

二次形式の Zeta 函数と特殊函数

立教大 理 佐藤文広

§0. 二次形式の整数論において登場する Zeta 函数の函数等式が、超幾何函数・球函数の函数等式を根拠にしていゝ例がいくつ知られていゝ。例えば、Siegel [9] では、符号 $(n, m-n)$ の不定値二次形式の Zeta 函数の函数等式が、Gauss の超幾何函数 $F(s-\frac{n}{2}+1, 1-\frac{n}{2}, s-\frac{n}{2}; x)$ の函数等式に帰着されていゝ。Shintani [8] では、二元二次形式の空間に何随つゝ変数の Zeta 函数が、二種類の形の函数等式を満足することが示されていゝが、この一方は Legendre 函数の函数等式 $P_s = P_{-1-s}$ から導かれていゝ。

この小論では、これらの Zeta 函数と特殊函数の間の関係の一般化を試みゝ。すなわち、いゝれば、 $SL(n, \mathbb{R})/SO(p, n-p)$ の "Eisenstein 級数", "帯球函数" といふぐゑ、Drinfel'd 級数, 特殊函数を定義し、その函数等式が本質的に一致することを示す。その根拠は、ある可約擬内積ベクトル空間の相対個変式の複素中の部分 Fourier 変換に在る。上記の二例は、あ

を意味し、その特別な場合とみればよいであろう。なお、鈴木利明氏の“変数係数二次形式のZeta函数”の研究と関連があり、示唆を受けたことに感謝したい。

§1. Eisenstein 級数

m を自然数。 $\gamma^{(m+1)} = {}^t \gamma \in$ 符号 (p.6) ($p_{m+1} = m+1$) の実対称行列と可。 $V = M(m+1, m) \oplus M(m, m-1) \oplus \cdots \oplus M(2, 1)$ とおく。

定義. $V \ni X = (x_m, x_{m-1}, \dots, x_1)$ と γ の組 $(\gamma, X) \in$ (一般にこれを) descending chain と呼ぶ。

Descending chain (γ, X) について、対称行列の列が次のようにして得られる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \gamma_{m+1} = \gamma & \rightarrow & \gamma_m & \rightarrow & \gamma_{m-1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \gamma_2 & \rightarrow & \gamma_1 \\
 & & \text{"} & & \text{"} & & & & \text{"} & & \text{"} \\
 & & {}^t \lambda_m \gamma \lambda_m & & {}^t \lambda_{m-1} \gamma \lambda_{m-1} & & & & {}^t \lambda_2 \gamma \lambda_2 & & {}^t \lambda_1 \gamma \lambda_1 \\
 & & \text{"} & & \text{"} & & & & \text{"} & & \text{"} \\
 & & \gamma[\lambda_m] & & \gamma[\lambda_{m-1}] & & & & \gamma[\lambda_2] & & \gamma[\lambda_1]
 \end{array}$$

ここで、 γ_i は $i \times i$ 対称行列である。

A. Selberg は、 $SL(n; \mathbb{Z})$ の Eisenstein 級数を定義するときに、正定値対称 γ と、 $X \in T_{\mathbb{Z}} = M(m+1, m; \mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus M(2, 1; \mathbb{Z})$ とからなる descending chain (γ, X) と利用した ([7], [6], [7])。我々は、[7] の示唆に従って、正定値対称 γ に対して Eisenstein 級数の類似を構成する。以下、この節では、 γ は有理係数と仮定する。

$$G(Y) = SO(Y) \times GL(m) \times \cdots \times GL(1)$$

$$G(Y)_{\mathbb{R}}^+ = SO(Y)_{\mathbb{R}} \times GL(m)_{\mathbb{R}}^+ \times \cdots \times GL(1)_{\mathbb{R}}^+ \quad (GL(m)_{\mathbb{R}}^+ \text{ は単位連結成分})$$

$$G(Y)_{\mathbb{Z}}^+ = SO(Y)_{\mathbb{Z}} \times SL(m)_{\mathbb{Z}} \times \cdots \times SL(2)_{\mathbb{Z}} \times \{1\}$$

