形角制約(14)における行列 $\mathbf{R}$ の第 m 行 j 列成分 ($1 \leq m \leq n_s, 1 \leq j \leq n_u$) を R_{mj} 、 $\bar{\mathbf{d}}$ の第 m 成分を $\bar{d}_m$ とし、層間変形角制約(14)を

$$\sum_{j=1}^{n_s} R_{mj} u_j \leq \bar{d}_m; \quad m = 1, \dots, n_s \quad (24)$$

と表す。このとき、(14)を含めて作られる妥当不等式の集合

$$\begin{aligned} V^{III} &= V^{III}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid (-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (\sum_{j=1}^{n_u} (R_{mj} u_j) - \bar{d}_m) (-1)^{4-k-l} \leq 0; \\ &\quad (i, j) \in \mathcal{K}, m = 1, \dots, n_s, k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k+l \leq 4\} \end{aligned} \quad (25)$$

を定義する。(22),(23),(25)の V^I, V^{II}, V^{III} に含まれる条件式は(17)の形で表される。よって、これらの妥当不等式は $\boldsymbol{\xi}$ による線形化が可能である。さらに V^I, V^{II}, V^{III} は問題 P'_0 に対して冗長な制約条件であるので、新たな問題

$$(P''_0) : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l, \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}$$

と問題 P'_0 は等価である。ここで、

$$V = V(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = V^I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \cap V^{II}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \cap V^{III}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (26)$$

とする。しかし、問題 P''_0 から非凸制約 $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}$ を取り除いて作られる線形緩和問題

$$(P''_L) : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l$$

と P'_L は等価ではなく、 P''_L でなされた緩和は P'_L の緩和よりも強いものである。整理すると、各問題の許容領域に対応する集合

$$\begin{aligned} (P'_0) \mathcal{F}'_0 &= \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}\}, \\ (P'_L) \mathcal{F}'_L &= \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}\}, \\ (P''_0) \mathcal{F}''_0 &= \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l, \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}\}, \\ (P''_L) \mathcal{F}''_L &= \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l\}, \end{aligned}$$

は包含関係 $\mathcal{F}''_0 = \mathcal{F}''_0 \subset \mathcal{F}''_L \subset \mathcal{F}'_L$ を満たす。問題 P_0 と問題 P'_0 は等価であったので、妥当不等式によって問題 P'_L より“強い”線形緩和問題 P''_L が得られることがわかる。

2.4 上下限制約の領域縮小

許容領域 $\mathcal{F}''_L$ は $\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}$ に依存するので $\mathcal{F}''_L(\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}})$ と表す。線形緩和問題 P''_L における緩和効果と設計変数の上下限値 $\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}$ の大きさとの間には密接な関係がある¹⁶⁾。より強い緩和問題を得るためには、元問題 P''_0 の許容領域 $\mathcal{F}''_0$ を削ることなく、かつ $\underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}$ により作られる空間ができるだけ小さくなるように $\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}$ を与える必要がある。すなわち、更新前の上下限値 $\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}$ および更新後の上下限値 $\underline{\boldsymbol{\xi}}', \bar{\boldsymbol{\xi}}'$ に対して、 $\mathcal{F}''_0 \subset \mathcal{F}''_L(\underline{\boldsymbol{\xi}}', \bar{\boldsymbol{\xi}}') \subset \mathcal{F}''_L(\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}})$ かつ $\underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \underline{\boldsymbol{\xi}}' \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}' \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}$ を満たすように $\underline{\boldsymbol{\xi}}', \bar{\boldsymbol{\xi}}'$ を与える必要がある。そのために文献16, 17)の考え方を基にして、成分ごとの逐次的な領域縮小を行う。

$\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}$ が与えられた下で $\boldsymbol{\xi}$ の第 m 成分に関する更新を考える。領域 $\mathcal{F}''_L$ 内で ξ_m を最小化あるいは最大化する線形計画問題を解き、

$$\xi_m^{\min} = \min\{\xi_m \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{F}''_L\}, \quad \xi_m^{\max} = \max\{\xi_m \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{F}''_L\} \quad (27)$$

