

# 量子ゲート平均忠実度測定方法としての Randomized Benchmarking の有効性と課題

東京大学工学系研究科 角田 貴大

Takahiro Tsunoda  
Graduate School of Engineering,  
The University of Tokyo

## 1 はじめに

量子コンピュータの実装を目指す研究において量子ゲートの忠実度を評価し向上させることは非常に重要なプロセスである。これまで量子ゲートの忠実度を見積もる方法として主流だったのは量子プロセストモグラフィー (Quantum Process Tomography, 以下 QPT[1]) であったが、QPT は量子ゲートによる誤り確率を量子ビットの初期化及び測定 (SPAM) 誤り確率と独立に評価できないことが欠点であった。一方、近年の量子情報技術の向上により SPAM 忠実度よりも高い量子ゲート忠実度 (99% 以上) が実現されるようになり、QPT で量子ゲートに特化して評価することが困難になってきている。そのため、SPAM 誤りと独立に量子ゲート誤り確率を見積もる方法が模索されており、そのなかでも Randomized Benchmarking [2][3] (以下 RB) と呼ばれる手法が盛んに用いられるようになった。

本稿では以下の順番で RB を説明する。第 2 節で RB を理解するのに必要な前提知識を与える。第 3 節では RB の定性的な説明を行い、第 4 節でその理論的背景を説明する。第 5 節では超伝導量子ビットの系における RB の実装について紹介する。最後に第 6 節で本稿のまとめと今後の展望について述べる。

## 2 準備

### 2.1 量子ビットと量子ゲート

量子ビットは量子情報処理で用いられる最も基本的な情報単位で、物理的には量子二準位系を用いて実現される。1 量子ビットの任意の純粋状態は二準

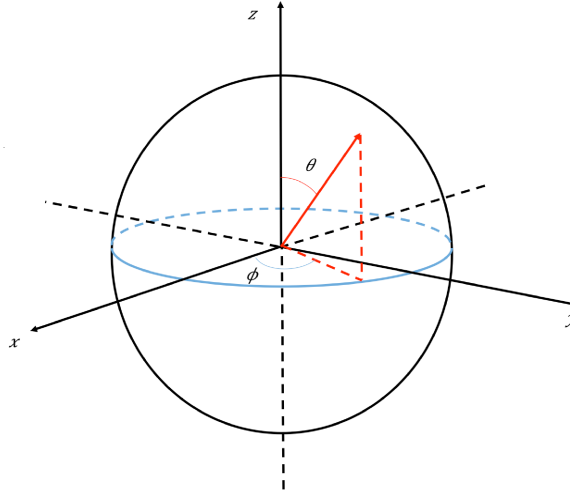


Figure 1: ブロッホ球

位系のエネルギー準位を  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  とするとグローバル位相を除いて以下のよう  
に表される。

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle \quad (1)$$

ここで、 $\theta$  は  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  の占有確率  $|\cos \frac{\theta}{2}|^2$ 、 $|\sin \frac{\theta}{2}|^2$  を指定し、 $\phi$  は相対位相を  
表す。 $\theta$  や  $\phi$  は量子状態に対するユニタリー演算で自由に操作することがで  
き、ユニタリー演算子の物理的実現を量子ゲートと呼ぶことにする。また、任  
意の 1 量子ビット純粋状態  $|\psi\rangle$  は以下のブロッホ球上の点として表すことが  
でき、量子ゲートによるユニタリー演算はブロッホ球上での回転操作に対応  
させられる。

また、確率  $p_1, p_2, \dots, p_n$  で状態  $|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2, \dots, |\psi\rangle_n$  をとる混合状  
態は以下の密度演算子  $\hat{\rho}$  で表すことができる。

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^n p_k |\psi\rangle_k \langle \psi|_k \quad (2)$$

混合状態を含む一般の量子状態から他の量子状態への変換を量子演算と言  
い、 $\sum_{i=1}^l \hat{K}_i \hat{K}_i^\dagger = \mathbf{I}$  を満たすクラウス演算子  $\hat{K}_i$  を用いて超演算子  ${}^1\mathcal{E}(\hat{\rho})$   
で表すことができる。

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^l \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger \quad (3)$$

<sup>1</sup>ある演算子に作用して他の演算子を得る演算子を超演算子という。また以下では、超演算子  
 $\mathcal{E}_1$  と  $\mathcal{E}_2$  の合成を  $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2(\hat{\rho})$  のように表し、 $n$  個の超演算子  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  は  $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2 \circ \dots \circ \mathcal{E}_n =$   
 $(\bigcirc_{i=1}^n \mathcal{E}_i)(\hat{\rho})$  と表すことにする。

