

KR の transfer について

京大 数理研 永田 雅嗣

G を有限群とする。 G -コホモロジー論 h_G^* において、同変ファイバーバンドルに対して定義される Becker-Gottlieb 型の transfer, Nishida transfer が、 KR_G -群においては、同変有限被覆に対して幾何学的に定義される Atiyah transfer と一致することを証明する。この結果を使って、 KR -論における Segal-Becker 型定理を証明することもできる。

§1. 定義

G を有限群、 Γ をコンパクトリー群、 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } \Gamma$ を準同型とする。 $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ が (Γ, α, G) -bundle であるとは、

$E = \tilde{E} \times_{\tilde{p}} F$, $\tilde{E} \xrightarrow{\tilde{p}} B$ は principal Γ -bundle,

$\tilde{E}$ は $\Gamma \rtimes G$ -space で $\tilde{p}$ は G -map,

F は closed $\Gamma \rtimes G$ -manifold, B は compact G -space

が成り立つときをいう。([5] 参照。)

h_G^* を Kosniowski [4] の意味での $RO(G)$ -graded な G -コホモロジー論とする。 (Γ, α, G) -bundle $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ に対する Nishida transfer

$$p_! : h_G^*(E) \longrightarrow h_G^*(B)$$

は、[5] において次のように定義された。

$F \hookrightarrow W$ を実 $\Gamma \rtimes G$ -module W への $\Gamma \rtimes G$ -embedding, $\nu(F)$ をその法束とする。 G -ベクトル束 $\eta = \tilde{E} \times_{\Gamma} W \rightarrow B$ に対して、 $\eta \oplus \eta^\perp \cong B \times V$ (V は実 G -module) となる $\eta^\perp$ をとる。

$$t(p) : B_+ \wedge V^c = (B \times V)^c \longrightarrow (E \times V)^c = E_+ \wedge V^c$$

を、 $B \times V \cong (\tilde{E} \times_{\Gamma} W) \oplus \eta^\perp \xrightarrow{\text{open embedding}} (\tilde{E} \times_{\Gamma} \nu(F)) \times_B \eta^\perp \xrightarrow{\text{proper map}} (\tilde{E} \times_{\Gamma} (F \times W)) \times_B \eta^\perp \cong E \times V$ の一点コンパクト化によりつくる。ここに X_+ は $X \amalg (\text{一点})$, V^c は V の一点コンパクト化をあらわす。合成

$$p_! : h_G^*(E) = \tilde{h}_G^*(E_+) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_G^{**+V}(E_+ \wedge V^c) \xrightarrow{t(p)^*} \tilde{h}_G^{**+V}(B_+ \wedge V^c) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_G^*(B_+) = h_G^*(B)$$

を Nishida transfer という。

以下では (Γ, α, G) -bundle $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ が finite G -covering, すなわち F が有限集合のときを考える。

$h_G^* = KR_G^*$ とする。すなわち KR_G は実性 G -ベクトル束の K -理論であって、(G は実性有限群, すなわち 対合 $\tau: G \rightarrow G$ をもつ)

$$KR_G^{V-W}(X) = \tilde{K}R_G(X_+ \wedge (W \oplus \overline{V})^c)$$

とおくことにより $RO(G \rtimes \mathbb{Z}_2)$ -graded な $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ -コホモロジー論になる。(ここに $\overline{V}$ は $V \oplus \overline{V} \in RR(G)$ となるような実表現で

ある。 $\bar{V}$ の定義、および KR_G^* の定義については [3] 参照.)

Atiyah の幾何学的 transfer $\tau: KR_G(E) \rightarrow KR_G(B)$ は、
 E 上の実性 G -ベクトル束 $\xi \rightarrow E$ に対し、実性 G -ベクトル
 束 $\tau\xi \rightarrow B$ を、

$$(\tau\xi)_x = \bigoplus_{y \in p^{-1}(x)} \xi_y$$

とおくことにより定義された。 ([1])

§ 2. 命題と系

命題 $E \rightarrow B$ が finite G -covering のとき、

$$\tau = p_! : KR_G^0(E) \rightarrow KR_G^0(B)$$

系 $G = \{e\}$ とする。 $U(2n)/_{\{1\} \times N(T^{n-1}) \times U(n)} \rightarrow U(2n)/_{T^1 \times N(T^{n-1}) \times U(n)}$

