

Mora-Viana による Hénon type strange attractor についての結果の紹介 II

愛媛大理 平出 耕一 (Koichi Hiraide)

M. Hénon [H] は次の (*) で定義される 2 次元写像 $h_{a,b} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の力学系を考察し、数値実験によりパラメーター値 $a = 1.4, b = 0.3$ において複雑な構造を持つと思われる attractor を発見した。

$$(*) \quad h_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

これ以後、上の写像 (Hénon map) の力学系がいろいろな立場から研究されている (三波氏による「Hénon map について」を参照されたい)。しかしながら、Hénon が見つけた attractor の構造は、現在でもまだ理解されていない様である。

最近、M. Benedicks と L. Carleson は、Hénon map に対し 'strange attractor' が、厳密な意味で、存在することを証明した。

定理 1 (Benedicks – Carleson[BC])

領域 $\{x > 0, y > 0\} \subset \mathbf{R}^2$ にある双曲型不動点の不安定多様体を W^u で表わす。任意の $0 < c < \log 2$ に対し $b_0 > 0$ が存在して、各 $0 < b < b_0$ に対し Lebesgue 測度が正の集合 $E(b)$ を選ぶことが出来、すべての $a \in E(b)$ に対し次が成立する：

(i) 或る開集合 $U = U(a, b) \neq \emptyset$ があって、すべての $z \in U$ に対し

$$\text{dist}(h_{a,b}^n(z), \overline{W^u}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) 点 $z_1 \in W^u$ が存在して次の (a) と (b) が成り立つ：

$$(a) \quad \overline{\{h_{a,b}^n(z_1) : n \geq 0\}} = \overline{W^u}$$

$$(b) \quad \|Dh_{a,b}^n(z_1)(1, 0)\| \geq e^{cn} \quad (\forall n \geq 0)$$

上の定理の $\overline{W^u}$ は双曲型にはならない。このことは、双曲型 attractor の性質から得られる ([P])。また、定理の証明からも分かる。

定義 1

M は曲面とし $f : M \rightarrow M$ は微分同相写像とする。 f で不変なコンパクト部分集合 $\Lambda \subset M$ が f の attractor であるとは、 Λ の安定集合

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M : \text{dist}(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

の内部は $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$ となるときをいう。attractor Λ が strange であるとは、 Λ は有限集合でなく、点 $z_1 \in \Lambda$ が存在して次の (a) と (b) が成り立つときとする：

(a) $\overline{\{f^n(z_1) : n \geq 0\}} = \Lambda$,

(b) 接ベクトル $v \in T_{z_1}M, v \neq 0$ と $\lambda > 1$ が存在して、 $\|Df^n(v)\| \geq \lambda^n \|v\|$ ($\forall n \geq 0$).

また、 $f^{-1} : M \rightarrow M$ の attractor を f の repellor と呼び、strange repellor が定義される。

I を区間とし $F : M \times I \rightarrow M$ を C^r 写像とする。各 $\mu \in I$ に対し $F(\cdot, \mu) : M \rightarrow M$ が C^r 微分同相写像であるとき、 F を C^r 微分同相写像の one parameter family と呼ぶ。ここで、 I は 0 を内点として含むとしておく。

L.Mora と M.Viana は、Benedicks-Carlson の方法を homoclinic bifurcation の枠組みの中に持込んで、次の定理 2 を証明した。

定理 2 (Mora – Viana[MV])

(f_μ) を曲面の C^r 微分同相写像の one parameter family とし次の (A1), (A2), (A3) を仮定する。

(A1) f_0 は双曲型周期点 p_0 を持ち、微分 $Df_0^n(p_0)$ の固有値 λ_0, σ_0 について、 $|\lambda_0 \sigma_0| \neq 1$ であり、 $\ell + m \leq r - 2$ となる自然数 ℓ, m に対し $\lambda_0^\ell \sigma_0^m \neq 1$ である。ここで、 n は p_0 の周期を表わす。

(A2) 安定多様体 $W^s(p_0)$ と不安定多様体 $W^u(p_0)$ について、Homoclinic tangency の点 $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$ が存在し、 q において $W^s(p_0)$ と $W^u(p_0)$ は 2 次の order で接している。

(A3) パラメーター μ に関して、 $\frac{\partial f_\mu(q)}{\partial \mu} \big|_{\mu=0}$ は $W^u(p_0)$ の q における接線に横断的である。

このとき、 r が十分大ならば (例えば、 $r=140$)、Lebesgue 測度が正のパラメーター値 μ の集合 E が $\mu = 0$ の近くに存在して、すべての $\mu \in E$ に対し f_μ は、 f_0 による q の軌道の近傍に strange attractor あるいは strange repellor を持つ。

定理 2 の strange attractor (strange repellor) は、定理 1 と同様、双曲型でない。

以下で、定理 2 の Mora-Viana による証明の概略を述べる。

§1 Renormalization と Hénon-like family

(f_μ) を曲面の C^r 微分同相写像の one parameter family とし定理 2 の (A1), (A2), (A3) を仮定する。 p_0 は f_0 の双曲的不動点としてよい。陰関数定理より μ が 0 に十分近ければ、 f_μ は双曲型不動点 p_μ を持ち $\mu \rightarrow p_\mu$ は C^r 写像となる。 λ_μ, σ_μ を $Df_\mu(p_\mu)$ の固有値とする。このとき λ_μ, σ_μ はそれぞれ μ の C^{r-1} 関数である。(A1) と Gornov の定理 ([B]) より $C^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}$ 局所座標 $(U, (\xi, \eta))$ が存在して

$$U \supset \{(\xi, \eta) : |\xi| \leq 2, |\eta| \leq 2\},$$

$$p_\mu = (0, 0),$$

$$f_\mu(\xi, \eta) = (\sigma\xi, \lambda\eta), \quad \sigma = \sigma_\mu, \quad \lambda = \lambda_\mu.$$

(A1) より $|\sigma_0 \lambda_0| \neq 1$ 。以後、 $|\sigma_0 \lambda_0| < 1, 0 < |\lambda_0| < 1 < |\sigma_0|$ の場合を考える。(A2) の homoclinic tangency の点 q は $q = (1, 0)$ であるとして一般性を失わない。また、 $f_0^N(q) = r = (0, 1)$ となる $N > 0$ が存在するとしてよい。このとき (A2), (A3) より

$$f_\mu^N(1 + \xi, \eta) = (\alpha\xi^2 + \beta\eta + v\mu + H_1(\mu, \xi, \eta), 1 + H_2(\mu, \xi, \eta))$$

となる。ここで H_1, H_2 は $C^{[\frac{r-1}{2}]}$ 関数であり

- (1) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, v \neq 0, \frac{\partial}{\partial \xi} H_2(0, 0, 0) \neq 0$
- (2) $H_1 = \partial_\xi H_1 = \partial_{\xi\xi} H_1 = \partial_\eta H_1 = \partial_\mu H_1 = H_2 = 0$ at $(\mu, \xi, \eta) = (0, 0, 0)$,
- (3) $v = 1, \partial_{\mu\mu} H_1(0, 0, 0) = 0$.

ただし (3) に対しては parameter μ の座標変換を必要とする。上の (1), (2), (3) より

$$\begin{aligned} H_1(\mu, \xi, \eta) &= C_1 \eta^2 + C_2 \mu \xi + C_3 \xi \eta + C_4 \mu \eta + O(3), \\ H_2(\mu, \xi, \eta) &= D_1 \mu + D_2 \xi + D_3 \eta + O(2), \quad D_2 \neq 0. \end{aligned}$$

次で定義される座標変換を $\phi_n : (\mu, \xi, \eta) \rightarrow (a, x, y)$ で表わす。

$$\begin{cases} a &= -\alpha(\sigma^{2n}\mu - \sigma^n + \beta\lambda^n\sigma^{2n}) \\ x &= -\frac{\alpha}{a}\sigma^n(\xi - 1) \\ y &= -\frac{\alpha}{a}\sigma^{2n}(\sqrt{\lambda\sigma})^{-n}(\eta - \lambda^n) \end{cases} \quad \begin{cases} \mu &= -\frac{a}{\alpha}\sigma^{-2n} + \sigma^{-n} - \beta\lambda^n \\ \xi - 1 &= -\frac{a}{\alpha}\sigma^{-n}x \\ \eta &= -\frac{a}{\alpha}\sigma^{-2n}(\sqrt{\lambda\sigma})^n y + \lambda^n \end{cases}$$