と表す。上下限値 $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ の第 m 成分のみを $\xi_m^{\min}, \xi_m^{\max}$ に置き換えたもの (すなわち $\underline{\xi}_m \leftarrow \xi_m^{\min}, \bar{\xi}_m \leftarrow \xi_m^{\max}$) に対して

$$\begin{aligned} \underline{x}^R &= (\underline{x}_1^R, \dots, \underline{x}_{n_x}^R)^T, \quad \bar{x}^R = (\bar{x}_1^R, \dots, \bar{x}_{n_x}^R)^T, \\ \underline{u}^R &= (\underline{u}_1^R, \dots, \underline{u}_{n_u}^R)^T, \quad \bar{u}^R = (\bar{u}_1^R, \dots, \bar{u}_{n_u}^R)^T, \end{aligned} \quad (28)$$

を計算する。ここで、

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^R &= \max \left\{ (\underline{y}_i^{(k)})^{\frac{1}{k}}, \min \left\{ (\underline{z}_{i,j}^{(k)} / \bar{u}_j)^{\frac{1}{k}}, (\bar{z}_{i,j}^{(k)} / \underline{u}_j)^{\frac{1}{k}} \right\}; j \in \mathcal{K}(i), k=1,2,3,4 \right\}, \\ \bar{x}_i^R &= \min \left\{ (\bar{y}_i^{(k)})^{\frac{1}{k}}, \max \left\{ (\bar{z}_{i,j}^{(k)} / \bar{u}_j)^{\frac{1}{k}}, (\underline{z}_{i,j}^{(k)} / \underline{u}_j)^{\frac{1}{k}} \right\}; j \in \mathcal{K}(i), k=1,2,3,4 \right\}, \\ \underline{u}_j^R &= \max \left\{ \underline{u}_j, \min \left\{ \underline{z}_{i,j}^{(k)} / (\bar{x}_j)^k, \bar{z}_{i,j}^{(k)} / (\underline{x}_j)^k \right\}; i \in \mathcal{K}(j), k=1,2,3,4 \right\}, \\ \bar{u}_j^R &= \min \left\{ \bar{u}_j, \max \left\{ \bar{z}_{i,j}^{(k)} / (\underline{x}_j)^k, \underline{z}_{i,j}^{(k)} / (\bar{x}_j)^k \right\}; i \in \mathcal{K}(j), k=1,2,3,4 \right\}, \end{aligned}$$

とする。 $\underline{x}^R, \bar{x}^R, \underline{u}^R, \bar{u}^R$ に対して(21)の操作を行い得られるものを

$$\underline{\xi}^R = \underline{\xi}(\underline{x}^R, \bar{x}^R, \underline{u}^R, \bar{u}^R), \quad \bar{\xi}^R = \bar{\xi}(\underline{x}^R, \bar{x}^R, \underline{u}^R, \bar{u}^R), \quad (29)$$

と表す。 $\underline{\xi}^R, \bar{\xi}^R$ は $\mathcal{F}_0'' \subset \mathcal{F}_L''(\underline{\xi}^R, \bar{\xi}^R) \subset \mathcal{F}_L''(\underline{\xi}, \bar{\xi})$ および $\underline{\xi} \leq \underline{\xi}^R \leq \bar{\xi}^R \leq \bar{\xi}$ を満たす。以上の操作は第 m 成分の更新に対応するものであったので、 $\underline{\xi}^{R(m)}, \bar{\xi}^{R(m)}$ と表す。このような操作を繰り返すことで緩和解の精度を向上できる。本研究では、ランダムに順番を決めて m について更新するという単純な方法を採用する。その方法をアルゴリズム2.1に示す。

アルゴリズム2.1においては計 $2|\mathcal{S}|$ の線形計画問題を解く必要があり、これを複数回繰り返すことも有効である。緩和問題 P_L'' を解く際に、前処理としてこのような上下限制約の領域縮小を行う。

2.5 超直方体分割法を用いた分枝限定法

より良い緩和解を得るため、前節で述べた領域縮小に併せて、超直方体分割による分枝限定法の適用を考える。超直方体分割とは、ある一つの設計変数に対し、許容領域を二分割して二つの子問題に分ける方法である。どの変数をどのように分割するかに方法の効率は大きく影響を受ける。本研究では、緩和問題を実際に解いて最も下界を大きくするように逐次選択を行うアプローチを採用する。本節では、緩和問題 P_L'' の許容領域 $\mathcal{F}_L''$ の $\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}$ への依存関係を明示して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L''(\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}) \\ = \{ \xi \mid \xi \in [\Omega], \underline{\xi}(\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}) \leq \xi \leq \bar{\xi}(\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}), \xi \in [V(\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u})] \} \end{aligned}$$