とおく。線型空間 V に $G(Y)$ は

$$\rho(g)X = (g_{m+1}X_m g_m^{-1}, \dots, g_{i+1}X_i g_i^{-1}, \dots, g_2 X_1 g_1^{-1}).$$

$$g = (g_{m+1}, g_m, \dots, g_1) \in G(Y).$$

$$X = (X_m, X_{m-1}, \dots, X_1) \in V$$

によって作用する。明らかに、 $V_{\mathbb{Z}}$ は $G(Y)_{\mathbb{Z}}^+$ -stable である。

$$\mathcal{F}_Y = \bigcup_{i=1}^m \{X \in V; \det Y_i = 0\} \quad \text{とおく。}$$

$$E = (e_1, \dots, e_{m+1}) \in \{\pm 1\}^{m+1} \quad \text{について,}$$

$$\mathcal{F}_Y^*(E; s_1, \dots, s_m) = \sum_X' \prod_{i=1}^m |\det Y_i|^{-s_i}$$

とおく。ただし、 X に關する和は、 $G(Y)_{\mathbb{Z}}^+ \backslash V_{\mathbb{Z}} - \mathcal{F}$ の完全代表系で、 $\text{sgn}(\det Y_i) = e_1 \cdots e_i$ ($1 \leq i \leq m$) を満足するもの全体を動く。 Y の符号が (p, q) としたから、 e_i のうち p が $+1$ 、 q が -1 のとだけあり、 $\mathcal{F}_Y^*(E; s_1, \dots, s_m)$ は定義される。(このようにして $\text{sgn } E = (p, q)$ と記すことにする)。

$$\text{また, } \Gamma_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(m+1)_{\mathbb{Z}} \right\},$$

$$E(Y, E; s) = \sum_U' \prod_{i=1}^m |d_i(Y[U])|^{-s_i} \quad \text{とおく。}$$

== 2. d_i は、行列 $Y[U] = {}^t U Y U$ の i 次首席小行列式を表す

し、 ν に関するおは、両側剰余類 $SO(\gamma)_{\mathbb{Z}} \backslash SL(m+1)_{\mathbb{Z}} / \Gamma_0$ の完全代表系で $\text{sgn } d_i(\gamma[\nu]) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i$ ($1 \leq i \leq m$) なる $\mathbb{Z}$ の軌動とす。このとき、

$$\zeta_Y^*(\varepsilon; s_1, \dots, s_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} \{ (2(s_i + \dots + s_j) - j + i) E(\gamma, \varepsilon; s) \}.$$

すなわち、符号 (p, q) の有理対称行列 γ に対し $\begin{pmatrix} m+1 \\ p \end{pmatrix}$ の Dirichlet 級数が付随される。特に $(p, q) = (m+1, 0)$ のとき、唯一つの Dirichlet 級数が得られ、 $SL(m+1)_{\mathbb{Z}}$ の Eisenstein 級数に一致する。

定理 1

(i). $E(\gamma, \varepsilon; s)$ 従って $\zeta_Y^*(\varepsilon; s_1, \dots, s_m)$ は、 $\mathbb{C}^m$ 上の有理型関数に解析接続される。

(ii). $s_i = z_{i+1} - z_i + \frac{1}{2}$ ($1 \leq i \leq m$) と変数変換し、

$$\tilde{E}(\gamma, \varepsilon; z) = \prod_{1 \leq j < i \leq m+1} \frac{\pi^{-(z_i - z_j + \frac{1}{2})}}{\Gamma(z_i - z_j + \frac{1}{2})} |\det \gamma|^{-z_{m+1}} \zeta_Y^*(\varepsilon, s_1, \dots, s_m).$$

とおけば、函数等式

$$\tilde{E}(\gamma, \sigma \varepsilon; \sigma z) = \sum_{\text{sgn } \gamma = (p, q)} A^\sigma(\varepsilon, \gamma; z) \tilde{E}(\gamma, \gamma; z).$$