$f(\mu, \xi, \eta) = (\mu, f_\mu(\xi, \eta))$ において

$$\varphi_n(a, x, y) = \phi_n \circ f^n \circ f^N \circ \phi_n^{-1}(a, x, y)$$

とする。このとき、 $R = \{(a, x, y) : 1 \leq a \leq 3, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ に対し、 $n > 0$ が十分に大ならば、 $\varphi_n : R \rightarrow \mathbf{R}^3$ となる。 $\psi : R \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $\psi(a, x, y) = (a, 1 - ax^2, 0)$ で定義すると

$$\|\varphi_n - \psi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq K(\sqrt{\lambda_0\sigma_0})^n$$

が成り立つ。実際、 $\varphi_n : R \rightarrow \mathbf{R}^3$ は

$$\begin{pmatrix} a \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 1 - ax^2 - \beta(\sqrt{\lambda\sigma})^n y + \sigma^{2n} H_1(\mu, \xi - 1, \eta) \\ -\frac{\alpha}{a}(\sqrt{\lambda\sigma})^n \sigma^n H_2(\mu, \xi - 1, \eta) \end{pmatrix}$$

で与えられる。 $1 \leq a \leq 3$ に対し、 $\varphi_a : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $\varphi(a, x, y) = (a, \varphi_a(x, y))$ によって定義する。one parameter family $(\varphi_a)_a$ を (f_μ) の renormalization と呼ぶ。

定理3

(f_μ) を曲面の C^r 微分同相写像の one parameter family とし定理2の (A1), (A2), (A3) を仮定する。このとき $K > 0, t > 0$ が存在して任意の $b > 0$ に対し (f_μ) の $C^{[\frac{r-1}{2}]}$ renormalization $(\varphi_a)_a$ を次が成り立つ様に選ぶことが出来る：

$$(a) \|\varphi - \psi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq K\sqrt{b}, \quad \text{特に} \quad \|\varphi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq 5 \leq K,$$

$$(b) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D\varphi_a(x, y) \quad \text{において}$$

$$(i) \quad |A| \leq K \quad \frac{1}{K}\sqrt{b} \leq |B| \leq K\sqrt{b}$$

$$\frac{1}{K}\sqrt{b} \leq |C| \leq K\sqrt{b} \quad |D| \leq Kb^{1+t}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{K}b \leq |\det D\varphi_a| \leq Kb \quad \|D\varphi_a\| \leq K \quad \|D\varphi_a^{-1}\| \leq \frac{K}{b}$$

$$\|D_{(a,x,y)}A\| \leq K \quad \|D_{(a,x,y)}B\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+t}$$

$$\|D_{(a,x,y)}C\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+t} \quad \|D_{(a,x,y)}D\| \leq Kb^{1+2t}$$

$$(iii) \quad \|D_{(a,x,y)}(\det D\varphi_a)\| \leq Kb^{1+t} \quad \|D^2\varphi_a\| \leq K$$

$$\|D_{(a,x,y)}^2A\| \leq Kb^t \quad \|D_{(a,x,y)}^2B\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+2t}$$

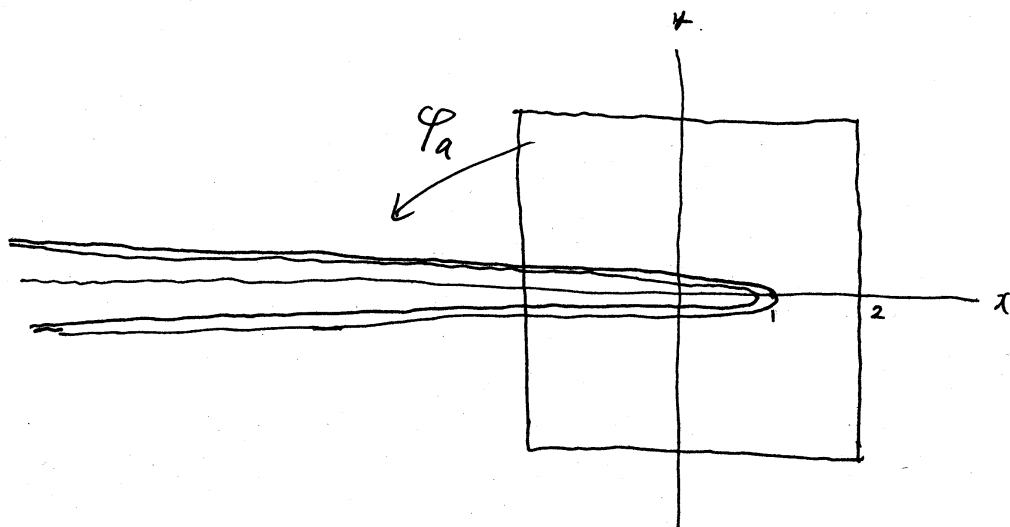
$$\|D_{(a,x,y)}^2C\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+2t} \quad \|D_{(a,x,y)}^2D\| \leq Kb^{1+3t}$$

$$\|D_{(a,x,y)}^2(\det D\varphi_a)\| \leq Kb^{1+2t} \quad \|D^3\varphi_a\| \leq Kb^t$$

定義2

定理3の性質を持つ one parameter family $(\varphi_a)_a$ ここで $\varphi_a : \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $1 \leq a \leq 3$ を Hénon-like family と呼ぶ。ただし $b > 0$ は十分に小さいと考える。また Hénon-like family は次の形であるとイメージすることが出来る：

$$\varphi_a(x, y) = (1 - ax^2 \pm \sqrt{b}y, \pm \sqrt{b}x)$$



定理 4

(φ_a) を C^r Hénon-like family とする。このとき任意の $0 < c < \log 2$ に対し $b_0 > 0$ が存在して、各 $b \in (0, b_0)$ に対し Lebesgue 測度正の集合 $E(b) \subset (1, 2)$ がとれて、すべての $a \in E(b)$ に対し φ_a で不変なコンパクト集合 $\Lambda = \Lambda_a$ が存在し次が成り立つ。

- (1) $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$,
- (2) 点 $z_1 \in \Lambda$ が存在して
 - (a) $\overline{\{\varphi_a^n(z_1) : n \geq 0\}} = \Lambda$,
 - (b) $\|D\varphi_a^n(z_1)(1, 0)\| \geq e^{cn}$, $(\forall n \geq 0)$.

上の Λ は、定理 1 と同様、ある双曲型不動点の不安定多様体の閉包である。また、定理 4 の r は次の不等式を満たしていればよい。

$$r \geq \frac{8 \log \sigma_1^{-1}}{c}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{10K^2}$$

定理 3 と定理 4 から、定理 2 が得られる。以下、定理 4 について説明する。

§2 Attractor Λ の構成

$\varphi = (\varphi_a)_a$ を Hénon-like family とし、 $\psi_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ($1 \leq a \leq 3$) を $\psi_a(x, y) = (1 - ax^2, 0)$ で定義する。このとき $\|\varphi_a - \psi_a\|_{C^r([-2, 2]^2)} \leq K\sqrt{b}$ 。

まず ψ_2 について考える。 ψ_2 の不動点は $P = (\frac{1}{2}, 0)$, $Q = (-1, 0)$ の 2 個で、 $D\psi_2(P)$ の固有値は $-2, 0$ 、 $D\psi_2(Q)$ の固有値は $4, 0$ となり、共に双曲型不動点である。陰関数定理より ψ_2 の C^r 近傍 $\mathcal{N} \subset \{C^k \text{写像} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}^2\}$ と C^∞ 写像 $P, Q : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{R}^2$ が存在して、各 $\varphi \in \mathcal{N}$ に対し $P(\varphi), Q(\varphi)$ は φ の双曲型不動点で、 $\text{Fix}(\varphi) = \{P(\varphi), Q(\varphi)\}$ となる。さらに、これらの不動点の局所安定 (不安定) 多様体は、 C^r 位相で φ に関して連続的に変化する。