## 2.2 量子ゲートの誤りとその忠実度

量子ゲートを実際の物理系で実装する場合、環境からのノイズにより所望のユニタリー演算とは異なる操作を量子ビットに施してしまうことがある。そこで、現実の量子演算  $\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_{k=1}^K \hat{K}_k \hat{\rho} \hat{K}_k^\dagger$  が所望の量子演算  $\mathcal{U}(\hat{\rho}) = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger$  にどれだけ近いかを定量化する忠実度  $F$  は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 F &= \text{Tr}[\mathcal{U}(\hat{\rho})\mathcal{E}(\hat{\rho})] \\
 &= \text{Tr}[\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \sum_{i=1}^K \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger] \\
 &= \text{Tr}[\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \sum_{i=1}^K \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger \hat{U} \hat{U}^\dagger] \\
 &= \text{Tr}[\hat{U}(\hat{\rho} \sum_{i=1}^K \hat{U}^\dagger \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger \hat{U}) \hat{U}^\dagger] \\
 &= \text{Tr}[(\hat{\rho} \sum_{i=1}^K \hat{L}_i \hat{\rho} \hat{L}_i) \hat{U}^\dagger \hat{U}] \\
 &= \text{Tr}[\hat{\rho} \Lambda(\hat{\rho})]
 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、 $\hat{L}_i = \hat{U}^\dagger \hat{K}_i$ 、 $\Lambda(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^K \hat{L}_i \hat{\rho} \hat{L}_i$  とし、 $\Lambda(\hat{\rho})$  をノイズ超演算子と呼ぶことにする。ゆえに、量子ゲート  $\hat{U}$  の忠実度は量子状態  $\hat{\rho}$  がノイズ超演算子によってどれだけ変化したかを定量化したものに置き換えられる。

以下に、量子情報分野で代表的なノイズ超演算子を紹介し、それぞれの忠実度とその状態依存性について議論する。

### 2.2.1 ビット誤り

量子状態  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  が互いに反転する誤りをビット誤りと呼ぶ。反転確率が  $r$  のビット誤りを表すクラウス演算子は、恒等行列  $\hat{\mathbf{I}}$ 、 $X$  軸に関するパウリ行列

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

を用いて以下のように書ける。

$$\hat{K}_0^X = \sqrt{1-r} \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{K}_1^X = \sqrt{r} \hat{\mathbf{X}} \tag{6}$$

よって、ビット誤りのノイズ超演算子は以下のように表される。

$$\Lambda_X(\hat{\rho}) = (1-r)\hat{\rho} + r\hat{\mathbf{X}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{X}}^\dagger \tag{7}$$

### 2.2.2 位相誤り

重ね合わせ状態  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  と  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  が互いに反転する誤りを位相誤りと呼ぶ。反転確率が  $r$  の位相誤りを表すクラウス演算子は、恒等行列  $\hat{\mathbf{I}}$ 、 $\mathbf{Z}$  軸に関するパウリ行列

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

を用いて以下のように書ける。

$$\hat{K}_0^Z = \sqrt{1-r}\hat{\mathbf{I}}, \hat{K}_1^Z = \sqrt{r}\hat{\mathbf{Z}} \quad (9)$$

よって、位相誤りのノイズ超演算子は以下のように表される。

$$\Lambda_Z(\hat{\rho}) = (1-r)\hat{\rho} + r\hat{\mathbf{Z}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{Z}}^\dagger \quad (10)$$

### 2.2.3 ビット-位相誤り

重ね合わせ状態  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$  と  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$  が互いに反転する誤りをビット-位相誤りと呼ぶ。反転確率が  $r$  の位相誤りを表すクラウス演算子は、恒等行列  $\hat{\mathbf{I}}$ 、 $\mathbf{Y}$  軸に関するパウリ行列

$$\hat{\mathbf{Y}} = i\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

を用いて以下のように書ける。

$$\hat{K}_0^Y = \sqrt{1-r}\hat{\mathbf{I}}, \hat{K}_1^Y = \sqrt{r}\hat{\mathbf{Y}} \quad (12)$$

よって、ビット-位相誤りのノイズ超演算子は以下のように表される。

$$\Lambda_Y(\hat{\rho}) = (1-r)\hat{\rho} + r\hat{\mathbf{Y}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{Y}}^\dagger \quad (13)$$

### 2.2.4 忠実度の状態依存性

ここでは忠実度の量子ビット状態依存性について考える。状態  $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$  に対するビット誤りに対しては、

$$F = \text{Tr}[|0\rangle\langle 0|\Lambda_X(|0\rangle\langle 0|)] = 1-r < 1 \quad (14)$$