($\sigma \in \mathfrak{S}_{m+1}$: $m+1$ -次対称群, $\sigma \varepsilon = (\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(m+1)})$, $\sigma z = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m+1)})$) が成立つ。ここで $A^\sigma(\varepsilon, \gamma; z)$ は三角函数で表わされる。特に置換 $\sigma_k = (k+1, 1, \dots, k)$ に対しては、

$$A^{\sigma_K}(z, \gamma; z) = \begin{cases} \prod_{i=1}^k \cos \frac{\pi}{4} \left\{ 2(1+z_i \gamma_i)(z_{K+1}-z_i+\frac{1}{2}) + z_i \left(\sum_{j=i+1}^K z_j - \sum_{j=i}^{K+1} \gamma_j \right) \right\} \\ \sin (z_{K+1}-z_i+\frac{1}{2}) \pi \\ (z_i = \gamma_i, i = k+2, \dots, m+1 \text{ のとき}) \\ (\text{それ以外のとき}) \end{cases}.$$

γ が正定値のとき、任意の σ_K に対して $A^{\sigma_K}(z, z; z) \equiv 1$ ($z = (+1, \dots, +1)$) であり、これから直ちに全ての $\sigma \in G_{m+1}$ について $\tilde{E}(\gamma, z; \sigma z) = \tilde{E}(\gamma, z; z)$ が成り立つ。これが、元来の Eisenstein 級数の主数等式である。

$m=2$, $(p, q) = (1, 2)$ のときの $A^{\sigma}(z, \gamma; z)$ の表を次に掲げよう。このときは、符号の分布は、 $\varepsilon = (+1, -1, -1)$, $\gamma = (-1, +1, -1)$, $\kappa = (-1, -1, +1)$ の 3 つであり、行列

$$\begin{pmatrix} A^{\sigma}(z, \varepsilon; z) & A^{\sigma}(z, \gamma; z) & A^{\sigma}(z, \kappa; z) \\ A^{\sigma}(\gamma, \varepsilon; z) & A^{\sigma}(\gamma, \gamma; z) & A^{\sigma}(\gamma, \kappa; z) \\ A^{\sigma}(\kappa, \varepsilon; z) & A^{\sigma}(\kappa, \gamma; z) & A^{\sigma}(\kappa, \kappa; z) \end{pmatrix}$$

は、次の通りである。但し、 $\theta_1 = (z_1 - z_2) \pi$, $\theta_2 = (z_2 - z_3) \pi$, $\theta_3 = (z_3 - z_1) \pi$ とおく。

σ	$A^{(\sigma)}(z)$
$(3, 2, 1)$	$\begin{bmatrix} -\tan \theta_1 \tan \theta_3 & -\tan \theta_3 \sec \theta_1 & \sec \theta_3 \\ -\tan \theta_3 \sec \theta_1 & \tan \theta_1 \tan \theta_2 + \sec \theta_1 \sec \theta_2 \sec \theta_3 & -\tan \theta_3 \sec \theta_2 \\ \sec \theta_3 & -\tan \theta_3 \sec \theta_2 & -\tan \theta_2 \tan \theta_3 \end{bmatrix}$

(3,1,2)	$\begin{bmatrix} -\tan\theta_3 & \sec\theta_2\sec\theta_3 & \tan\theta_2\sec\theta_3 \\ 0 & \tan\theta_2 & \sec\theta_2 \\ \sec\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_2 & -\tan\theta_2\tan\theta_3 \end{bmatrix}$
(2,3,1)	$\begin{bmatrix} -\tan\theta_1\tan\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_1 & \sec\theta_3 \\ \sec\theta_1 & \tan\theta_1 & 0 \\ \tan\theta_1\sec\theta_3 & \sec\theta_1\sec\theta_3 & -\tan\theta_3 \end{bmatrix}$
(2,1,3)	$\begin{bmatrix} \tan\theta_1 & \sec\theta_1 & 0 \\ \sec\theta_1 & \tan\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(1,3,2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tan\theta_2 & \sec\theta_2 \\ 0 & \sec\theta_2 & \tan\theta_2 \end{bmatrix}$
(1,2,3)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