命題 2.1

U を $0 \in \mathbf{R}^n$ の近傍とし、 $g_t : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($t \in \mathbf{R}^m$) を C^r 写像の m parameter family とする。また $0 \in \mathbf{R}^n$ は g_0 の双曲型不動点とし、接空間の splitting を $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$ で表わす。 C^r 写像の m parameter family $h = (h_t)$ は $g = (g_t)$ に C^r (bounded) 位相で十分近いとし、 $t \in \mathbf{R}^m$ は 0 の近傍にあるとする。このとき $0 \in U$ の近くに h_t の双曲型不動点 $P(h_t)$ がただ一つ存在し、その局所不安定多様体 $W_{loc}^u(P(h_t))$ に関し次が成り立つ： C^r 写像 $\phi_h(t, \cdot) : B_\epsilon(0) \subset E^u \rightarrow E^s$ が存在して、 $\phi_h(t, \cdot)$ のグラフが $W_{loc}^u(P(h_t))$ となり、さらに $\phi : (h, t, x) \mapsto \phi_h(t, x)$ は C^r 写像となる。特に $h \mapsto \phi_h(\cdot, \cdot) \in C^{r-1}(V, E^s)$ は C^1 写像である。ここで V は $0 \in \mathbf{R}^m \times E^s$ の近傍を表わす。また、局所不安定多様体に関し同様のことが成立する。

$\psi_a(x, y) = (1 - ax^2, 0)$, $1 \leq a \leq 3$ の不動点 $P(\psi_a) = (P(\psi_a), 0)$, $Q(\psi_a) = (Q(\psi_a), 0)$ とその不安定多様体は、次のようになる。

$1 < a < 2$ の場合

$$\frac{1}{2} < P(\psi_a) < 1$$

$$W^u(P(\psi_a)) = [1 - a, a]$$

$$Q(\psi_a) < -1 < 1 - a$$

$$W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, Q(\psi_a)] \cup [Q(\psi_a), 1]$$

$a = 2$ の場合

$$P(\psi_a) = \frac{1}{2}$$

$$W^u(P(\psi_a)) = [-1, 1]$$

$$Q(\psi_a) = -1$$

$$W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, -1] \cup [-1, 1]$$

$2 < a < 3$ の場合

$$0 < P(\psi_a) < \frac{1}{2}$$

$$W^u(P(\psi_a)) = (-\infty, 1]$$

$$1 - a < -1 < Q(\psi_a)$$

$$W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, Q(\psi_a)] \cup (-\infty, 1]$$

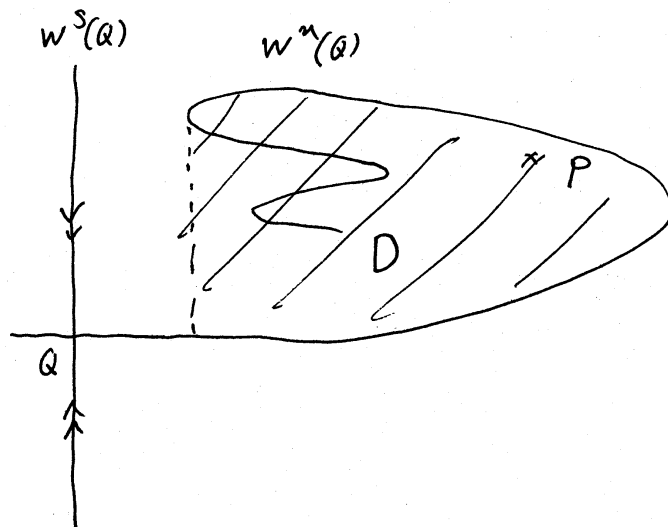
また安定多様体は

$$W^s(P(\psi_a)) = \{P(\psi_a)\} \times \mathbf{R}, \quad W^s(Q(\psi_a)) = \{Q(\psi_a)\} \times \mathbf{R}.$$

従って、 $a = 2$ のとき、 $Q(\psi_a)$ は、 $Q(\psi_a)$ に対する homoclinic tangency の点であり、また $Q(\psi_a)$ と $P(\psi_a)$ に対する heteroclinic tangency の点である。 $a > 2$ のとき、これらは横断的になり、 $a < 2$ のときは、消滅する。局所安定 (不安定) 多様体の変化の連続性より、Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ において、 $b > 0$ が十分小さいならば、 $a = 2$ の近くに $a_+ = a_+(\varphi)$ があって、 $Q(\varphi_{a_+})$ に対し homoclinic tangency の点が存在し、 $a < a_+$ ならばこれらの点は消滅する。同様に、 $a_- = a_-(\varphi)$ があって、 $Q(\varphi_{a_-})$ と $P(\varphi_{a_-})$ に対し heteroclinic tangency の点が存在し、 $a < a_-$ ならばこれらの点は消滅する。

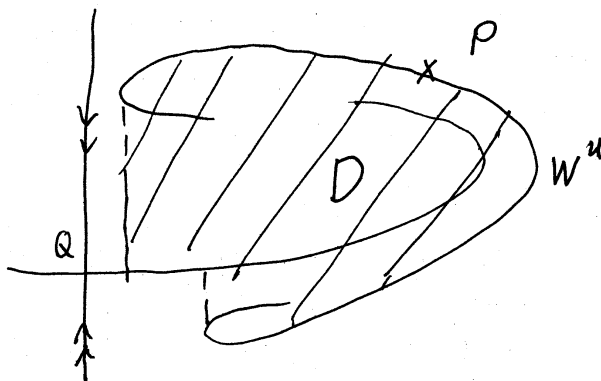
$(\varphi_a)_a$ が orientation preserving の場合：

$a < a_-$ について考える。 $W^u(Q(\varphi_a)) - \{Q(\varphi_a)\}$ の右の separatrix は $[-1, 1] \times \{0\}$ の近傍に含まれていることが、容易に分かる。図の様に disc D を取ると、 φ_a が orientation preserving であることから、 $\varphi_a(D) \subset D$ となる。Brouwer の不動点定理より、 φ_a は D の中に不動点をもつ。これは $P(\varphi_a)$ でなければならない。明かに、 $P(\varphi_a) \in \text{int} D$ である。従って、 $W^u(P(\varphi_a)) \subset D$ 。



$(\varphi_a)_a$ が orientation reversing の場合:

$a < a_+$ について考える。このとき、 $W^u(P(\varphi_a))$ は $[-1, 1] \times \{0\}$ の近傍に含まれる。図の様に disc D を取り、 $\varphi_a(D) \subset D$ を得る。



従って、次が成り立つ。

命題 2.2

Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ に対し、 $\Lambda = \overline{W^u(P(\varphi_a))}$ とおき、上の様に $a = 2$ の近くの a_-, a_+ を定める。 $(\varphi_a)_a$ が orientation preserving ならば、 $a < a_-$ に対し $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$ であり、 $(\varphi_a)_a$ が orientation reversing ならば、 $a < a_+$ に対し $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$ である。

さらに、 $P(\varphi_a)$ の安定多様体もあわせて考えると、次が得られる。

命題 2.3

$(\varphi_a)_a$ が orientation reversing ならば、 $a < a_+$ に対し $W^s(\Lambda)$ は Λ の近傍である。

§3 Critical point

定理 4 (2) を示すために、Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ に対し 1 次元写像 $Q_a(x) = 1 - ax^2$ の議論を適用する。考える parameter a の範囲は、 $a = 2$ に近く、 $a < 2$ かつ $a < a_+$ (または $a < a_-$) であるとする。ここで、 a_+ と a_- は前節のものである。

1 次元写像と同様に、 $\delta > 0$ を十分小さく取って固定する。 $b > 0$ は必要に応じて十分小さいと考える。

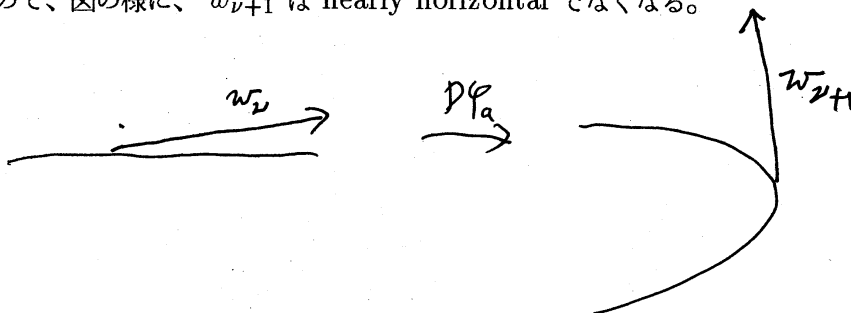
$z_1 \in W^u = W^u(P(\varphi_a))$ と $n \geq 0$ に対し、 $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \varphi_a^n(z_1)$ とおく。また、 $w_n = w_n(z_1) = D\varphi_a^n(z_1) \cdot (1, 0)$ とおく。

$$D\varphi_a \doteq \begin{pmatrix} -2ax & \pm\sqrt{b} \\ \pm\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $|x_n| \geq \delta$ である限り、 w_n はほとんど水平 (nearly horizontal) であり、

$$\|w_n\| \doteq 2a|x_n|\|w_{n-1}\|$$

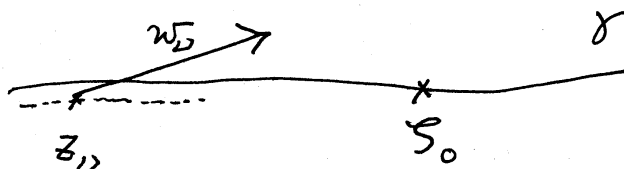
となる。 $\nu > 0$ が return (すなわち、 $|x_\nu| < \delta$) の場合を考えてみる。このとき、 φ_a により "fold" が生ずるので、図の様に、 $w_{\nu+1}$ は nearly horizontal でなくなる。



