

U -cobordism theory における Künneth spectral sequence について

大阪市大 理 吉 村 善 一

§0. 序

Conner-Smith: On the complex bordism
of finite complexes

Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 37 (1970)

の中の Künneth spectral sequence に関するところを中心
として紹介する。だが、我々の今後の目的 (U -cobordism
theory における種の Hopf structure を考える) のために
bordism theory の代わりには cobordism theory について
述べたい。これは Spanier-Whitehead の duality に
よって何の問題も起らない。

§1. Cohomology theory における Künneth spectral sequence について

紹介に入る前には (generalized) cohomology theory に
おける Künneth spectral sequence (Künneth formula)

について今まで知られているものを思い出そう。

(1) ordinary cohomology theory H^* においては Künneth formula が成り立つことはよく知られている。

又、この結果 $H^*(\ ; \mathbb{Z}_p)$ は differential Hopf structure を与えられる。

(2) K^* -theory においては Künneth formula が成り立つことは "Atiyah" によって次の様に示された。 任意の space X に対して、 $K^*(W)$ が free abelian

(= 成り) $K^*(W) \otimes K^*(Y) \cong K^*(W \times Y)$ であって

$f^*: K^*(W) \rightarrow K^*(X)$ が epimorphism であるような

basic space W と basic map $f: X \rightarrow W$ が存在する

とは $K^0(X) = [X, BU]$ $K^1(X) = [X, U]$ である

ことから知るので、 $K^*(X)$ の $\mathbb{Z}$ -module として free resolution $0 \rightarrow K^*(M_f) \rightarrow K^*(W) \rightarrow K^*(X) \rightarrow 0$ が得る。

(= 成り) Künneth spectral sequence

$$E_2 = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(K^*(X), K^*(Y)) \Rightarrow E_{\infty} = \mathcal{O} K^*(X \times Y)$$

は collapse して Künneth formula

$$0 \rightarrow K^*(X) \otimes K^*(Y) \rightarrow K^*(X \times Y) \rightarrow K^*(X) * K^*(Y) \rightarrow 0$$

が成り立つ。

又、"Araki-Toda" は $K^*(\ ; \mathbb{Z}_p)$ において admissible

な積 μ_p は $p \neq 2$ の時 commutative な積 μ_p

は唯一つあるが、 $p=2$ の時は commutative な積 μ_2 は存在しないことを示した。この結果 "Araki" によって $K^*(\quad; \mathbb{Z}_p)$ に (d, λ) -Hopf structure が与えられた。

(3) "Hodgkin" は Atiyah の方法を用いて K_G^* -theory における Künneth spectral sequence を考えたが、これは $K_G^*(W)$ が $R(G)$ -free であっても必ずしも

$K_G^*(W) \otimes K_G^*(Y) \cong K_G^*(W \times Y)$ とはならないところから難しさがあって、ある条件のもとでしか存在するとはわかっていない。しかし $R(G)$ の global dimension は 1 とは限らないので spectral sequence が collapse して Künneth formula が成り立つかどうかはわからない。

4) "Minami" は $\mathbb{Z}$ の global dimension は 1 であるので $R(G)$ -module $K_G^*(X)$ を $\mathbb{Z}$ -module とみなすことによって trivial spectral sequence

$E_2 = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(K_G^*(X), K_G^*(Y)) \Rightarrow E_{\infty} = \bigoplus K_{G \times H}^*(X \times Y)$ を construct して K -theory における Künneth formula を拡張した Künneth formula

$0 \rightarrow K_G^*(X) \otimes K_H^*(Y) \rightarrow K_{G \times H}^*(X \times Y) \rightarrow K_G^*(X) * K_H^*(Y) \rightarrow 0$ を得た。

(5) KO^* -theory は space X に trivial involution をもった space とみなした時 $KO^*(X) \cong KR^*(X)$ である

ので, $KO^* = KR^* = \mathbb{Z}[\eta_1, \eta_4] / 2\eta_1 = 0, \eta_1^3 = 0, \eta_1\eta_4 = 0, \eta_4^2 = 4$
 の global dimension が finite ならば Atiyah の方法が
 適用できる。だが残念なことに, それは infinite らしく
 KO^* -theory に関してはまだ知られていない。

(6) 重要な cohomology theory の中で残されたものとして
 U -cobordism theory U^* がある。これにおける Künneth
 spectral sequence の考察が先に挙げた Conner-Smith の
 paper の中で上に挙げた cohomology theories におけると
 同様に Atiyah の方法によってなされている。

又, $U^*(\mathbb{Z}_p)$ においても $K^*(\mathbb{Z}_p)$ と同様に admissible
 な積 μ_p が p 個あって, $p \neq 2$ の時は commutative な積 μ_p が
 唯一あり, $p = 2$ の時は "Kamata" により commutative
 な積 μ_{p_2} は存在しないことが知られている。

§ 2. Finiteness theorems

(Def) Ω は ring with 1 とする。

Ω -module M が coherent である

$\Leftrightarrow M$ は finitely generated submodule of M が finitely
 presentable である。