§ 2. Descending chains の概均質バクトル空間

$\zeta_Y^*(\varepsilon; s_1, \dots, s_m)$ は、可約概均質バクトル空間に付随する Zeta 函数とみなすことができる。前節で定義した $(G(Y), \rho, \mathcal{V})$ という三好は、 $S_Y = \bigcup_{i=1}^m \{\det Y_i = 0\}$ を特異点集合とする概均質バクトル空間であり、 $\det Y_i$ は、指標 $\det \rho_i^{-2}$ に対応する相対不変式であることが容易に示される。 ζ_Y^* はこの空間の Zeta 函数である。函数等式の証明のためには、 ρ の "部分反傾表現" が必要となる。

$k=1, \dots, m$ について、 $M(k+1, k)$ は自然に $\mathcal{V}$ の部分空間とみなせ、特に ρ の不変部分空間となつてゐる。いま、 $M(k+1, k)$

と $\mathcal{P}$ の双対空間を $(\lambda_R, \lambda_R^*) = t_R^* / \lambda_R^*$ ($\lambda_R, \lambda_R^* \in M(k+1, k)$) によ
て同一視する。このとき $G(Y)$ の $\mathcal{P}$ 上の表現 $\lambda^{(k)}$:

$$\lambda^{(k)}(g)X = (g_{m+1} \lambda_m g_m^{-1}, \dots, g_{k+2} \lambda_{k+1} g_{k+1}^{-1}, g_{k+1}^{-1} \lambda_k g_k, g_k \lambda_{k-1} g_{k-1}^{-1}, \dots, g_2 \lambda_1 g_1^{-1})$$

は、 $M(k+1, k)$ に属する部分反復表現と入るべきものである。

$k=0$ のとき、 $\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}$ とおく。任意の $k=0, 1, \dots, m$ について、
 $(G(Y), \mathcal{P}^{(k)}, \mathcal{V})$ は擬均質ベクトル空間となる。よって、

descending chains の擬均質ベクトル空間と呼ぶ。Descending
chain (Y, X) ($X \in \mathcal{V}$) に属する対称行列の列

$$\begin{aligned} & \lambda_{m+1}^{(k)} \rightarrow \lambda_m^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_2^{(k)} \rightarrow \lambda_1^{(k)} \\ & \vdots \\ & \lambda_i^{(k)} = \begin{cases} \lambda_{i+1}^{(k)}(X_i) & (i \neq k, k-1) \\ (\lambda_{i+1}^{(k)})^{-1}(X_i) & (i = k, k-1) \end{cases} \end{aligned}$$

によって定義する ($k=0, 1, \dots, m$)。 $k=0$ のときは、 λ_i で
導入した λ_i と一致する。 $\mathcal{V}$ 上の有理函数

$$p_i^{(k)}(Y; X) = \det \lambda_i^{(k)} \quad (1 \leq i \leq m)$$

は、相対不変性

$$p_i^{(k)}(Y; \lambda^{(k)}(g)X) = \lambda_i^{(k)}(g) p_i^{(k)}(Y; X)$$

$$\lambda_i^{(k)}(g) = \begin{cases} \det g_i^{-2} & (i \neq k) \\ \det g_i^2 & (i = k) \end{cases}$$

を満足する。 $(G(Y), \mathcal{P}^{(k)}, \mathcal{V})$ の特異点集合は、

$$\mathcal{P}_1^{(m)} = \left\{ g \in G \mid \bigcap_{i=1}^m \{ p_i^{(k)}(Y; X) \neq 0, \infty \} \right\}$$

と与えられる。次に、 $V_R = M(m+1, m; \mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus M(2, 1; \mathbb{R})$ の $\rho^{(k)}(G(Y)_R^+)$ - 商軌道を求めよう。