領域 $\{|x| > \delta\}$ において、 $D\varphi_a$ は y 軸方向に強い contraction の方向を持つ様に思える。そこで、この領域において contraction の方向 $e^{(\infty)}(z)$ (z における一つの単位ベクトル) があったとしてみる。さらに、 z が W^u の "fold" の点であるとき、 $e^{(\infty)}(z)$ は z における W^u の接線に平行な単位ベクトルであるとする。 $w_{\nu+1}$ を水平なベクトル $\omega_{\nu+1}$ と $e^{(\infty)}(z_{\nu+1})$ に平行なベクトル $\sigma_{\nu+1}$ に分解する。

$$w_{\nu+1} = \omega_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$$

$\sigma_{\nu+1}$ を $D\varphi_a$ で写していくと、急激に 0 に収束していく。従って、 $w_{\nu+1}$ と $\omega_{\nu+1}$ を $D\varphi_a$ で何回か写してやると、ほぼ同じになる。そこで、 $\frac{\|w_{\nu+1}\|}{\|\omega_{\nu+1}\|}$ を評価したい。この為に、 $z_{\nu+1}$ の近くで "critical point" $\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0) \in W^u$ 、 $|\xi_0| < \delta$ を取る。ここで、 ζ_0 が "critical point" であるとは、 $\varphi_a(\zeta_0)$ が W^u の "fold" の点のときをいう。 z_ν と ζ_0 の関係は図の様であるとする。



すなわち、 γ は W^u の中の nearly flat な曲線であり、 z_ν と γ の距離 $dist(z_\nu, \gamma)$ は

$$(3.1) \quad dist(z_\nu, \gamma) \ll |z_\nu - \zeta_0|$$

を満たすとする。このとき、 w_ν は γ に接していると思うこと出来るので、 $D\varphi_a(\zeta_0) \cdot w_\nu$ は $e^{(\infty)}(\varphi_a(\zeta_0))$ にはほぼ平行、従って、 $\sigma_{\nu+1} \doteq D\varphi_a(\zeta_0) \cdot w_\nu$ となり

$$\begin{aligned} \|\omega_{\nu+1}\| &\doteq \|D\varphi_a(z_\nu) \cdot w_\nu - D\varphi_a(\zeta_0) \cdot w_\nu\| \\ &\doteq 2a|z_\nu - \zeta_0|\|w_\nu\| \\ &\cong |z_\nu - \zeta_0|\|w_\nu\| \end{aligned}$$

このことから、1次元写像 Q_a と同様の議論が可能となり、 $\|w_n\|$ の増大を計算することが出来る。

上の筋書きで問題になるのは、contraction の方向 $e^{(\infty)}(z)$ の存在である。実際、 $e^{(\infty)}(z)$ の存在と $\|w_n\|$ が指数的に増大することは、双対的な関係になっている。そこで、上の議論を、反復の回数（以後、時間と呼ぶ） n に関する帰納法によって進める。

$\|w_k\|$ が時間 $n-1$ まで指数的に増大すると仮定して、contraction 方向の近似（contractive approximation） $e^{(n-1)}$ と critical point の近似（critical approximation） $z_0^{(n-1)}$ を構成する。また、return に対して (3.1) を満たす critical approximation の点 ζ_0 を選びたいので、ある程度たくさんの critical approximation の点を用意しなければならない。そこで、critical approximation の点の集合 $\mathcal{C}_n$ を構成する。この後、1次元写像と同様の議論によって、parameter a に関する条件 (BA)、(FA) を仮定して、 $\|w_k\|$ が時間 n まで指数的に増大することを証明する。

すべての時間 n にわたって (BA)、(FA) を満たす parameter a の集合 E が Lebesgue 測度正であることは、1次元写像の場合と同様、“bounded distortion” を示すことにより得られる。ただし、critical approximation の点 $z_0^{(n-1)}$ は $W^u = W^u(P(\varphi_a))$ に属しているので、parameter a に依存する。しかし、 $z_0^{(n-1)} : a \mapsto z_0^{(n-1)}$ は C^{r-1} 写像であり、微分は $\|\dot{z}_0^{(n-1)}\| \leq b^\tau$ であることが証明され、1次元写像の場合と同じような議論ができる。ここで $\tau > 0$ は、critical approximation の点、時間 n 等に依存しない定数である。この証明において、Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ の高い微分可能性が必要になる。

最後に、各 $a \in E$ に対し、 $n \rightarrow \infty$ として $\mathcal{C}_n$ の集積点の一つ取って z_0 とする。このとき、 $z_1 = \varphi_a(z_0)$ は定理 4 (2) の (ii) を満たしている。 E の Lebesgue 測度が正であることから、背理法により、(i) が成り立つ parameter a の集合 $\subset E$ も Lebesgue 測度正であることが証明される。

以下では、contractive approximation、critical approximation、帰納法の構造をもう少し具体的に説明する。 E の Lebesgue 測度が正の証明は、1次元写像 Q_a の場合とほぼ同じなので、省略する。

§4 Contractive approximation

λ を次の不等式を満たす実数とする。ここでは、 $\lambda \geq 1$ を仮定しないでおく。

$$\lambda \geq \left(\frac{\delta}{10K} \right)^{10} \gg b > 0$$

定義 3

z_1 が時間 n まで λ -expanding であるとは

$$\|w_k(z_1)\| \geq \lambda^k \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

が成り立つときをいう。

z_1 における接平面の上の単位円 $S = \{v : \|v\| = 1\}$ は、 $D\varphi_a^k(z_1)$ によって楕円 S' に写される。そこで単位ベクトル $e^{(k)} \in S$ を、 $D\varphi_a^k(e^{(k)})$ が楕円 S' の短軸にある様にとる。また、 $f^{(k)} \in S$ を $D\varphi_a^k(f^{(k)})$ が楕円 S' の長軸にある様にとる。このとき、 $e^{(k)}$ と $f^{(k)}$ は直交する。従って

$$\|D\varphi_a^k(e^{(k)})\| \cdot \|D\varphi_a^k(f^{(k)})\| = |\det D\varphi_a^k| \leq (Kb)^k.$$

z_1 が時間 n まで λ -expanding であるとする

$$\|D\varphi_a^k(f^{(k)})\| \geq \lambda^k, \quad \|D\varphi_a^k(e^{(k)})\| \leq \left(\frac{Kb}{\lambda}\right)^k$$

ここで $0 < \frac{Kb}{\lambda} \ll 1$ に注意する。

補題 4.1

z_1 は時間 n まで λ -expanding であるとする。このとき、任意の $1 \leq \mu \leq k \leq n$ に対し、次が成り立つ。

$$(a) |\angle(e^{(\mu)}, e^{(k)})| \leq \frac{3K}{\lambda} \left(\frac{Kb}{\lambda}\right)^\mu$$

$$(b) \|D\varphi_a^\mu(z_1)e^{(k)}\| \leq \frac{4K}{\lambda} \left(\frac{K^2b}{\lambda^2}\right)^\mu$$

もし z_1 が、すべての n について、時間 n まで λ -expanding であると仮定すると、補題 4.1(a) から $e^{(n)}$ はある単位ベクトル $e^{(\infty)}$ に収束し、(b) から $e^{(\infty)}$ は z_1 における contraction の方向となる。