と忠実度が  $1-r$  と求まるが、状態  $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)$  に対しては、

$$F = \text{Tr}\left[\frac{(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)}{2}\Lambda_X\left(\frac{(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)}{2}\right)\right] = 1 \quad (15)$$

と異なる忠実度が求まる。以上の例から分かるように、一般に量子ゲートの忠実度は量子状態  $\hat{\rho}$  に依存する。よって、通常量子ゲート忠実度を見積もる際には全状態に対する忠実度の平均をとる。

### 2.2.5 分極消去誤り

前節で述べたように一つの誤りモデルに偏っている場合、状態によって忠実度が異なることもあるが、ビット誤り、位相誤り、ビット-位相誤りが等確率で起こるような分極消去誤り、

$$\Lambda_d(\hat{\rho}) = (1-r)\hat{\rho} + \frac{p}{3}(\hat{X}\hat{\rho}\hat{X}^\dagger + \hat{Y}\hat{\rho}\hat{Y}^\dagger + \hat{Z}\hat{\rho}\hat{Z}^\dagger) = (1-r)\hat{\rho} + \frac{p\hat{I}}{2} \quad (16)$$

では忠実度が状態によって依存しない。以後の説明のため成功確率を  $p = 1-r$  と定義すると、平均忠実度は以下で与えられる。

$$\bar{F} = 1 - \frac{r}{2} = \frac{1+p}{2} \quad (17)$$

## 3 Randomized Benchmarking (RB) の概要

量子計算の物理的な過程は大まかに量子状態の初期化、量子ゲートによる操作、測定 of 三段階に分かれており、各段階の物理的実装や誤り確率の評価方法はそれぞれ異なる。RB はその中でも量子ゲートの評価に特化した方法であり、従来の QPT が三段階全体を評価していたのに対して RB は量子ゲート忠実度の向上に直接的である。

RB では初期化と測定の間挟む量子ゲートの数に応じて量子過程全体の成功確率が指数関数的に減衰することを用いる。異なる量子ゲート数に対する量子過程全体の成功確率の減衰率は一つの量子ゲートあたりの成功確率に対応し、式 (17) から忠実度を求める。詳しい実験の手順は以下の通りである。

1. 量子ビットを初期化する。
2. 量子ビットにランダムに選んだ  $L$  個のクリフォードゲート<sup>2</sup> から成るゲート列をかける。
3. step2 のクリフォードゲート列の逆演算に対応するクリフォードゲートをかける。

<sup>2</sup>クリフォードゲート  $\hat{C}$  は  $\hat{P}' = \hat{C}\hat{P}\hat{C}^\dagger$  の関係を満たす、即ちパウリ演算子  $\hat{P}$  をそれ自身または他のパウリ演算子  $\hat{P}'$  にマップする演算子で定義される量子ゲートである。1 量子ビットクリフォードゲートの場合、ブロッホ球内に内接する正八面体の頂点間の変換に対応し、24 種類のクリフォード演算子からなるクリフォード群を成す。以下の説明ではクリフォードゲートを  $\hat{C}$ 、クリフォード超演算子を  $\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \hat{C}\hat{\rho}\hat{C}^\dagger$  として表記する。

#### 4. 初期状態に戻っているか測定により確認する。

理想的にはステップ3で初期状態に戻るはずだが、ステップ2の途中で起こりうる誤りによって他の状態に遷移している可能性もある。そこで、そのゲート列の成功確率を求めるために同様の実験を  $n$  回繰り返し、初期状態に戻る確率  $p'_{L,k}$  を求める。

クリフォードゲートの個数が  $L$  個のゲート列の平均成功確率  $\bar{p}'_L$  は、ランダムに選ばれた  $K$  種類のゲート列について同様の実験を行い成功確率  $p'_{L,k}$  の平均をとることで得られる。

$$\bar{p}'_L = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p'_{L,k} \quad (18)$$

誤りを含む量子ゲートを繰り返しかけるとゲート列全体での誤り確率は単調に増加するので、ゲート列の平均成功確率はクリフォードゲートの個数の増加に従って減衰する。そこで、 $M$  種類の異なる個数  $L$  (例えば、 $L = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 160$ ) についてゲート列の平均成功確率  $\bar{p}'_L$  を求め、その減衰率から一回のゲートあたりの成功確率を求める。通常 RB ではクリフォードゲートの違いによるノイズ超演算子は等しいと仮定し、その仮定のもとではゲート列の平均成功確率がクリフォードゲートの個数に対して指数減衰することが示されているため、関数  $\bar{p}'_L = Ap^L + B$  でフィッティング<sup>3</sup>すると一回のゲートあたりの成功確率が減衰率  $p$  で与えられる。量子ゲートの平均忠実度  $\bar{F}$  は次節で示されるように成功確率  $p$  の分極消去誤りとして計算される。

$$\bar{F} = \frac{1+p}{2} \quad (19)$$

## 4 RB の理論

RB の実験的効率性と量子誤り訂正閾値との整合性は以下の二つのポイントから説明される。本節では RB の理解を深めるためにこれらのポイントを軸に RB のエッセンス紹介する。