と表記する。親問題 $P_L^{(M)} (M \in \mathbb{N}_0)$ を分割前の緩和問題 P_L'' とする。問題 $P_L^{(M)}$ における上下限値 $\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}$ は問題番号 M に依存し、この依存関係を明示して $\underline{x}^{(M)}, \bar{x}^{(M)}, \underline{u}^{(M)}, \bar{u}^{(M)}$ と表せば、 $P_L^{(M)}$ は

$$(P_L^{(M)}): \min_{\xi} [f(\xi)], \quad \text{s.t. } \xi \in \mathcal{F}_L''(\underline{x}^{(M)}, \bar{x}^{(M)}, \underline{u}^{(M)}, \bar{u}^{(M)})$$

と表せる。また $M=0$ に対応する $\underline{x}^{(0)}, \bar{x}^{(0)}, \underline{u}^{(0)}, \bar{u}^{(0)}$ は元問題 P_0 における $\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}$ に一致させるとする。さらに以降では、表記を簡潔にするために $\underline{x}^{(M)}, \bar{x}^{(M)}, \underline{u}^{(M)}, \bar{u}^{(M)}$ も単に $\underline{x}, \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}$ と表すが、これらは元問題 P_0 のものと一致するとは限らないことに注意されたい。このとき、領域 $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ について、 $x_m = t$ で二つの領域 $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}^{B(m,t)}, \bar{x}^{B(m,t)} \leq x \leq \bar{x}$ に分割することを考える。すなわち、 $\underline{x}^B(m,t), \bar{x}^B(m,t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ の第 i 成分 $\underline{x}_i^B(m,t), \bar{x}_i^B(m,t); i=1, \dots, n_x$ を

$$\underline{x}_i^B(m,t) = \begin{cases} \underline{x}_i & (i \neq m) \\ t & (i = m) \end{cases}, \quad \bar{x}_i^B(m,t) = \begin{cases} \bar{x}_i & (i \neq m) \\ t & (i = m) \end{cases}, \quad (30)$$

と与える。このような分割に対して、 $N > M$ として二つの子問題

$$\begin{aligned} (P_L^{(N)}): \min_{\xi} [f(\xi)], \quad \text{s.t. } \xi \in \mathcal{F}_L''(\underline{x}, \bar{x}^B(m,t), \underline{u}, \bar{u}), \\ (P_L^{(N+1)}): \min_{\xi} [f(\xi)], \quad \text{s.t. } \xi \in \mathcal{F}_L''(\underline{x}^B(m,t), \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}), \end{aligned} \quad (31)$$

アルゴリズム 2.1 (領域縮小)

ステップ1 (更新対象の決定): ξ から適当に更新対象となる成分を選び、選ばれた成分に対応する番号の集合 $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ を与える。ここで、 n は ξ の次元である。

ステップ2 (1成分の範囲縮小): ランダムに $m \in S$ を選び、(27)より $\xi_m^{\min}, \xi_m^{\max}$ を計算する。

ステップ3 (領域縮小): 上下限値 $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ の第 m 成分のみを $\xi_m^{\min}, \xi_m^{\max}$ に置き換えたものに対して(28),(29)から $\underline{\xi}^{R(m)}, \bar{\xi}^{R(m)}$ を計算する。

上下限値を $\underline{\xi} \leftarrow \underline{\xi}^{R(m)}, \bar{\xi} \leftarrow \bar{\xi}^{R(m)}$ と更新する。

ステップ4 (繰り返し): $S \leftarrow S \setminus \{m\}$ とし、 $S = \emptyset$ ならば終了し、そうでなければステップ2に戻る。

アルゴリズム 2.2 (超直方体分割を用いた分枝限定法)

ステップ0 (パラメータ設定): 問題数の上限値 $\bar{N} > 0$ 、上界と下界の許容ギャップ ε を与える。

ステップ1 (上界の計算): 元問題 P_0 を非線形最適化ソルバーで解き、得られた局所解に対する目的関数値 f^* を上界値 $\bar{f} \leftarrow f^*$ とする。

ステップ2 (下界の初期値): 問題集合 $\mathcal{P} = \emptyset$ を定義する。線形緩和問題 $P_L^{(0)}$ に対しアルゴリズム2.1を適用して領域縮小を行う。領域縮小された問題 $P_L^{(0)}$ を解き、その最適値 $\hat{f}$ を下界値 $\underline{f} \leftarrow \hat{f}$ とする。さらに線形緩和問題 $P_L^{(0)}$ を問題集合 $\mathcal{P}$ に加える。