定義 4

z_1 が時間 n まで λ -expanding であるとき、上の $e^{(n)}(z_1) = e^{(n)}$ を z_1 における n 次の contractive approximation と呼ぶ。 $e^{(n)}(z_1)$ は nearly vertical である。実際、 y 軸と $e^{(n)}(z_1)$ の角度は $\sqrt[4]{b}$ 以下である。

定義 5

$z_1 = \varphi_a(z_0) \in W^u$ は時間 n まで λ -expanding とし、 $e^{(n)}(z_1)$ を z_1 における n 次の contractive approximation とする。 $e^{(n)}(z_1)$ が z_1 において W^u に接しているとき、 z_0 を n 次の critical approximation と呼ぶ。

補題 4.2

$z_1 = \varphi_a(z_0)$ は時間 n まで λ -expanding であるとし、 $\sigma = \frac{\lambda}{4K^2}$ とする。このとき、 $|z_0 - \zeta_0| \leq \sigma^n$ となるすべての $\zeta_1 = \varphi_a(\zeta_0)$ に対し

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|w_k(z_1)\|}{\|w_k(\zeta_1)\|} \leq 2 \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

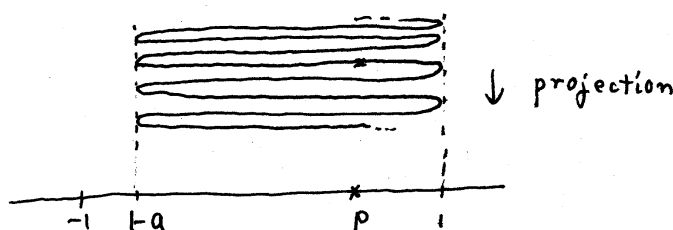
補題 4.3

$K_0 = K_0(K, \lambda) > 0$ が存在して

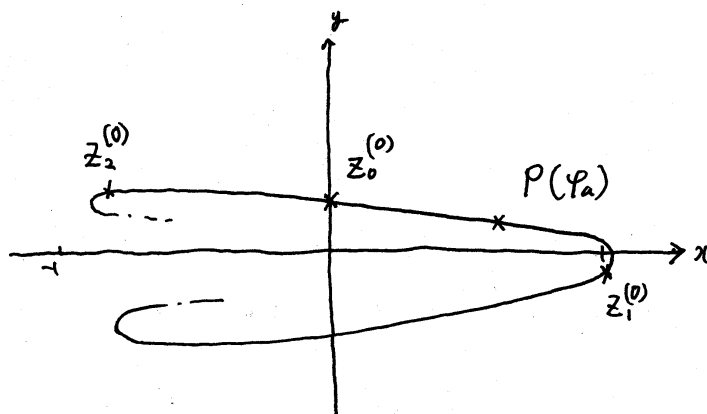
$$\|e^{(k)}\|_{C^2(a, x, y)} \leq K_0 b \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

§5 帰納法の為の準備

パラメータ値 $a=2$ の近くに、区間 $\Omega_0 \subset (1, 2)$ を $\sup \Omega_0 < a_+$ あるいは $\sup \Omega_0 < a_-$ とする様にとる。§2 で見た様に、双曲型不動点 $P(\varphi_a)$ の不安定多様体 $W^u = W^u(P(\varphi_a))$ は $[-1, 1] \times \{0\}$ の近傍に含まれてゐる。また、 $\varphi_a(x, y) = (1 - ax^2, y)$ の不安定多様体 $W^u(P(\varphi_a)) = [-1 - a, 1]$ は



の様に埋め込まれてゐるので、局所不安定多様体の変化の連続性 (命題 2.1) より、 $b > 0$ が十分小さいとき、 $W^u = W^u(P(\varphi_a))$ は



の様になる。 W^u の中で $p = P(\varphi_a)$ に最も近い $W^u \cap \{x=0\}$ の点を $z_0^{(0)}$ で表わす。 $z_1^{(0)} = \varphi_a(z_0^{(0)})$, $z_2^{(0)} = \varphi_a^2(z_0^{(0)})$ とおいて、 $z_1^{(0)}$ と $z_2^{(0)}$ を端点とする W^u の中の弧を $G_0 = [z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$ で表わす。 G_0 の点の generation は 0 であるという。さうして $g \geq 1$ に対し、 $G_g = \varphi_a^g(G_0) \cup \varphi_a^{g-1}(G_0)$ とおき、

G_g の点の generation は g であるという。

定義 6 γ が $C^2(b)$ -curve であるとは、 γ はある関数 $y = y(x)$ のグラフであり、微分について、 $|\dot{\gamma}|, |\ddot{\gamma}| \leq \sqrt[4]{b}$ となることをいう。

$\delta_0 = 5(2-a) > 0$ とおく。 $G_0 \cap \{|x| \leq 1 - \delta_0\}$ は $C^2(b)$ -curve となる。実際、 $G_0 \cap \{|x| \leq 1 - \delta_0\}$ が関数 $y = y(x) = y_\varphi(a, x)$ のグラフであるとすると、

$$\|y_\varphi\|_{C^2(a, x)} \leq \text{const} \sqrt{b} < \sqrt[4]{b}$$

となる。また、 $n \geq 1$ が与えられたとき、任意の $g \leq n$ に対し $G_g \cap \{|x| \leq 1 - \delta_0\}$ は 2^{g-1} 個の成分からなり、それぞれの成分は $C^2(b)$ -curve となる。ここで、 n を大きく取る為には、 $b > 0$ を十分小さくしなければならぬ。

$0 < C_0 < \log 2$ を固定する。次の補題より、 $z_1^{(0)} = \varphi_a(z_0^{(0)})$ は時間 $N-1$ まで e^{C_0} -expanding となる。

補題 6.1 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(c_0, \delta) > 0$, $b_0 = b_0(c_0, \delta) > 0$ が存在して、 $a \in [2 - \varepsilon_0, 2 + \varepsilon_0]$, $0 < b < b_0$ ならば、 φ_a は次の性質をもつ。
 z_0 に対し、 $(x_k, y_k) = z_k = \varphi_a^k(z_0)$ ($k \geq 0$) とおく。 $|x_k| \geq \delta$
 $1 \leq k \leq n$ ならば、 z_1 における単位ベクトルで $|\text{slope}(v)| \leq \sqrt[4]{b}$ となる v に対し

$$(A) \quad |\text{slope } D\varphi_a^k(z) \cdot v| \leq \sqrt[4]{b},$$

$$\|D\varphi_a^{k_r}(z_1) \cdot v\| \leq a |x_{k_r}| \|D\varphi_a^{k_r-1}(z_1) \cdot v\|$$

$$(1 \leq k_r \leq n)$$

(b) $|x_0| \leq \delta$ または $|x_{n+1}| \leq \delta$ ならば、

$$\|D\varphi_a^n(z_1) \cdot v\| \geq e^{nc}.$$

従って、§4 で見たように、 $z_1^{(0)}$ における k 次の critical approximation $e^{(k)}(z_1^{(0)})$ ($1 \leq k \leq N-1$) が定義される。

$$\sigma_1 = \frac{1}{10K^2}$$

と置き、 $\sigma = \sigma_1^{N-1}$ とする。補題 4.2 から、 $|x| < \sigma$ とする $z = z(x) =$

$(x, y(x)) \in G_0$ に対し $\varphi_a(z(x))$ は $N-1$ まで expanding である。

$1 \leq k \leq N-1$ とし、 $e^{(k)}(\varphi_a(z(x)))$ を $\varphi_a(z(x))$ における k 次の critical approximation とする。 $\xi^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$ を $(\xi^{(k)}(x), 1)$ が $e^{(k)}(\varphi_a(z(x)))$ に平行になる様にとる。critical approximation は nearly vertical であるから、