1. ゲート列の構成による誤り確率の偏りの解消 (トワリング)
2. トワリングの効率化 (Unitary t-design)

<sup>3</sup>A と B は SPAM 誤りの大きさに依存する係数である。

#### 4.1 ゲート列の構成に依存した誤り確率の偏りの解消 (トワリング)

RB ではゲート列をかけている間、量子ビットの状態ベクトルが変化し続ける。量子ビットに加わるノイズが分極消去ノイズのように等方的であれば、毎回のゲートによる誤り確率が等しくなるためエラー確率の蓄積に偏りが生まれないので問題はない。しかし、非等方的なノイズ (cf. ビット誤り、位相誤り、ビット-位相誤りの生起確率が等しくない状況) 下では、ゲート列にの構成に依存する状態ベクトルの軌跡によって蓄積される誤り確率に偏りが生まれてしまう。そこで、RB では非等方的なノイズを実効的に分極消去ノイズに置き換えるトワリング (Twirling)[4] を活用することで誤り確率の偏りを解消する。

$\hat{U}$  をユニタリーゲート、 $\Lambda$  をノイズ超演算子としたとき、密度行列  $\hat{\rho}$  に対する以下の操作  $\mathcal{W}(\Lambda)(\hat{\rho}, \hat{U})$  を考える。

$$\mathcal{W}(\Lambda)(\hat{\rho}, \hat{U}) = \hat{U}^\dagger \Lambda(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) \hat{U} \quad (20)$$

これは初期状態  $\hat{\rho}$  にユニタリー演算子  $\hat{U}$  をかけた後にノイズ  $\Lambda$  を受け、最後に逆変換  $\hat{U}^\dagger$  で戻すことに対応する。

トワリングとは  $\mathcal{W}(\Lambda)(\hat{\rho}, \hat{U})$  の平均をとることでノイズ超演算子  $\Lambda$  下における平均忠実度と等しい平均忠実度を与える分極消去ノイズ  $\Lambda_d(\hat{\rho}) = p\hat{\rho} + (1-p)\frac{\hat{I}}{d}$  を得ることを指す。なお、左辺の積分は  $U(d)$  上のハール測度  $\mu$  に関するものである。

$$\bar{\mathcal{W}}(\Lambda)(\hat{\rho}) = \int_{U(d)} \mathcal{W}(\Lambda)(\hat{\rho}, \hat{U}) d\mu(\hat{U}) = \int_{U(d)} \hat{U}^\dagger \Lambda(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) \hat{U} d\mu(\hat{U}) = p\hat{\rho} + (1-p)\frac{\hat{I}}{d} \quad (21)$$

理想的には全てのユニタリーゲートについて実験をすれば完全なトワリングが実現できるが、ユニタリーゲートの要素は無限個あり現実的には厳しい。そこで、次節ではトワリングを効率的に行う方法について述べる。

#### 4.2 トワリングの効率化 (Unitary t-design)

ユニタリー演算子についてのトワリングはユニタリー演算子の集合全体についての積分が必要であったため実験的には困難であったが、トワリングに必要な積分を要素数が有限の部分集合内の有限和に置き換えられれば実験的に都合が良い。本節ではトワリングの効率化の中心的な役割を担う Unitary t-design を導入し、クリフォードゲートによるトワリングの効率化について述べる。

**定義: Unitary t-design** ユニタリー演算子  $\hat{U} \in U(d)$  について  $(t, t)$  次の複素斉次多項式  $p_{(t,t)}$  の全てが以下の等式を満たすようなユニタリー演算子の部分集合  $\{\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_J\}$  を Unitary t-design と呼ぶ。なお、左辺の積分は  $U(d)$  上のハール測度  $\mu$  に関するものとする。

$$\int_{U(d)} p_{(t,t)}(\hat{U}) d\mu(\hat{U}) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J p_{(t,t)}(\hat{U}_j) \quad (22)$$

前節で導入したトワリングの式の積分の中身はユニタリー演算子  $\hat{U} \in U(d)$  について  $(2, 2)$  次の複素斉次多項式であり、クリフォード演算子の集合  $Clif. = \{\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_{|Clif.|}\}$  は Unitary 2-design を成す [5] ので、以下の等式を満たす。

$$\int_{U(d)} \hat{U}^\dagger \Lambda(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}) \hat{U} d\mu(\hat{U}) = \frac{1}{|Clif.|} \sum_{j=1}^{|Clif.|} \hat{C}_j^\dagger \Lambda(\hat{C}_j \hat{\rho} \hat{C}_j^\dagger) \hat{C}_j \quad (23)$$