に同伴した 1 次元実性ベクトル束を α 、

$U(2n)/_{\{1\} \times U(n)} \rightarrow U(2n)/_{N(T^n) \times U(n)}$ に同伴した n 次元実性

ベクトル束を β とする。ただし $U(2n)$ およびその部分

群には標準的な複素共役による対合が与えられている

ものとする。このとき n 重 covering $p: U(2n)/_{T^1 \times N(T^{n-1}) \times U(n)}$

$\rightarrow U(2n)/_{N(T^n) \times U(n)}$ に対する transfer を $p_!$ とすると、

$$p_!(\alpha) = \beta.$$

この系は、次の定理の証明に使われる。

定理 ([6]) $\mathbb{C}P^\infty$ に標準的な複素共役による対合を与える。 X を基点をもった finite $\mathbb{Z}_2$ -complex とすると、

自然な split epimorphism

$$\lambda_*: \{X, \mathbb{C}P^\infty\}_{\mathbb{Z}_2} \rightarrow \widetilde{KR}(X)$$

が存在する。

§ 3. 命題の証明

$F \rightarrow E \rightarrow B$ が finite G -covering のときは、 $\nu(F) \cong F \times W$ となるから、transfer を定義する写像 $t(p)$ は、 $t(p) = i^c$ 、ただし

$$i: E \times V \hookrightarrow B \times V$$

は実性 G -open embedding で合成 $E \hookrightarrow E \times V \hookrightarrow B \times V \rightarrow B$ が p と一致するもの、としてよい。

コンパクトな実性 G -space X に対し、 KR_G -論の懸垂同型 σ は、次の合成により得られる。

$$KR_G(X) \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda_{V \oplus \bar{V}}} KR_G(X \times V \times \bar{V}) \xrightarrow[\cong]{f} \widetilde{KR}_G(X_{+ \wedge (V \oplus \bar{V})^c}) = KR_G^V(X_{+ \wedge V^c})$$

ただし $\Lambda_{V \oplus \bar{V}}$ は、 $V \oplus \bar{V} \in RR(G)$ を複素ベクトル空間とみての外積による Thom 要素、また局所コンパクト実性 G -space Y に対する $KR_G(Y)$ は、コンパクトな support をもつ Y 上の実性 G -ベクトル束の複体 に、[7], §3 に示されたような同値関係を入れたもののなす集合と定義する。このとき " $\otimes \Lambda_{V \oplus \bar{V}}$ "

が同型になることは [2], § 5 に示されている。

Segal の結果 ([7]) は KR_G にも同様に拡張される :

(i) Y がコンパクトのときに $KR_G(Y)$ の二つの定義は一致する。

(ii) X, A がコンパクト, $X \supset A$ のとき、

$$KR_G(X, A) \xrightarrow{\cong} KR_G(X - A)$$

これにより上の写像 f は同型になる。

V を $V \oplus \bar{V}$ でとりかえることにより、命題の証明は、図式

$$\begin{array}{ccccc} KR_G(E) & \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda} & KR_G(E \times V) & \xrightarrow{f} & \widehat{KR}_G(E_+ \wedge V^c) \\ \downarrow \tau & & & & \downarrow (i^c)^* \\ KR_G(B) & \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda} & KR_G(B \times V) & \xrightarrow{f} & \widehat{KR}_G(B_+ \wedge V^c) \end{array}$$

の可換性を示せば十分である。

補題 $i: X \hookrightarrow Y$ を局所コンパクトな実性 G -spaces の open な実性 G -embedding, Y 上の任意の実性 G -ベクトル束が *inverse bundle* をもつと仮定する。

$KR_G(X) \ni \xi = [\xi_0 \xrightarrow{\alpha} \xi_1]$, $KR_G(Y) \ni \zeta = [\zeta_0 \xrightarrow{\alpha'} \zeta_1]$ が

$$\text{supp}(\zeta) \subset X, \quad \zeta|_X = \xi \text{ in } KR_G(X)$$

を満たすとき、 $\zeta = f^{-1} \circ (i^c)^* \circ f(\xi)$ が成り立つ。

証明 次の図式は可換である :