$$(5.1) \quad |\xi^{(k)}(x)| \leq \sqrt{b}$$

また補題 4.3 より

$$(5.2) \quad |\dot{\xi}^{(k)}(x)| \leq 2K K_0 \sqrt{b}$$

$\varphi_a(z(x))$ における W^n の接線方向を $(t(x), 1)$ とおくと

$$t(x) = \frac{A(z(x)) + B(z(x)) \dot{y}(x)}{C(z(x)) + D(z(x)) \dot{y}(x)}$$

そこで $\begin{pmatrix} A & B \\ c & d \end{pmatrix} = D\varphi_a$. 　よきより

$$(5.3) \quad |\dot{t}(x)| \geq \frac{1}{K\sqrt{b}}$$

$z(0) = (0, y(0))$ であるから、明らかに

$$(5.4) \quad |t(0)| \leq 2K^2$$

上の (5.1) ~ (5.4) より

$$|t(0) - z^{(1)}(0)| \leq 3K^2$$

$$|\dot{t}(0) - \dot{z}^{(1)}(0)| \geq \frac{1}{2K\sqrt{b}}$$

$b > 0$ は十分小だから、 $x^{(1)} \in (-\sigma, \sigma)$ がただ一つ存在して、

$$t(x^{(1)}) = z^{(1)}(x^{(1)})$$

そこで $|x^{(1)}| \leq 6K^3\sqrt{b}$ となる。 $z_0^{(1)} = (x^{(1)}, y(x^{(1)}))$ と

おく。構成から $\varphi(z_0^{(1)})$ は 1 次の critical approximation となる。

補題 4.1 (a) より

$$|q^{(2)}(x^{(1)}) - q^{(1)}(x^{(1)})| \leq 3K^2 b$$

(5.2), (5.3) より

$$|t(x^{(1)}) - q^{(2)}(x^{(1)})| \leq 3K^2 b$$

$$|\dot{t}(x) - \dot{q}^{(2)}(x)| \geq \frac{1}{2K\sqrt{b}}$$

よって、 $x^{(2)} \in (-\sigma, \sigma)$ がただ一つ存在して

$$t(x^{(2)}) = q^{(2)}(x^{(2)})$$

そこで $|x^{(2)} - x^{(1)}| \leq 6K^3 K\sqrt{b}$

$z_0^{(2)} = (x^{(2)}, y(x^{(2)}))$ とおく。これは 2 次の critical approximation である。以下 同様にして、各 $1 \leq k \leq N-1$ に対し

$z_0^{(k)} = (x^{(k)}, y(x^{(k)}))$, $x^{(k)} \in (-\sigma, \sigma)$ がただ一つ存在して

次の critical approximation となる。また、

$$|z_0^{(k+1)} - z_0^{(k)}| \leq 10\sqrt{b} k^{k+2} b^k \leq (kb)^k$$

以上で、 $N-1$ までの次数の critical approximation が G_0 の中の y 軸に近い所に構成された。

次に、上である critical approximation から次の critical approximation を構成する為のアルゴリズム A, B について述べる。

$0 < C < C_0$ となる C を固定する。

アルゴリズム A γ は W^n の中の $C^2(b)$ -curve で、 $z_0^{(n-1)} \in \gamma$ とする。 $z_1^{(n-1)} = \varphi_a(z_0^{(n-1)})$ は時間 n まで e^C -expanding であり、 $z_0^{(n-1)}$ は $n-1$ 次の critical approximation であるとする。

さらに、 γ の両端点は、 $z_0^{(n-1)}$ から σ_1^n の距離にあると仮定する。このとき、補題 4.2 より、 γ のすべての点 z は時間 n まで expanding であり、 $\varphi_a(z)$ における n 次の contractive approximation $e^{(n)}(\varphi_a(z))$ が定まる。上で述べた議論から、 n 次の critical approximation $z_0^{(n)} \in \gamma$ が存在して

$$|z_0^{(n)} - z_0^{(n-1)}| \leq (kb)^n (\leq \sigma_1^n)$$

となる。 □

アルゴリズム B $\gamma, \bar{\gamma}$ を W^n の中の $C^2(b)$ -curve とする。

$|x - x_0| \leq \varrho$ となる x に対し、 γ の点は $z(x) = (x, y(x))$ で表わされ、 $\bar{\gamma}$ の点は $\bar{z}(x) = (x, \bar{y}(x))$ で表わされているとする。

$z_0 = z(x_0) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_0 = \bar{z}(x_0) \in \bar{\mathcal{I}}$ とおく。次の B1, B2, B3 を仮定する。

B1 $\mathcal{I}_1 = \varphi_a(\mathcal{I}_0)$ は時間 n まで e^c -expanding であり $\mathcal{I}_0$ は n 次の critical approximation である。

$$B2. \quad d := |z_0 - \mathcal{I}_0| \leq \frac{\sigma_1^{2n}}{100 K^3}$$

このとき、補題 4.2 から $z_1 = \varphi_a(z_0)$ は時間 n まで expanding となる。

$$B3. \quad d \geq 200 K^3 \sqrt{d}$$

この仮定より、上で述べた議論が適用でき、 n 次の critical approximation $z_0^{(n)} = (x^{(n)}, y(x^{(n)})) \in \mathcal{I}$ が存在し、

$$|x^{(n)} - x_0| \leq 50 K^3 \sqrt{d} \leq \frac{d}{4}$$

が成り立つ。 □

$1 \leq k \leq N-1$ に対し、 $z_0^{(k)} \in G_0 \cap \{bu < 1 - \delta_0\}$ を上で構成した k 次の critical approximation とし、 $\bar{\mathcal{I}} = G_0 \cap \{bu \leq 1 - \delta_0\}$, $\mathcal{I} = G_1 \cap \{bu \leq 1 - \delta_0\}$ とおく。このとき、 $\mathcal{I}_0 = z_0^{(k)} \in \bar{\mathcal{I}}$ に対し、上のアルゴリズム B の仮定がすべて成り立つ。従って k 次の critical approximation $w_0^{(k)} \in \mathcal{I}$ が構成される。今、 $k \leq N-1$ に対し k 次の critical set $\mathcal{C}_k$ を

$$\mathcal{C}_k = \{z_0^{(k-1)}, w_0^{(k-1)}\}$$

で定義する。

§6 帰納法の構造

$n \geq N$ とし、各 $1 \leq k \leq n-1$ に対し k 次の critical set $\mathcal{C}_k$ が定義されているとする。以下で述べる仮定 1~7 が $\mathcal{C}_k$ ($1 \leq k \leq n-1$) に対し仮定されている。

仮定 1 $\mathcal{C}_k$ は $k-1$ 次の critical approximation から成る集合で、各 $z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ の generation $\leq \theta k$ である。ここで

$$\theta = \theta(b) = \frac{100 \cdot 3^r \cdot \log \sigma_1^{-1}}{\log \frac{1}{b}}$$

さらに $z_1^{(k-1)} = \varphi_a(z_0^{(k-1)})$ は時間 k まで e^c -expanding である。 $\square$

仮定 2 $z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ とし、その generation を $0 \leq g \leq \theta k$ とする。 $C^2(b)$ -curve $\gamma = \gamma(z_0^{(k-1)}, \rho^{\theta k})$ が存在し、 γ の両端点と $z_0^{(k-1)}$ との距離はそれぞれ $\rho^{\theta k}$ であり、 $\gamma \subset G_g$ 。ここで

$$\rho = \left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^6 \sigma_2 \quad \lambda_0 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 \quad \sigma_2 = \frac{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^8}{10K^2}$$

さらに $g \geq 1$ ならば、 $\gamma_0 = \varphi_a^{-g}(\gamma) \subset G_1 \cap \{|x| \leq 1 - \delta_0\}$ であり、 γ_0 に接するベクトルは φ_a^{g-1} で expand する。 $\square$

仮定 2 より、 $\gamma(z_0^{(k-1)}, \frac{1}{4}\rho^{\theta k}) \cap \mathcal{C}_k = \{z_0^{(k-1)}\}$ となる。

従って $\mathcal{C}_k$ の元の数は

$$(6.1) \quad \# \mathcal{C}_k \leq 8 \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\theta k}$$

定義 7 ξ_0 が時間 P まで $\mathcal{L}_k$ に bind されるとは、

$z_0 = z_0^{(k-1)} \in \mathcal{L}_k$ が存在して

$$(BC1) \quad |\xi_j - z_j| \leq h_k e^{-\beta j} \quad 1 \leq j \leq P$$

ここで $\beta > 0$ は十分小さいとし

$$h_k = 3 - \sum_{i=1}^{k-1} (e^{\beta} \sigma_i)^i \in (2, 3)$$

特に $P=k$ のときは単に、 ξ_0 は $\mathcal{L}_k$ に bind されるという。

仮定 3 ξ_0 が $\mathcal{L}_k$ に bind されているならば、 $\xi_1 = \varphi_a(\xi_0)$

は時間 k まで e^c -expanding である。 $\square$

仮定 4 $\mathcal{L}_k$ に bind されている点 ξ は、 $\mathcal{L}_{k-1}$ にも bind されている。 $\square$

§6.1 $\mathcal{L}_n$ の構成.