クリフォードゲートも超演算子で書き直すと、

$$\frac{1}{|Clif.|} \sum_{j=1}^{|Clif.|} \hat{C}_j^\dagger \circ \Lambda \circ \hat{C}_j(\hat{\rho}) = p\hat{\rho} + (1-p)\frac{\hat{\mathbf{I}}}{d} \quad (24)$$

以上より、トワリングを行うためには全てのユニタリー演算子について積分を取る必要はなく、クリフォード演算子で定義された量子ゲート (クリフォードゲート) について式 (20) の平均をとれば量子ゲートに対するノイズ超演算子から得られる忠実度と等しい分極消去ノイズが得られることがわかる。

### 4.3 Randomized Benchmarking から得られる平均忠実度

最後に、以上の二つのポイントを踏まえた上で前節で述べた RB による平均忠実度の求め方を導く。ここでは、環境から受けるノイズ超演算子がゲート列内の量子ゲートの種類やゲート列内での順番に依存せず (ゲート列内のどのクリフォードゲートに対してもノイズ超演算子  $\Lambda$  がかかる)、毎回のノイズがマルコフ性であると仮定する<sup>4</sup>。

合計  $L$  個のクリフォードゲートから成るゲート列について、前節のステップ 1 ~ 2 後の終状態の密度行列  $\hat{\rho}_L$  を超演算子を用いて表すと以下のようになる。

$$\hat{\rho}_L = \Lambda \circ \hat{C}_{i_L} \cdots \circ \Lambda \circ \hat{C}_{i_2} \circ \Lambda \circ \hat{C}_{i_1}(\hat{\rho}) \quad (25)$$

<sup>4</sup>ノイズ超演算子がクリフォード量子ゲート及び作用させるタイミングに依存する場合は [3] を参考にするとよい。

ここで、 $\hat{\rho}$  は  $\hat{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0|$  に用意しようとして初期化誤り  $\epsilon_i$  を含んでしまった状態の密度演算子を  $\hat{\rho} = (1 - \epsilon_i)|0\rangle\langle 0| + \epsilon_i|1\rangle\langle 1|$  とする。

式 (25) の形では前節で取り上げたトワリングを実行することができないので、これよりトワリングが実行可能な  $\hat{\rho}_L$  の形が得られるよう式変形を行う。以下では  $D_{i_L} = C_{i_L} \circ \dots \circ C_{i_2} \circ C_{i_1}$  を用いる。なお、クリフォード超演算子は  $\circ$  を演算として群をなすので  $D_{i_L}$  もクリフォード超演算子である。

まず、 $L$  以下のすべての自然数  $n$  について命題「 $P(n): \hat{\rho}_n = D_{i_n} \bigcirc_{m=1}^{m=n} (D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m})(\hat{\rho})$ 」が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。  
 $n = 1$  のとき、

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 &= \Lambda \circ C_{i_1}(\hat{\rho}) \\ &= C_{i_1} \circ C_{i_1}^\dagger \circ \Lambda \circ C_{i_1}(\hat{\rho}) \\ &= D_{i_1} \circ (D_{i_1}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_1})(\hat{\rho})\end{aligned}\quad (26)$$

よって、 $P(1)$  が真であることが示された。

次に、 $1 \leq k < n$  を満たす自然数  $k$  について  $P(k)$  が真であると仮定すると、

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_k &= \Lambda \circ C_{i_k} \circ \dots \circ \Lambda \circ C_{i_2} \circ \Lambda \circ C_{i_1}(\hat{\rho}) \\ &= D_{i_k} \left( \bigcirc_{m=1}^{m=k} D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m} \right) (\hat{\rho})\end{aligned}\quad (27)$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{k+1} &= \Lambda \circ C_{i_{k+1}} \circ \Lambda \circ C_{i_k} \circ \dots \circ \Lambda \circ C_{i_2} \circ \Lambda \circ C_{i_1}(\hat{\rho}) \\ &= \Lambda \circ C_{i_{k+1}} \circ D_{i_k} \left( \bigcirc_{m=1}^{m=k} D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m} \right) (\hat{\rho}) \\ &= \Lambda \circ D_{i_{k+1}} \left( \bigcirc_{m=1}^{m=k} D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m} \right) (\hat{\rho}) \\ &= D_{i_{k+1}} \circ D_{i_{k+1}}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_{k+1}} \left( \bigcirc_{m=1}^{m=k} D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m} \right) (\hat{\rho}) \\ &= D_{i_{k+1}} \left( \bigcirc_{m=1}^{m=k+1} D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m} \right) (\hat{\rho})\end{aligned}\quad (28)$$