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+1}) \in \{\pm 1\}^{m+1} \text{ について}$$

$$V^{(k)}(Y, \varepsilon) = \{X \in V_R; \operatorname{sgn} P_i^{(k)}(Y; X) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq m)\}$$

とおく。このとき、次が成立つ。

$$(1) \quad V^{(k)}(Y, \varepsilon) \neq \emptyset \iff \operatorname{sgn} \varepsilon = (p, q),$$

$$(2) \quad V^{(k)}(Y, \varepsilon) \text{ は } \rho^{(k)}(G(Y)_R^+) \text{- 商軌道で}$$

$$V_R - S_Y^{(k)} = \bigcup_{\operatorname{sgn} \varepsilon = (p, q)} V^{(k)}(Y, \varepsilon),$$

さらに、 $V^{(k)}(Y, \varepsilon)$ への $G(Y)_R^+$ の作用は effective である。

V_R 上の急減少函数 f に対し、

$$Z^{(k)}(Y, \varepsilon, f; s) = \int_{V^{(k)}(Y, \varepsilon)} \prod_{i=1}^m |P_i^{(k)}(Y; x)|^{s_i} f(x) \omega^{(k)}(Y; x)$$

($s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{C}^m$) とおく。ここで、 $\omega^{(k)}(Y; x)$ は $G(Y)_R^+$ - 不変な $V^{(k)}(Y, \varepsilon)$ 上の測度で

$$\omega^{(k)}(Y; x) = \prod_{i \neq k, k+1} |P_i^{(k)}(Y; x)|^{-1} \cdot |P_R^{(k)}(Y; x)|^{-k} |P_{k+1}^{(k)}(Y; x)|^{-k-1} dx$$

によって正規化する。 $G(Y)_R^+$ 上の Haar 測度 dg は

$$dg = |\det Y|^{\frac{1}{2}\sigma_m} \omega^{(k)}(Y; x) \quad (x \in V^{(k)}(Y; \varepsilon)),$$

$\sigma = 1$ ($k \neq m$), -1 ($k = m$) と正規化することができる。以上の

の記号の下で、Eisenstein 級数 $E(Y, \varepsilon; s)$ の積分表示が得られる。すなわち、

$$Z^{(k)}(Y, f; s) = \int \prod_{i=1}^m \chi_i^{(k)}(g)^{s_i} \sum_{\substack{G(Y)_R^+ / G(Y)_R^+ \\ x \in V_R - S_Y^{(k)}}} f(\rho^{(k)}(g)x) dg$$

$$= (\det Y)^{\delta_{k,m} s_m + \frac{\sigma_m}{2}} Z(s') \sum_{\text{sqm} \varepsilon = (p, q)} E(Y, \sigma_k \varepsilon; s') \Phi^{(k)}(Y, \varepsilon; f; s)$$

$$\text{ただし } Z(s) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} (Z(s_i + \dots + s_j) - j + i)$$

$$s' = (s_k - s_1 - \dots - s_{k-1}, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1} - s_k, s_{k+2}, \dots, s_m)$$

$$\sigma_k = (k+1, 1, \dots, k)$$

である。この積分は、領域

$$\left\{ s \in \mathbb{L}^m; \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) > c \quad (i \neq k, k+1) \\ \operatorname{Re}(s_k) > c \cdot (\operatorname{Re}(s_1) + \dots + \operatorname{Re}(s_{k-1})) \\ \operatorname{Re}(s_{k+1}) > c \cdot (\operatorname{Re}(s_1) + \dots + \operatorname{Re}(s_k) + 1) \end{array} \right\}$$

(c は十分大きい正数) で絶対収束する。

急減少関数 f の $(M(k+1, k; \mathbb{R}))$ に関する 部分 Fourier 変換

$F^{(k)} f$ は

$$F^{(k)} f(x) = \int_{M(k+1, k; \mathbb{R})} f(x_m, \dots, x_{k+1}, x_k^*, x_{k-1}, \dots, x_1) e^{2\pi \sqrt{-1} \sum_{k=1}^t x_k x_k^*} dx_k^*$$