$\mathcal{L}_{n-1}$ から n 次の critical set $\mathcal{L}_n$ を次の様に構成する。

仮定 1 より、 $z_0^{(n-2)} \in \mathcal{L}_{n-1}$ に対し、 $z_1^{(n-2)} = \varphi_a(z_0^{(n-1)})$

は時間 $n-1$ まで e^c -expanding である。また、仮定 2

より、 g を $z_0^{(n-2)}$ の generation とすると、 $\mathcal{C}^2(b)$ -curve

$\delta(z_0^{(n-2)}, \rho^{\theta(n-2)}) \subset G_g$ が存在する。 $z_0^{(n-2)}$ に §5 の

アルゴリズム A を適用し、 $n-1$ 次の critical approximation

$\xi_0^{(n-1)} \in \delta(z_0^{(n-2)}, \rho^{\theta(n-1)})$ を作る。このとき、

$$(6.2) \quad |\xi_0^{(n-1)} - z_0^{(n-2)}| \leq (kb)^{n-2} \leq \sigma_1^{n-1}$$

となる。 $\mathcal{L}_n' = \{\xi_0^{(n-1)} : z_0^{(n-2)} \in \mathcal{L}_{n-1}\}$ とおく。

次に, 各 $y_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n'$ に §5 の アルゴリズム B を適用する (適用できない場合は ことを行わない) : $\theta^{(n-1)} < \theta \leq \theta n$ とし, $\bar{\sigma}$ を G_g の $C^2(b)$ -curve とする。 $\bar{\sigma}$ と $\sigma = (y_0^{(n-1)}, \rho^{\theta n})$ は アルゴリズム B の仮定を満たして

$$\text{dist}(y_0^{(n-1)}, \bar{\sigma}) \leq b^{\frac{1}{20}\theta} \leq b^{\frac{1}{20}\theta^{(n-1)}} \leq \sigma_1^{n-1}$$

であるとする。このとき, アルゴリズム B により, $n-1$ 次の critical approximation $z_0^{(n-1)} \in \bar{\sigma}$ が構成され,

$$(6.3) \quad |z_0^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b^{\frac{1}{50}\theta} \leq b^{\frac{1}{50}\theta^{(n-1)}} \leq \sigma_1^{n-1}$$

が成り立つ。 $\mathcal{C}_n'' = \{z_0^{(n-1)} : y_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n'\}$ とおく。

n 次の critical set を $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n' \cup \mathcal{C}_n''$ により定義する。

(6.2) と (6.3) より, 時間 n において 仮定 4 が成り立つ。

また 仮定 1 と 仮定 2 の前半が成立する。従って, われわれの目的は, 時間 n において, 仮定 3 を示すことである。この為に, 1次元写像と同様, (BA) と (FA) を仮定する必要がある。

§6.2 return, binding point, binding period.

$1 \leq k \leq n-1$ とする。各 $z_0 \in \mathcal{C}_k$ と 時間 $\leq k$ に対し, return, binding point, binding period が定義されているとする。

y_0 が $\mathcal{C}_k$ に bind されているならば, 定義より

$z_0 = z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ が存在して (BC1) が成立する。そこで、 γ_0 の return, binding point, binding period は, z_0 のものと同じであると定義する。

γ_0 が $\mathcal{C}_n$ に bind されているとする。このとき, γ_0 は $\mathcal{C}_n$ に bind されている。従って, この様な γ_0 と時間 $\leq n-1$ に対し return, binding point, binding period がすでに定義されている。

$z_0 \in \mathcal{C}_n$ と時間 n に対し return, binding point, binding period を次の様に定める。

z_0 の return $\nu \leq n-1$ があって, その binding period に n が属している場合: $\nu < n$ をその様な return の中の最大のものとし, γ_0 を z_ν の binding point とする。

$n-\nu$ が γ_0 の return ならば (このとき, $\gamma_0 \in \mathcal{C}_{n-\nu}$ で, $n-\nu$ は後で述べる γ_0 の free-return である。), n を z_0 の bounded return と呼ぶ。 $\gamma_{n-\nu}$ の binding point が $\mathcal{C}_{n-\nu}$ から選ばれている (帰納法の仮定)。この点から, z_n の binding point とする。 z_n の binding period $[n+1, n+p]$ を, $\gamma_{n-\nu}$ の binding period $[n-\nu+1, n-\nu+p]$ によって定義する。

上の場合でなくとも: $|x_n| < \delta$, $z_n = (x_n, y_n)$ であるならば, n を z_n の free return と呼ぶ。この場合,

z_n に対し、ある アルゴリズム で z_n から s_0 をたどって
選ぶことが出来る。この後で、仮定される。

$$(BA) \quad d_n(z_0) := |z_n - s_0| \geq e^{-\alpha n}$$

ここで $\alpha > 0$ は十分小で $0 < \alpha \ll \beta$ である。

この仮定 (BA) の下で、§3 で述べた (3.1) 等が証明さ
れる。 s_0 を z_n の binding point と定める。 binding
period $[n+1, n+p]$ を定義する為、先ず primary
binding period $p_0 \geq 1$ を次を満たす最大の数とする：

$$(BC2) \quad |z_{n+j} - s_j| \leq h e^{-\beta j} \quad 1 \leq j \leq p_0$$

$$h = \frac{1}{10} \exp(-50K \sum_{\alpha=1}^{\infty} e^{-\epsilon \alpha}) \leq 1.$$

このとき

$$(6.4) \quad p_0 \leq 5 \log d_n(z_0)^{-1} \leq 5\alpha n < n$$

が証明される。これは 時間 $k \leq n-1$ に対して仮定されて
いる (仮定 6)。 (BC2) より、 z_n は 時間 p_0 まで
 s_0 に bind される。したがって $[1, p_0]$ において、 z_n の
return, binding period が定義されている。 P を

- P は z_n に対する free iterate 存在せず、 P は
 z_n の (定義より s_0 の) 任意の binding period
に属さない。
- $1 \leq p \leq p_0$ の中で最大。

により定める。このとき、 $P = p_0$ 。又は P は return で

ある。 $P \doteq P_0$ 。正確には $P_0 - P \leq 10\alpha P_0$ 。であることが帰納法の仮定により容易に証明される。また、

$$\begin{aligned}
 (6.5) \quad |z_{n+p+1} - s_{p+1}| &\leq |z_{n+p_0+1} - s_{p_0+1}| K^{-10\alpha P_0} \\
 &\geq h e^{-\beta(P_0+1)} K^{-10\alpha P_0} \\
 &\geq h e^{-2\beta(P+1)}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

$z_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n$ が n まで e^c -expanding を与えるには、 $k \leq n-1$ に対し binding period $[k+1, k+p]$ において $z_0^{(n-1)}$ は expanding であることが帰納法の仮定から導かれるなければならない。そこで、fold, splitting algorithm によって述べる。

§6.3 fold.

$z_0 \in \mathcal{C}_k$ とし、 k は z_0 の free return とする。このとき、primary folding period $[k+1, k+l_0]$ を

$$l_0 = \frac{10 \log K}{\log \frac{1}{b}} \log d_k(z_0)^{-1} + i$$

で定めよう。ここで $0 \leq i \leq 4$ は $k+l_0+1$ が return でなく $2\delta < |x_{k+l_0+1}| < 1-2\delta$ を満たすように選ぶ。

P を z_k に対する binding period の長さとするとき、(6.5) より

$$P \geq \frac{\log d_k(z_0)^{-1}}{2(\log K + 2\beta)}$$

よ、 τ $\ell_0 \ll P$ と存する。 $F = [k+1, k+\ell]$ が folding period であることを

- $[k+1, k+\ell]$ の中の任意の return ω に対し ω の primary folding period の end $\leq k+\ell$ である
- $\ell \geq \ell_0$ の中で最小

により定める。このとき

- $[k'+1, k'+\ell']$ が folding period であり、 $\ell'+1 \in F$ ならば $k'+\ell' \in F$
- $k+\ell$ は return でなく、 $2\delta < |x_{k+\ell+1}| < 1-2\delta_0$

が成り立つ。さらに

$$\frac{10 \log K}{\log \frac{1}{\epsilon}} \log d_k(z_0)^{-1} \leq \ell \leq \frac{20 \log K}{\log \frac{1}{\epsilon}} d_k(z_0)^{-1} + 4$$