が導かれるので、 $1 \leq k < n$  を満たす自然数  $k$  について  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  が示された。

以上より、数学的帰納法から  $L$  以下のすべての自然数  $n$  について命題「 $P(n): \hat{\rho}_n = D_{i_n} \left( \bigcirc_{m=1}^{m=n} D_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ D_{i_m} \right) (\hat{\rho})$ 」、が真であることが証明された。□

ステップ 3 による逆演算子は  $C_{i_1}^\dagger \circ \dots \circ C_{i_2}^\dagger \circ C_{i_L}^\dagger = D_{i_L}^\dagger$  なので、測定前の終状態  $\hat{\rho}_{fin}$  は逆演算子に対応するクリフォードゲートに対するノイズ超演算子も考慮すると以下のようになる。

$$\hat{\rho}_{fin} = \Lambda(\bigcirc_{m=1}^{m=L} \mathcal{D}_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ \mathcal{D}_{i_m})(\hat{\rho}) \quad (29)$$

よって、最後に測定誤り  $\epsilon_m$  を含む測定  $\hat{E} = (1 - \epsilon_m)|0\rangle\langle 0| + \epsilon_m|1\rangle\langle 1|$  を加えると個数  $L$  のゲート列の成功確率  $p'_L$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} p'_L &= \text{Tr}[\hat{E}\hat{\rho}_{fin}] \\ &= \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\bigcirc_{m=1}^{m=L} \mathcal{D}_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ \mathcal{D}_{i_m})(\hat{\rho})] \end{aligned} \quad (30)$$

$p'^L$  の全ての  $i_m(1, 2, \dots, L)$  についての和をとることで、クリフォードゲートに関するトワリングが実行され平均成功確率が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{p}'_L &= \sum_{i_1, \dots, i_L=1}^{|Clif.}|} p'_L \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_L=1}^{|Clif.}|} \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\bigcirc_{m=1}^{m=L} \mathcal{D}_{i_m}^\dagger \circ \Lambda \circ \mathcal{D}_{i_m})(\hat{\rho})] \\ &= \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\bigcirc_{m=1}^{m=L} \Lambda_d \hat{\rho})] \\ &= \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(p^L \hat{\rho} + (1 - p^L) \frac{\mathbf{I}}{d})] \\ &= \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\hat{\rho} - \frac{\mathbf{I}}{d})]p^L + \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\frac{\mathbf{I}}{d})] \end{aligned} \quad (31)$$

以上より、 $A = \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\hat{\rho} - \frac{\mathbf{I}}{d})]$ 、 $B = \text{Tr}[\hat{E}\Lambda(\frac{\mathbf{I}}{d})]$  とすることにより、ゲート列平均成功確率のゲート数に関するフィッティング関数  $\bar{p}'_L = Ap^L + B$  が得られた。ゆえに、 $p$  は初期化と測定に関わる部分とは完全に分離され、この  $p$  を用いて SPAM 誤りから独立したクリフォードゲートの平均忠実度  $\bar{F} = \frac{1+p}{2}$  が得られる。

実際には、トワリングによる効率化にも関わらず、式 (30) において  $p'^L$  の全ての  $i_m(1, 2, \dots, L)$  についての和をとることは依然大量の実験を行うことを必要とする。例えば、ゲート列内のゲート数が 100 個程度に対して、1 量子ビットクリフォードゲートの場合でも  $|Clif.| = 24$ 、即ち  $24^{100}$  種類のランダムゲート列が必要となる。そのため、RB ではそのうちの幾つかをランダムサンプリングしたゲート列から平均成功確率を求める。

## 5 RBを用いた超伝導量子ビットゲートの評価

我々は超伝導量子ビット<sup>5</sup>の基底状態  $|0\rangle$  と第一励起状態  $|1\rangle$  から成る量子二準位系に対する1量子ビットゲートをRBで評価した。超伝導量子ビットは空洞共振器内の定在波モードの腹に配置することで空洞共振器中のマイクロ波光子と強く相互作用し、回路量子電磁気学の実験系を実現できる。量子ビット共鳴周波数と共振器共鳴周波数は離調させて分散的に結合させることで量子ビットの制御と測定を行った。量子ビットの制御には量子二準位と共鳴するマイクロ波から誘起されるラビ振動を利用し<sup>6</sup>、測定は量子ビットの状態に応じて入力コヒーレント光が異なる反射特性<sup>7</sup>を示すことを利用した。測定の際に得られる反射波の複素振幅は量子ビットの状態  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  に依存しており、それらの点をIQ平面上の黄点と緑点で表した<sup>8</sup>。各ゲート列の測定点は同じゲート列に対して数千回実験を行い二つの複素振幅のアンサンブル平均を取った点をIQ平面上の赤点で表示した。