によって定義される。Eisenstein 級数の函数等式は、上記の積分表示に、Poisson の和公式

$$\sum_{x^* \in V_{\mathbb{Z}}} f(p^{(k)}(g) x^*) = \chi_{k+1}^{(k)}(g)^{\frac{k}{2}} \chi_k^{(k)}(g)^{\frac{k+1}{2}} \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}} F^{(k)} f(p^{(0)}(g) x)$$

と、次の定理を適用して証明することが出来る (cf [5])。

定理 2. $\Phi^{(k)}(Y, \varepsilon, f; s)$ は $\mathbb{L}^m$ 上の有理型函数に解析接続され、次の函数等式を満たす。

$$\Phi^{(0)}(\gamma, \varepsilon, F^{(k)} f; s) = |\det \gamma|^{-\frac{m}{2} \cdot \delta_{k,m}} \prod_{i=1}^k \pi^{-\left(s_i + \dots + s_k - \frac{k-i}{2}\right)} \Gamma\left(s_i + \dots + s_k - \frac{k-i}{2}\right)$$

$$\sum_{\text{sqm} \eta = (p, q)} a_k(\gamma, \varepsilon; s) \Phi^{(k)}(\gamma, \eta, f; s^*)$$

$$k \in \mathbb{L}, \quad s^* = (s_1, \dots, s_{k-1}, \frac{k+1}{2} - s_k, s_{k+1} + \frac{k}{2}, s_{k+2}, \dots, s_m)$$

$$a_k(\gamma, \varepsilon; s) = \prod_{i=1}^k \sin\left(\frac{z_{k+1} - z_i + 1/2}{2}\right) \pi \cdot A^{\sigma_k}(\gamma, \varepsilon; z)$$

である。

§ 1.2 の詳細は, [4] を参照。

§ 3. 球関数

$\gamma \in$ 符号 (p, q) ($p+q=m+1$) の $m+1$ 次元対称行列とする。これはパウルト群 $SO(m+1)$ の Haar 測度 $\int_{SO(m+1)} dk = 1$ に正規化しておく。 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+1}) \in \{\pm 1\}^{m+1}$ にとり、

$$\varphi(\gamma, \varepsilon; s) = \int \prod_{i=1}^m |d_i(\gamma[k])|^{s_i-1} dk$$

と置く。ここで積分は

$$\{k \in SO(m+1) \mid \text{sqm } d_i(\gamma[k]) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq m+1)\}$$

上で行われる。以下, 対称空間 $X = SL(m+1; \mathbb{R})/SO(p, q)$ を行列式 $(-1)^q$, 符号 (p, q) の $m+1$ 次元対称行列の空間と同一視し γ は X を動くものとする。このとき, $\varphi(\gamma, \varepsilon; s)$ は, s に有理型に依存する X 上の実解析関数であり, Oshima & Sekiguchi [2] の意味での X 上の $SO(m+1)$ -不変帯球関数である。特に X が Riemann 対称空間、すなわち $(p, q) = (m+1, 0)$ のとき, 帯球関数の Harish-Chandra 積分表示に他ならない。

補題 $SO(m+1)$ -不変急減少函数 f について

$$\Phi^{(k)}(\gamma, \varepsilon, f; s) = \varphi(\gamma, \sigma_k \varepsilon; s') \Phi^{(k)}(E_{m+1}, \varepsilon_+, f; s)$$

$$\text{ここで } s' = (s_k - s_1 - \dots - s_{k-1}, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1} - s_k, s_{k+2}, \dots, s_m)$$

E_{m+1} : 単位行列

$$\varepsilon_+ = (+1, +1, \dots, +1)$$

である。

この補題によって、定理2を書き直すと、次を得る。

定理3. $s_i = z_{i+1} - z_i + 1/2$ ($1 \leq i \leq m$) と変数変換すると

任意の $\sigma \in G_{m+1}$ に対して

$$\varphi(\gamma, \varepsilon; z) = \sum_{\text{sym } \eta = (p, q)} A^\sigma(\gamma, \varepsilon; z) \varphi(\gamma, \sigma \eta; \sigma z).$$