ステップ3 (親問題選択): $\mathcal{P}$ の中で、最適値が一番低い問題 $P_L^{(M)} (M \in \mathbb{N}_0)$ を選び、 $\mathcal{P}$ から取り除く。

ステップ4 (成分番号選択): 問題 $P_L^{(M)} (M \in \mathbb{N}_0)$ の最適解 (緩和解) に対して(34),(32)の操作を行い、分枝対象とする成分番号 $\hat{m}$ を選択する。

ステップ5 (分割位置選択): ステップ4で選択された $\hat{m}$ について(35)の操作を行い、分割位置 $\hat{t}$ を選択する。

ステップ6 (分枝操作): ステップ4,5で選択された成分番号 $\hat{m}$ および分割位置 $\hat{t}$ に対して、問題 $P_L^{(M)}$ の許容領域を $x_{\hat{m}} = \hat{t}$ で二分割する。(31)に示されるような二つの子問題 $P_L^{(N)}, P_L^{(N+1)}$ が得られる。それぞれにアルゴリズム2.1を繰り返し適用して領域縮小を行ってから $P_L^{(N)}, P_L^{(N+1)}$ を解き、 $N \leftarrow N+2$ とする。許容解が得られた子問題を $\mathcal{P}$ に加え、許容な子問題において最も低い最適値を $\hat{f}$ とする。 $\hat{f} > \underline{f}$ の場合、 $\underline{f} \leftarrow \hat{f}$ と更新する。

ステップ7 (終了判定): N が設定した値 $\bar{N}$ を超えた場合、あるいは緩和ギャップ $\bar{f} - \underline{f} \leq \varepsilon$ の場合、 $\underline{f}$ を下界値として出力して終了する。そうでなければステップ3に戻る。

を定義する。(31)における成分番号 m および分割位置 t の決定方法を以下に説明する。

親問題 $P_L^{(M)}$ の最適解 (緩和解) を $\hat{\xi} = (\hat{y}^T, \hat{u}^T, \hat{z}^T)^T$ とする。緩和解の精度を向上させるためには緩和解付近で分割することが望ましい。(19)で定義したように x_i に $y_i^{(1)}$ を対応させたので、分割後に最も下界を上昇させるような最適成分番号 $\hat{m}$ を次式から求める。

$$\hat{m} = \arg \max_{i \in \{1, 2, \dots, n_x\}} \{ f_N^{Bmm}(m, t) \mid m = i, t = \hat{y}_i^{(1)} \} \quad (32)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \underline{f}_N^B(m, t) &= \min_{\xi} [f(\xi)] \mid \xi \in \mathcal{F}_L''(\underline{x}, \bar{x}^B(m, t), \underline{u}, \bar{u}), \\ \underline{f}_{N+1}^B(m, t) &= \min_{\xi} [f(\xi)] \mid \xi \in \mathcal{F}_L''(\underline{x}^B(m, t), \bar{x}, \underline{u}, \bar{u}), \end{aligned} \quad (33)$$

$$f_N^{Bmin}(m, t) = \min \{f_N^B(m, t), f_{N+1}^B(m, t)\}$$

とする。なお、(32)を解くためには $2n_x$ 個の線形計画問題を解く必要がある。最適成分番号 $\hat{m}$ を決定した後に、最適分割位置の計算を行う。非凸制約 $\xi \in \mathcal{N}$ を満たせば

$$\begin{aligned} x_i &= y_i^{(1)} = (y_i^{(2)})^{1/2} = (y_i^{(3)})^{1/3} = (y_i^{(4)})^{1/4} \\ &= z_{i,j}^{(1)} / u_j = (z_{i,j}^{(2)} / u_j)^{1/2} = (z_{i,j}^{(3)} / u_j)^{1/3} = (z_{i,j}^{(4)} / u_j)^{1/4}; j \in \mathcal{K}(i) \end{aligned}$$

が成立するが、緩和解 $\hat{\xi}$ においてこの関係が成立しているとは限らない。そこで、 $\hat{x}$ への逆写像が存在する上限

$$\bar{y}_i^{(1)} = \max \{ (y_i^{(k)})^{1/k}, (z_{i,j}^{(k)} / u_j)^{1/k}; k = 1, 2, 3, 4, j \in \mathcal{K}(i) \} \quad (34)$$