Rem (i) coherent Ω -module は finitely generated Ω -module
 である。

(2) Noetherian ring is coherent ring である。

Prop $U^* = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ $\deg x_i = -2i$

is coherent ring である。

Prop $M \rightarrow M'$ is exact triangle of Ω -modules
 $\swarrow \searrow$
 M'' である。

two of Ω -modules M, M', M'' are coherent

$\Rightarrow$ the third is coherent である。

Th 1 X is finite CW-complex である。

$U^*(X)$ is coherent U^* -module である。

(証明) $U^*(S^n)$ is coherent module であるので X の cells の数によって帰納法によって示される。

Th 2 X is finite CW-complex である。

$\text{hom dim}_{U^*} U^*(X) < +\infty$ である。

(証明) $U^*(X)$ is coherent U^* -module であることと
 $\text{gl dim } \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] = n+1 < +\infty$ であることより
 示される。

Th 3 X is finite CW-complex である。

次の条件 (1) ~ (4) は同値である。

(1) $\text{hom dim}_{U^*} U^*(X) = 0$

(2) $U^*(X)$ is projective U^* -module である。

(3) $U^*(X)$ is free U^* -module である。

$$0 \leftarrow \tilde{U}^*(X_0) \leftarrow \tilde{U}^*(W_0) \leftarrow \cdots \leftarrow \tilde{U}^*(W_{k-1}) \leftarrow \tilde{U}^*(W_k) \leftarrow 0$$

is free resolution of $U^*(X)$ as U^* -module τ exists.

Prop X is finite CW-complex $\iff$ exists.

finite CW-complex W & map $f: S^l X^+ \rightarrow W$
such that (i) $H^*(W)$ is free abelian τ exists
(ii) $f^*: U^*(W) \rightarrow U^*(S^l X^+)$ is epimorphism
 τ exists, $\iff$ exists.

(証明) $U^*(X) = \varinjlim [S^{2n-k} X^+ MU(n)]$ is
finitely generated U^* -module τ exists
 $H^*(MU(n)_N) = H^*(G_{n,N})$ is free abelian τ exists.

Cor X is finite CW-complex $\iff$ exists.

U -cobordism resolution of X exists.

lem W, Y are finite CW-complexes $\iff$ exists.

$U^*(W)$ is free U^* -module τ exists $\iff$ exists

$$U^*(W) \otimes_{U^*} U^*(Y) \xrightarrow{\cong} U^*(W \times Y)$$

(証明) $U^*(W) \otimes_{U^*} U^*(Y) \rightarrow U^*(W \times Y)$ is morphism
of generalized cohomology theories τ exists $\iff$ Y is cells
of finite type τ is isomorphism $\iff$ exists.

Th 4 X, Y are finite CW-complexes $\iff$ exists.

natural spectral sequence $\{E_r(X, Y), d_r(X, Y)\}$
with $E_r(X, Y) \Rightarrow U^*(X \times Y)$

$$\begin{aligned}
E_2^{-p, q}(X, Y) &\cong T_{\cap_{U^*}}^{-p, q}(U^*(X), U^*(Y)) \\
0 = F^{-1}(X, Y) &< F^0(X, Y) < F^{-1}(X, Y) < \dots < U^*(X \times Y) \\
&\quad \parallel \\
&\quad \text{Im} \{ U^*(X) \otimes_{U^*} U^*(Y) \rightarrow U^*(X \times Y) \} \\
\text{edge homomorphism; } E_2^{0, *}&\longrightarrow E_{\infty}^{0, *} = F^0(X, Y) \\
&\quad \parallel \\
&\quad U^*(X) \otimes_{U^*} U^*(Y) \longrightarrow U^*(X \times Y)
\end{aligned}$$

が存在する。

(証明) U -cobordism resolution of X

$$S^l X^+ = X_0 \xrightarrow{W_0} X_1 \cdots X_{k-1} \xrightarrow{W_{k-1}} X_k = W_k$$

が存在する n について $S^n X_0$ の filtration は

$$X_n \subset S X_{n-1} \subset \dots \subset S^n X_0 \quad \text{で与えられる。}$$

$$D^{-p, q} = \bigcup^{q+l+1} (S^{p+1} X_0 \wedge Y_0, X_{p+1} \wedge Y_0)$$

$$E^{-p, q} = \bigcup^{q+l+1} (S X_p \wedge Y_0, X_{p+1} \wedge Y_0)$$

$$\cong \tilde{U}^{q+l} (W_p \wedge Y_0)$$

$$\cong (\tilde{U}^*(W_p) \otimes_{U^*} \tilde{U}^*(Y_0))^{q+l}$$

$$\text{よって } E_2^{-p, q} = T_{\cap_{U^*}}^{-p, q+l} (\tilde{U}^*(X_0), \tilde{U}^*(Y_0))$$

$$= T_{\cap_{U^*}}^{-p, q} (U^*(X), U^*(Y)) \quad \text{となる。}$$

Th 5 E の Künneth spectral sequence は

non-trivial である。

(証明) Künneth formula が成り立たない space が存在する。