これで、Eisenstein級数と球函数の函数等式の一致が、概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換の立場から示された。なお、定理3は Seligman によって一般の Affine 対称空間に拡張された。

§4. Siegel の Zeta 函数と超幾何函数

Siegel は、[9] において一般の符号の二次形式の Zeta 函数の函数等式を、いわゆる Riemann の方法により次の超幾何函数の函数等式に帰着させた。

$$f_1(s, x) = \frac{\Gamma(s - \frac{m-1}{2}) \Gamma(\frac{m-n-1}{2})}{\Gamma(s - \frac{n}{2})} F(s - \frac{m-1}{2}, 1 - \frac{n}{2}, s - \frac{n}{2}, -x)$$

$$f_2(s, x) = \frac{\Gamma(s - \frac{m-1}{2}) \Gamma(-\frac{m}{2} - 1)}{\Gamma(s - \frac{m-n+1}{2})} \cdot x^{\frac{m-1}{2} - s} F(s - \frac{m-1}{2}, 1 - \frac{m-n+1}{2}, s - \frac{m-n+1}{2}, -x^{-1})$$

$$x^{\frac{m}{2}-1} \sin \pi s \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \left(\frac{m+1}{2} - s, x^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \sin \pi (s - \frac{m-n+1}{2}) & \sin \frac{\pi n}{2} \\ \sin \pi \frac{m-n+1}{2} & \sin \pi (s - \frac{n}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (s, x)$$

f_1, f_2 は ξ_3 で与えられた球函数から

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} x^{\frac{m-n+1}{m+1}} \cdot 1_n \\ -x^{-\frac{m}{m+1}} 1_{m-n+1} \end{pmatrix}$$

$$f_i(s, x) = \sum_{\varepsilon_i = (-1)^{i-1}} \varphi(Y(x), \varepsilon; s, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-1}) \quad (i=1, 2)$$

として得られる。函数等式は、恒等式

$$\begin{aligned} \varphi(Y^{-1}, \varepsilon, z) &= \varphi(Y, \check{\varepsilon}, \check{z}) \\ \check{\varepsilon} &= (\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_m, \dots, \varepsilon_1) \\ \check{z} &= (-z_{m+1}, \dots, -z_1) \end{aligned}$$

と、 $\sigma = (2, 3, \dots, m+1, 1)$ に対応する定理 3 の函数等式を組合せて導かれる。一先、Siegel の Zeta 函数と号 1 で定義した Eisenstein 級数の商の商係については、次が予想される。

予想 Siegel の Zeta 函数は、Eisenstein 級数の pole での residue として得られる。

最後に、Shintani [8] の Chap 1. Lemma 1. (ii) は $m=1$ に対する定理 3 に他ならないこと。又、Chap 1. Theorem 1 は部分 Fourier 変換を用いて証明でき、より詳しい結果が得られることに注意しておく。

< 参考文献 >

- [1] Harish-Chandra, Automorphic forms on semi-simple Lie groups, Springer lect. notes, vol. 62, 1968
- [2] T. Oshima & J. Sekiguchi, Affine symmetric space 上の調和解析, 数理論の諸講演, 1976~
- [3] F. Sato, $SL(n; \mathbb{C})$ の Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間, 数理論講究録 260, 59-106.
- [4] F. Sato, Generalized Selberg's zeta functions and related Dirichlet series, preprint.
- [5] M. Sato & T. Shintani, On zeta functions associated with inhomogeneous vector spaces, Ann. Math. 100 (1974) 131-170.
- [6] A. Selberg, A new types of zeta functions connected with quadratic forms, Report of the Institute in the theory of numbers, Colorado, 1959, 207-210.
- [7] A. Selberg, Discontinuous groups and harmonic

- analysis, Proc. Int. Congr. of Math. Stockholm, 1962.
- [8] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector spaces of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 22 (1975), 25-65.
- [9] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniten quadratischer Formen II, Math. Zeit 44 (1939), 398-426.