を与えて、最適分割位置の計算を次式から行う。

$$\hat{t} = \arg \max_{\bar{y}_i^{(1)} \leq t \leq \bar{y}_i^{(1)}} \{f_N^{Bmin}(\hat{m}, t)\} \quad (35)$$

(35)は1変数最適化問題であるが、(33)を評価するために線形緩和問題を繰り返し解く必要がある。次章の数値解析例では指定回数を10回以内と与えた黄金分割法¹⁸⁾を用いて最適分割位置 $\hat{t}$ を求めた。このような分枝限定法をアルゴリズム2.2に示す。

アルゴリズム2.2においては多数の緩和問題を解く必要がある。ただし、これらの緩和問題は線形計画問題であるので、数値的に安定かつ高速な線形計画ソルバーを利用可能である。

3 数値解析例

3.1 3層3スパンモデル解析例

図7に示す3層3スパン鋼構造純ラーメン骨組モデルの例題を考える。すべての部材でSN490級鋼を用い、柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用いる。床荷重の幅を6.4メートルとし、床荷重として基準階7.75kN/m²、R階10.09kN/m²を与え、図7に示すように基準階、R階にそれぞれ一様分布荷重を49.6kN/m, 64.6kN/mと与える。さらにAi分布(C₀=0.2)に従った水平荷重を図7に示すように与える。本論文では仮定1,2,3の下で1次短期設計のみを考え、1次短期設計用荷重時には鉛直荷重と水平荷重を同時に作用させ、許容最大層間変形角として全層1/200以下、短期許容応力度として325N/mm²を与える。

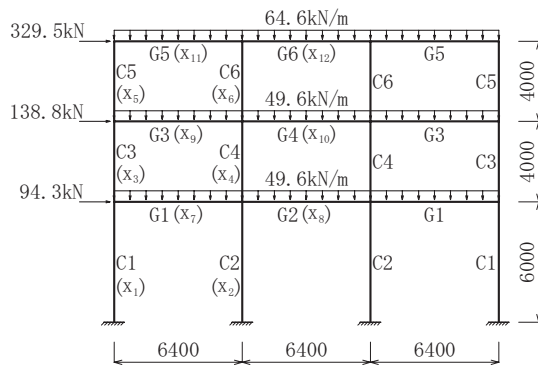


図7 3層3スパンモデル

部材断面の設計変数は図7に示す断面番号に対応するように与え、さらに対応する設計変数の上下限値を次のように与える。

$$\begin{cases} 10 \leq x_i \leq 40; & i = 1, 2, \dots, 6, & (\text{柱部材断面}) \\ 10 \leq x_i \leq 20; & i = 7, 8, \dots, 12 & (\text{梁部材断面}) \end{cases} \quad (36)$$

上界として適当な許容解を求めるために、非線形最適化法である有効制約法¹⁹⁾により元問題 P_0 を解く。設計変数の初期値としては(36)における上限値を与えた。以上より求められた上界(局所解の目的関数値)は $\bar{f} = 1.602\text{m}^3$ であった。この設計解の断面積分布を線の太さに比例させて描いたものを図8に示す。

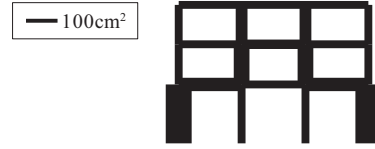


図8 上界に対応する)局所解の断面積分布

次に変位の上下限値を設定するために、変位の各成分について

$$\begin{aligned} \underline{u}_i &:= \min_{x, u} \{u_i \mid K(x)u = P, Ru \leq \bar{\delta}, s(x, u) \leq 0, \\ &\quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, f(x) \leq 1.05\bar{f}\}, \\ \bar{u}_i &:= \max_{x, u} \{u_i \mid K(x)u = P, Ru \leq \bar{\delta}, s(x, u) \leq 0, \\ &\quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, f(x) \leq 1.05\bar{f}\}, \end{aligned}$$

を求める。ここでも有効制約法を用い、上界に対応する設計解を初期値として与える。以上に対し、問題数の上限値 $\bar{N} = 300$ 、許容ギャップ $\varepsilon = 0$ を与え、アルゴリズム2.2を適用する。実行環境は