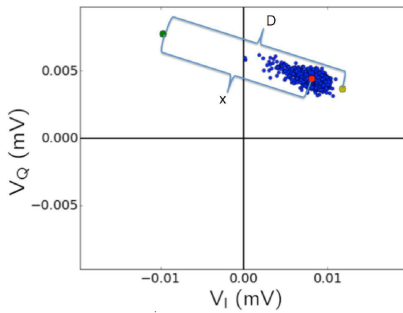


Figure 2: 反射波の複素振幅

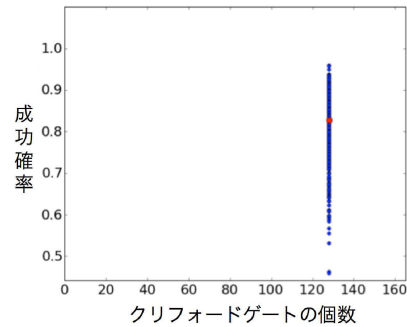


Figure 3: 複素振幅を成功確率に変換

左上の図では  $K = 400$  種類のゲート列の測定点をIQ平面にプロットした。クリフォードゲートの個数が  $L = 128$  個のあるゲート列の成功率  $p'_{L=128,k}$  は各測定点から黄点 ( $|0\rangle$ ) と緑点 ( $|1\rangle$ ) を結ぶ線分に下ろした垂線の足と緑点

<sup>5</sup>ジョセフソン接合素子とキャパシタンスからなる並列回路。LC共振回路におけるインダクタンスの代わりに非線形な電流特性を持つジョセフソン接合素子を用いることで、非調和振動子型の非等間隔なエネルギー準位を得る。そして、そのエネルギー準位の基底準位と第一励起準位を実効的な二準位系として量子ビットの実験を行った。

<sup>6</sup>ある時間幅を持つマイクロ波パルスで量子ゲートと呼ぶことにする。

<sup>7</sup>共振器の共鳴周波数が量子ビットの状態に依存するので、プローブ光の分光実験を行うとどちらの状態か分かる。

<sup>8</sup> $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  の間のIQ平面上での距離は入力コヒーレント光の周波数に依存するが、本実験ではその分離度が最も大きくなるように入力コヒーレント光の周波数を設定した。

の距離  $x_k$  を黄点と緑点を結ぶ線分の長さ  $D$  で割ったものとする。

$$p'_{L=128,k} = \frac{x_k}{D} \quad (32)$$

また、ゲート列内のクリフォードゲート数に対する各測定点の成功確率  $p'_{L=128,k}$  を青い点としてプロットしたものが右上の図である。なお、赤い点は  $p'_{L=128,k}$  の平均をとった平均成功確率  $\bar{p}'_{L=128}$  である。

$$\bar{p}'_{L=128} = \frac{1}{400} \sum_{k=1}^{400} p'_{L=128,k} = \frac{x}{D} \quad (33)$$

さらに、 $L = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 160$  についても同様の測定を行い、以下の通り指数関数でフィッティングした。

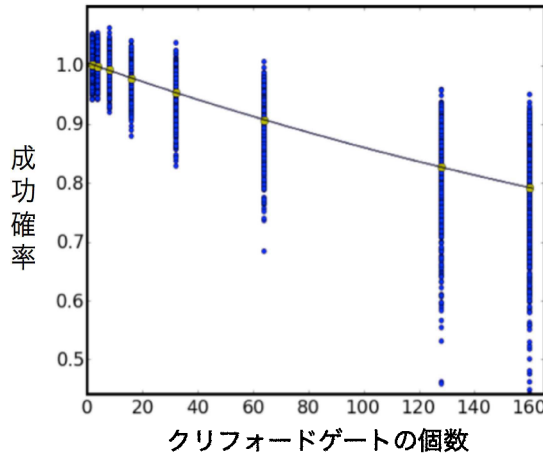


Figure 4:  $L = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 160$  の平均成功確率  $\bar{p}'_L$

上図のフィッティング関数から減衰率  $p = 0.997$  が得られ、平均忠実度が  $\bar{F} = \frac{1+p}{2} = 99.85\%$  と計算される。