となり、 $\ell \neq \ell_0$ が成り立つ。

binding period と同様、 γ_k に bind されている任意の ξ_0 とその return に対し、folding period が定義される。

§6.4 splitting algorithm

§3 で述べた分解を、正確に述べると次の様になる。

$1 \leq k \leq m-1$ とし、 ξ_0 は γ_k に bind されているとする。

各 $0 \leq \mu \leq k$ に対し、 $w_\mu = w_\mu(\xi_0) = D\varphi_a^\mu(\xi_0) \cdot (1, 0)$

とおく。 w_μ を次の様に分解する。

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu + \tilde{\sigma}_\mu$$

$\mu = \tau$

$$1. \quad w_0 = \tilde{w}_0 = (1, 0), \quad \tilde{\sigma}_0 = 0$$

$$2. \quad \tilde{w}_\mu = D\varphi_a(\xi_\mu) \cdot w_{\mu-1}, \quad \tilde{\sigma}_\mu = D\varphi_a(\xi_\mu) \cdot \tilde{\sigma}_{\mu-1}$$

3. μ が ξ_0 の return のとき,

$$\tilde{w}_\mu = \alpha_\mu \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1}) + \beta_\mu \cdot (1, 0)$$

$\mu = \tau$ l は folding period τ ,
 $e^{(l)}(\xi_{\mu+1})$ は l 次の contractive approximation.

と置いて。

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu - \alpha_\mu \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1}) = \beta_\mu \cdot (1, 0)$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu + \alpha_\mu \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1})$$

4. μ が folding period の end $\mu = \mu_1 + l_1$ のとき,

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu + \alpha_{\mu_1} D\varphi_a^{l_1}(\xi_{\mu_1+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_1+1})$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu - \alpha_{\mu_1} D\varphi_a^{l_1}(\xi_{\mu_1+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_1+1})$$

一般に $S \geq 1$ とて

$[\mu_1, \mu_1 + l_1], \dots, [\mu_s, \mu_s + l_s]$ が μ を経るとき,

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu + \sum_{i=1}^S \alpha_{\mu_i} \cdot D\varphi_a^{l_i}(\xi_{\mu_i+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_i+1})$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu - \sum_{i=1}^S \alpha_{\mu_i} \cdot D\varphi_a^{l_i}(\xi_{\mu_i+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_i+1})$$

5. 3., 4. のとき以外, $w_\mu = \tilde{w}_\mu, \sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu$

補題 6.1 $1 \leq k \leq n-1$ とし, ξ_0 が $\mathcal{L}_k$ に bind されて
 いるならば, 各 $0 \leq \mu \leq k$ に対し

$$|\text{slope } \omega_\mu(\xi)| \leq \sqrt[3]{b}$$

$c_0, c, c_1, \alpha, \varepsilon > 0$ は次の様な関係式であるとす。

$$0 < c < c + 2\varepsilon < c_1 < c_0(1-\varepsilon) - \alpha < c_0 < \log 2.$$

各 $1 \leq k \leq n-1$ に対し, 次の仮定 5, 6, 7 が仮定されて
 いる。

仮定 5 $z_0 \in \mathcal{L}_k$ とし, k が z_0 の free return ならば,
 binding point $\xi_0 \in \mathcal{L}_k$ が選ばれていて,

$$(BA) \quad d_k(z_0) := |z_k - \xi_0| \geq e^{-\alpha k}.$$

ξ_0 が上の ξ_0 に bind されているならば,

$$|\alpha_k(\xi_1)| \leq 4K\sqrt{b} \|\omega_{k-1}(\xi_1)\|$$

$$\frac{3}{2} a d_k(\xi_0) \leq \frac{|\beta_k(\xi_1)|}{\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|} = \frac{\|\omega_k(\xi_1)\|}{\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|} \leq \frac{5a}{2} d_k(\xi_0)$$

さらに, $\mathcal{L}_k$ に bind されている ξ_0 の bounded return $\nu \leq k$
 に対し,

$$|\alpha_\nu(\xi_1)| \leq 5K\sqrt{b} \|\omega_{\nu-1}(\xi_1)\|$$

$$a d_\nu(\xi_0) \leq \frac{|\beta_\nu(\xi_1)|}{\|\omega_{\nu-1}(\xi_1)\|} \leq 3a d_\nu(\xi_0).$$

仮定 6 $\nu \leq k$ を $z_0 \in \mathcal{C}_k$ の return とし $[\nu+1, \nu+p]$ を binding period とおくと,

$$p \leq 5 \alpha \nu < \nu$$

さらに, 定数 $\tau_1, \tau_2 > 1$ が存在して, ξ_0 が z_0 に時間 $\nu+1 \leq \nu+p-1$ まで bind されていなければ,

$$\frac{1}{\tau_1} \leq \frac{\|\omega_{\nu+1}(\xi_1)\|}{|\beta_\nu(\xi_1)| \|\omega_\nu(\xi_1)\|} \leq \tau_1$$

時間 $\nu+p$ まで z_0 に bound されていなければ ここで ξ_1 は binding point.

$$\frac{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\| d_\nu(z_0)}{\|\omega_\nu(\xi_1)\|} \geq \tau_2 e^{\frac{c_1}{3}(p+1)} \geq 1$$

仮定 7 $F_k(a; z_0)$ を $[1, k]$ における z_0 の free iterate の個数とすると,

$$(FA) \quad F_k(a; z_0) \geq (1-\epsilon)k$$

仮定 5, 6, 7 の下で, 仮定 3 を示すことが出来る。実際, $k \leq n-1$ とし, ξ_0 は $\mathcal{C}_k$ に bind されていなくとする。

$$\|\omega_k(\xi_1)\| = \prod_{i=1}^k \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|}$$

である。 $1 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_s \leq k$ を ξ_0 の free return とし, $\nu = \nu_i$ に対応する binding period $p = p_i$ とすると,

$$\text{仮定 5, 6 より} \quad \prod_{i=1}^{\nu+p} \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|} \geq \frac{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\|}{\|\omega_\nu(\xi_1)\|} d_\nu(z_0) \geq 1$$

$\mu = \nu_{i+1}$, $r = \mu - \nu - p - 1$ とおいて, 補題 6.1 より.

$$\prod_{\nu+p+1}^{\mu-1} \frac{\|\omega_i(\xi)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi)\|} = \frac{\|\omega_{\mu-1}(\xi)\|}{\|\omega_{\nu+p}(\xi)\|} = \frac{\|\omega_{\mu-1}(\xi)\|}{\|\omega_{\nu+p}(\xi)\|} \geq e^{c_0 r}.$$

ゆえに,

$$\|\omega_r(\xi)\| \geq e^{c_0 F_r - \alpha r} \geq e^{c_1 r}$$

また $\omega_r(\xi)$ と $\tilde{\omega}_r(\xi)$ の関係は.

補題 6.2 $1 \leq \mu \leq r \leq n-1$ とし, ξ_0 は $\mathcal{L}_r$ に bind

されているとすると,

$$K^{-5} e^{-\epsilon \mu} \|\omega_\mu(\xi)\| \leq \|\tilde{\omega}_\mu(\xi)\| \leq K^6 e^{(\epsilon + \alpha)\mu} \|\omega_\mu(\xi)\|$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}_r(\xi)\| &\geq K^{-5} e^{(c_1 - \epsilon)r} \\ &\geq e^{c_2 r} \end{aligned} \quad (N \text{ は十分大}).$$

§6.1 で構成された $\mathcal{L}_n$ に対し, 仮定 5, 6 が成立することを (BA) を仮定して, 証明し, その後, (BA) と (FA) により除かれ parameter α の評価を行う。そして時間 $n+1$ に進む。すべての時間において, (BA) と (FA) が成り立っていることは帰納法が完結する。

References

- [B] G. Belitskii Equivalence and normal forms of
germs of smooth mappings,
Russian Math. Surveys 33,1 (1978)
107-177.
- [BC] M. Benedicks and L. Carleson, The dynamics of the
Hénon map, Ann. Math.
133 (1991), 73-169.
- [H] M. Hénon A two dimensional mapping with
a strange attractor, Comm. Math. Phys.
50 (1976), 69-77
- [MV] L. Mora and M. Viana, Abundance of strange
attractors, preprint.
- [P] R. Plykin, On the geometry of hyperbolic
attractors of smooth cascades,
Russian Math. Surveys
39, 6 (1984), 85-131.