CPU : Intel Core i7 2600K 3.4GHz, OS: Windows 7,
MATLAB R2011a¹⁸⁾, CPLEX 12.2²⁰⁾

である。この解析例において、一回の分枝すなわちアルゴリズム2.2におけるステップ3からステップ6を一度行うには平均76秒を要した。なお、一回の分枝では多数の線形計画問題を解いた結果として二つの子問題の最適値が得られる。上下界の目的関数の乖離度を $(\bar{f} - \underline{f}) / \bar{f}$ と定義し、子問題を解く回数と乖離度との関係を表2および図9に示す。表2に示すように、300の子問題を解き終わった段階での乖離度は2.59%であった。これは図9に示した設計解から目的関数値を2.59%以上は減らすことができないことを意味する。

表2 子問題数と乖離度の関係 (3層3スパンモデル)

子問題数	下界値 $\underline{f}$ (m ³)	上界値 $\bar{f}$ (m ³)	乖離度 ($\bar{f} - \underline{f}$) / $\bar{f}$
0	1.372	1.602	14.34%
50	1.514	1.602	5.43%
100	1.538	1.602	3.97%
200	1.554	1.602	2.97%
300	1.560	1.602	2.59%

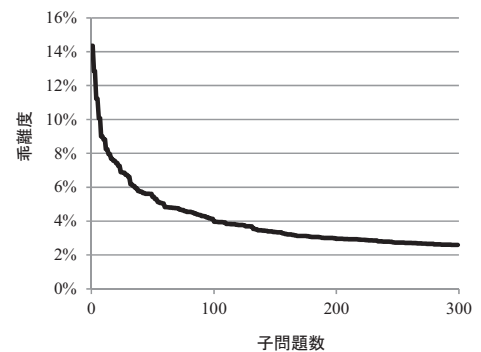


図9 子問題数と乖離度の関係 (3層3スパンモデル)

2.59%以下であればさらに小さい目的関数値を持つ設計解が存在する可能性はある。このことを確認するために、300の子問題を解き終わった段階でのアルゴリズム2.2における問題集合 $\mathcal{P}$ に含まれる分割領域、すなわち現在の局所解よりも良い設計解が存在する可能性が残る領域の全てについて、非凸制約(20)を考慮して有効制約法を用いて解き直した。これは、多点探索による非線形最適化を行って上界値を更新したとも解釈できる。以上により新たに発見された設計解のうち代表的なものについて、図8と同じ縮尺で線の太さに比例させた断面積分分布を図10に示す。また、これらの設計解の目的関数値、最初に設定した上界、および300の子問題を解き終わった段階での下界を併せて表3に示す。

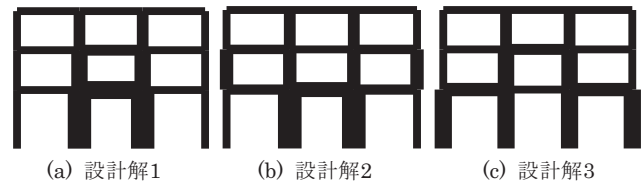


図10 新たに発見された設計解の断面積分分布

表3 新たに発見された局所解の目的関数値

	上界	下界	設計解1	設計解2	設計解3
目的関数値(m ³)	1.602	1.560	1.569	1.606	1.633

最初に設定した上界よりもさらに小さな目的関数値を持つ設計解が存在することが表3より確認され、そのような最良の設計解である設計解1の目的関数値と下界との乖離度は0.58%であった。さらに小さな目的関数値を持つ設計解が存在する可能性はあるものの、そのような設計解と設計解1との目的関数値の差は0.58%以内に必ず収まることが保証される。必要であれば分枝操作をさらに続けることによりその精度をより高めることも可能である。

図8に示した局所解は下層の柱が上層の柱よりも小さい、所謂チェッカーボード状の断面積分分布である。一方、最良の設計解である図10における設計解1は中央の柱部材が大きい、言わば中央コアを配置した断面積分分布に近い。チェッカーボード状の断面積分分布が非線形最適化法により最適解として得られることが多いが、信頼性の不確かな局所解のみから問題の定性的な傾向を把握する結論付けることは難しい。よって、本研究で示すような方法の有用性が例示されたと言える。

3.2 7層3スパンモデル解析例

図11に示すような7層3スパン鋼構造純ラーメン骨組モデルの例題を考える。柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用い、設計変数の上下限値を次のように与える。

$$\begin{cases} 15 \leq x_i \leq 40; & i = 1, 2, \dots, 14, \quad (\text{柱部材断面}) \\ 10 \leq x_i \leq 20; & i = 15, 16, \dots, 12 \quad (\text{梁部材断面}) \end{cases} \quad (37)$$