## 6 まとめと展望

本稿では RB の手法及びその原理を紹介した。近年、量子誤り訂正符号への実装に耐えうる高忠実度量子ゲートを目指す研究で RB が主流となってい

るのは本稿で述べた通り、SPAM 誤りと独立に量子ゲート評価ができること及び実験の簡便性によるものと考えられる。さらに、量子誤り訂正符号の誤り閾値は RB の忠実度計算と同様にマルコフ性の分極消去誤りを仮定して計算する場合が多く、この誤り閾値を満たす目的の下では RB で量子ゲートの忠実度を評価することは整合性がある。

しかし、現実の物理系で量子計算過程中の誤りがマルコフ性を満たさない場合や分極消去誤りでない場合、上記の誤りモデルから導かれる誤り閾値や RB で得られる平均忠実度は量子誤り訂正符号の実装には不十分な指標である可能性がある。そのため、現実の量子ゲートに起こりうる誤りがマルコフ性を持つか分極消去誤りであるかを確かめた上で、もしその仮定を満たさない場合には誤り閾値や忠実度の計算方法を再考する必要がある。

RB は忠実度を計算する理論ではマルコフ性を仮定しているものの、実験では連続する量子ゲートから成る現実のゲート列を評価しており、非マルコフなノイズの影響を反映するはずである。そのため、RB は量子計算中の誤りがマルコフ性を持つか否かを調べる指標として使うことができる可能性がある。実際、H. Ball[6] らはあるゲート列長さにおけるランダムに選んだゲート列の成功確率の分布がマルコフ性を持つノイズと時間相関を持つノイズの場合では異なることを予言しており、我々の実験でも時間相関があるノイズがゲート列の成功確率に影響している傾向が確認された。

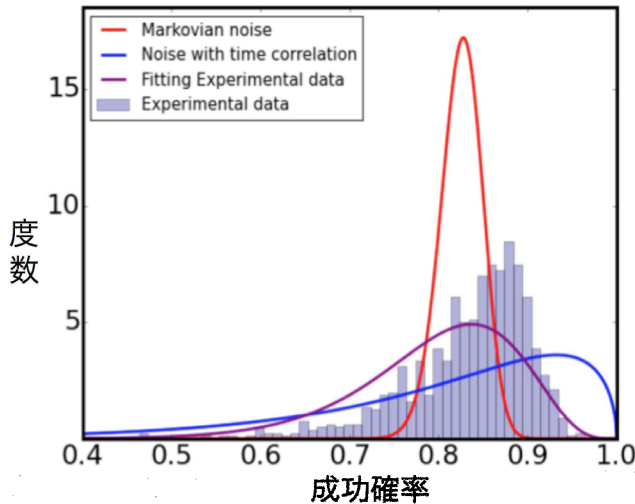


Figure 5: ゲート列の成功確率の頻度分布

上図はランダムに選んだゲート列の成功確率の度数分布をヒストグラムにしたものである。赤線と青線はマルコフ性を持つノイズ (時間相関の長さ=ゲート1個分) と時間相関のあるノイズ (時間相関の長さ=ゲート列の長さ) 下のゲート列の成功確率の度数分布に対する H.Ball らの理論曲線を我々の実験系に即して書き直したものである。彼らはさらに、時間相関長さと分布の形を対応させる理論式も導いており、我々の実験で得られた分布に当てはめると紫線のようになり、ノイズの時間相関長さが 1800 ns 程度であることが推測される。

今後の課題としては、我々の実験で得られたゲート列の成功確率の度数分布をより正確に説明するノイズを特定することが挙げられる。超伝導量子ビットを用いた回路量子電磁力学の実験系での非マルコフなノイズモデルを分析することは、将来的にこの系で量子誤り訂正符号誤り閾値を非マルコフノイズを考慮して計算する際に重要な役割を果たすはずである。また、他の一般的な系に対する非マルコフなノイズに対しても適用可能な平均忠実度の求め方や量子誤り訂正閾値の計算手法を構築することも同時に重要であると考えられる。

## References

- [1] Isaac L. Chuang et al., "Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box", *Journal of Modern Optics*, 44:11-12, 2455-2467 (1997).
- [2] Emmanuel Knill et al., "Randomized benchmarking of quantum gates", *Phys. Rev. A*, **77**, 012397 (2008).
- [3] Easwar Magesan et al., "Characterizing quantum gates via randomized benchmarking", *Phys. Rev. A*, **89**, 062321 (2014).
- [4] Joseph Emerson et al., "Scalable noise estimation with random unitary operators", *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **7**, S347-S352 (2005).
- [5] Christoph Dankert et al., "Exact and Approximate Unitary 2-designs: Constructions and Applications", *Phys. Rev. A*, **80**, 012304 (2009).
- [6] Harrison Ball et al., "The effect of noise correlations on randomized benchmarking", *Phys. Rev. A*, **93**, 022303 (2015).