床荷重の幅を6.4メートルとし、図11に示すような鉛直荷重および水平荷重を与える。その他については前節で述べた3層3スパンモデル解析例と同様に設定する。

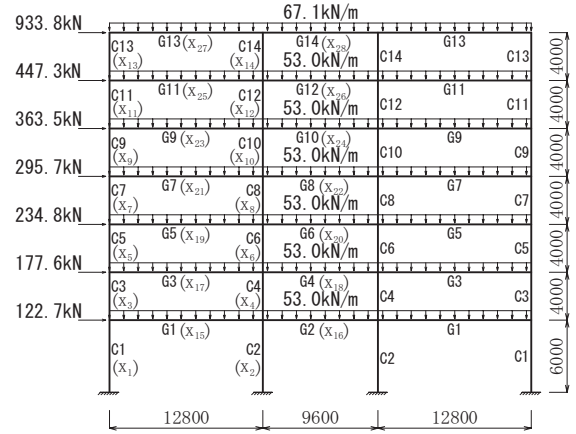


図11 7層3スパンモデル

有効制約法により得られた目的関数値の上界は $\bar{f} = 10.774 \text{ m}^3$ であり、一回の分枝を行うには平均1,049秒を要した。子問題を解く回数と目的関数値の上下界の乖離度との関係を図12に示す。

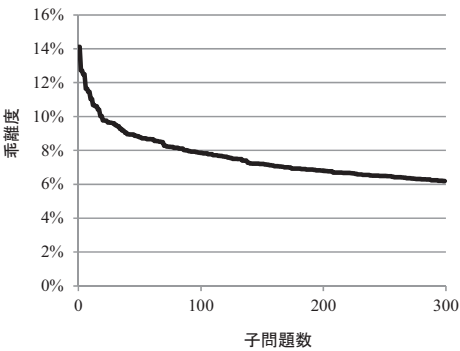


図12 子問題数と乖離度の関係 (7層3スパンモデル)

300の子問題を解き終わった段階での下界と上界との乖離度は6.19%であり、モデルの規模が大きくなるにつれて緩和界の精度が低下していると推察される。ただし、これは解くべき子問題の数を制限した場合のことであり、子問題の数を無限に増やすことを許せば正確な最適値を得られることが理論的には知られている¹⁰⁾。よって、問題の規模に関わらず必要とするだけの精度を有する下界を得ることも理論的には可能である。上界に対応する局所解の断面積分分布を線の太さに比例させたものを図13(a)に、前節と同様に有効制約法を用いて新たに探索した設計解を図8(b),(c)に示す。また、これらの設計解の目的関数値を表4に示す。

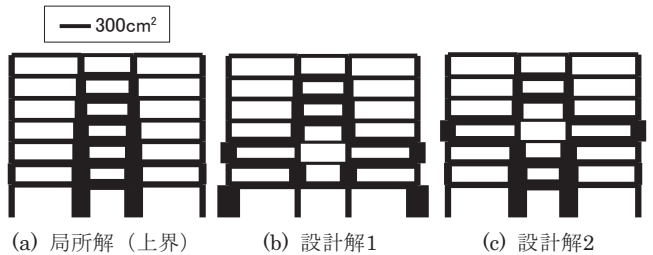


図13 各設計解の断面積分分布

表4 新たに発見された局所解の目的関数値

	上界	下界	設計解1	設計解2
目的関数値(m ³)	10.774	10.106	11.104	11.125

表4に示されるように、この解析例においては最初に設定した上界よりも良い目的関数値を持つ設計解は発見できなかった。よって、この場合は最初に設定した上界が良い推定値であったと言える。このような上界（局所解）の妥当性の定量的評価は本手法のような凸緩和方法を用いて初めて可能となるものである。また、この解析例においてもチェッカーボード状の設計解はコスト増加につながっている。どのような設計解が有利かはモデル化や設計条件により変わり、一概には言えないことが予想される。既往のアプローチでは精度の不確かな局所解しか発見できないので、そのような方法に基づいて最適解の定性的な考察を行うことは妥当ではない。本方法を用いれば、ある設計解がどの程度有利であるかを定量的に確認することが可能である。このような厳密な意味での定量的なスタディを重ねて初めて、ある与えられた条件ではどのような設計が望ましいかの定性的な考察が可能になると考える。

4 まとめ

本論文で得られた結論は以下の通りである。

- (1) 鋼構造平面骨組の鋼材量最小化問題について多項式計画問題の定式化、およびRLTに基づく線形緩和問題の定式化を示した。このような定式化により、鋼構造平面骨組における局所解に対して、どの程度妥当な解であるかを評価することができる。
- (2) 新たな領域分割の方法に基づく分枝限定法により、緩和問題の精度を向上する方法を示した。分枝限定法では多数の緩和問題を解く必要がある。ただし、これらの緩和問題は線形計画問題であるので、大規模な問題を数値的に安定かつ高速に解くことができる線形計画ソルバーを利用可能である。
- (3) 緩和（下界）と局所解（上界）を用いて、局所解の信頼性をどの程度評価することが可能かについて、数値解析例を通じて調べた。3層3スパンモデル解析例では、大域的最適解との目的関数値の差が0.58%以内に保証された設計解を得られた。一方、3層3スパンモデル解析例と同様に解くべき子問題数を300に制限した場合、7層3スパンモデル解析例では上界と下界との乖離度が6.19%であり、規模が大きくなるに従い精度は低下した。
- (4) 3層3スパンモデル、7層3スパンモデルどちらの解析例においても、チェッカーボード状の設計解はコスト増加につながっていた。どのような設計解が有利かは、モデル化や設計条件により変わることが予想される。本方法のような厳密な意味での定量的なスタディを重ねて初めて、このような問題の定性的な考察が可能になると考える。

謝辞

本研究の一部は、科研費(No.23360245)、および財団法人鴻池奨学財団「平成23年度助成対象研究」の助成を受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) J. S. Arora: Optimaization of Structural and Mechanical Systems, World Scientific, 2007
- 2) R. T. Haftka, Z. Gürdal: Elements of structural optimization, Springer, 1992
- 3) M. Ohsaki: Local and global searches of approximate optimal designs of regular frames, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.67, No.1, pp.132-147, 2006
- 4) 松本慎也, 荒井宏, 春日康博, et al: 鉄骨骨組構造の最小重量設計における局所解の一例, 構造工学論文集, B, Vol.45, pp.249-258, 1999
- 5) 久保幹雄, 田村明久, 松井知己: 応用数値計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.5
- 6) 澤田樹一郎, 松尾彰: 弾性・塑性制約下における鋼構造建築骨組の離散最適化問題に対する列挙型アルゴリズムの改善解法, 日本建築学会構造系論文集, No.574, pp.93-98, 2003.12
- 7) NZ Shor: Dual quadratic estimates in polynomial and boolean programming, Annals of Operations Research, Vol.25, No.1, pp.163-168, 1990
- 8) H. D. Sherali, C. H. Tuncbilek: A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique, Journal of Global Optimization, Vol.2, No.1, pp.101-112, 1992
- 9) S. Kim, M. Kojima: Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems, Optimization Methods and Software, Vol.15, No.3-4, pp.201-224, 2001
- 10) T. Fujie, M. Kojima: Semidefinite relaxation for nonconvex programs, Journal of Global Optimization, Vol.10, pp.367-380, 1997
- 11) M. X. Goemans, D. P. Williamson: Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, Journal of the ACM (JACM), Vol.42, No.6, pp.1115-1145, 1995
- 12) Y. Nesterov: Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization, Optimization Methods and Software, Vol.9, No.1/3, pp.141-160, 1998
- 13) J. B. Lasserre: Semidefinite programming vs. LP relaxations for polynomial programming, Mathematics of Operations Research, pp.347-360, 2002
- 14) K. M. Anstreicher: Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming, Journal of Global Optimization, Vol.43, No.2, pp.471-484, 2009
- 15) Hans Mittelmann: Benchmarks for Optimization Software, <http://plato.asu.edu/bench.html>, 2011.08.01
- 16) C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard, G. Savard: A branch and cut algorithm for nonconvex quadratically constrained quadratic programming, Mathematical Programming, Vol.87, No.1, pp.131-152, 2000
- 17) H. D. Sherali, C. H. Tuncbilek: New reformulation linearization /convexification relaxations for univariate and multivariate polynomial programming problems, Operations Research Letters, Vol.21, No.1, pp.1-9, 1997
- 18) MATLAB Mathematics R2011a, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2011
- 19) Optimization Toolbox 6.0 User's Guide, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2011
- 20) IBM ILOG CPLEX V12.2: User's Manual for CPLEX, International Business Machines Corporation, 2010

(2011年9月10日原稿受理, 2011年12月16日採用決定)