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{KR}_G(X^c) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & KR_G(Y^c, Y^c-X) & \xrightarrow{j^*} & KR_G(Y^c, *) = \widetilde{KR}_G(Y^c) \\
 & \searrow f \cong & \downarrow \text{res} & \nearrow \text{res} & \downarrow f^{-1} \\
 & & KR_G(X) & & KR_G(Y, Y-X) \xrightarrow{j^*} KR_G(Y)
 \end{array}$$

ただし φ はコンパクト対の切除同型 ([7], (2.9)), 従って第一行の合成は $(j^*)^*$ に等しい。また res はベクトル束の複体の制限による写像で、従って垂直方向の写像は前述の (ii) により同型である。

$KR_G(X) \ni \xi = \zeta|_X$ は、 $\text{supp}(\zeta) \subset X$ であるから $KR_G(Y, Y-X)$ の元 ζ の像であるが、補題の仮定によりこの元は $KR_G(Y^c, Y^c-X)$ の元に拡張できる。([7], (A.4) 参照) $\varphi \circ f$ が同型であるからこの元は $\varphi \circ f(\xi)$ と一致し、 $f^{-1} \circ j^* \circ \varphi \circ f(\xi)$ は ξ と一致する。これで補題が証明された。

E 上の実性 G -ベクトル束 α をとる。 $i: E \times V \hookrightarrow B \times V$ について $\xi = \alpha \otimes \Lambda$, $\zeta \cong \tau(\alpha) \otimes \Lambda$ となり補題の条件を満たす ξ, ζ を、以下で構成する。

$\xi = \alpha \otimes \Lambda = [\alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{id \otimes d^E} \alpha \otimes \Lambda_1]$, $\tau(\alpha) \otimes \Lambda = [\tau(\alpha) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{id \otimes d^B} \tau(\alpha) \otimes \Lambda_1]$ とおく。 $\text{supp}(\tau(\alpha) \otimes \Lambda) = B \times \{0\}$ である。

$\{U_\lambda\}$ を、 $G \cong \mathbb{Z}_2$ -不変 finite open covering of B で、

$$p^{-1}(U_\lambda) = \coprod_j W_\lambda^j, \quad p: W_\lambda^j \xrightarrow{\cong} U_\lambda \text{ (非同変な同相)}$$

となるものとする。 $\tau(\alpha)|_{U_\lambda} = \bigoplus_j \alpha|_{W_\lambda^j}$ が成り立つ。

$s \in I = [0, 1]$ に対して、 $W_\lambda^j \times V \cong U_\lambda \times V$ 上の複素ベクトル束
準同型 $\varphi_\lambda^j(s) : \alpha|_{W_\lambda^j} \otimes \Lambda_0 \longrightarrow \alpha|_{W_\lambda^j} \otimes \Lambda_1$ を、

$$\varphi_\lambda^j(s)_{(\alpha, v)}(y \otimes w) = y \otimes \partial_{v - s \cdot \pi \circ i(\lambda, 0)}^B(w),$$

$x \in W_\lambda^j$, $y \in \alpha_x$, $v, w \in V$, ($\pi : B \times V \rightarrow V$ は射影)

で定義する。

j について直和をとることにより、 $U_\lambda \times V \times I$ 上の束準同型

$$\Delta_\lambda : (\tau(\omega) \otimes \Lambda_0) \times I \longrightarrow (\tau(\omega) \otimes \Lambda_1) \times I$$

が定まる。 $\pi \circ i : E \times V \rightarrow V$ が $G \times \mathbb{Z}_2$ -同変写像であることにより、 Δ_λ が実性 G -ベクトル束準同型であることは容易にわかる。

$\pi \circ i(\lambda, 0) \in V$ は λ のとり方により定まるから、 Δ_λ は、
 $B \times V \times I$ 上の実性 G -ベクトル束準同型

$$\Delta : (\tau(\omega) \otimes \Lambda_0) \times I \longrightarrow (\tau(\omega) \otimes \Lambda_1) \times I$$

を定める。

$\zeta = [\tau(\omega) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|_{B \times V \times \{1\}}} \tau(\omega) \otimes \Lambda_1] \in KR_G(B \times V)$ とおく。
 $s = 0$ のとき $\varphi_\lambda^j(0) = \alpha \otimes \partial^B$ であるから $\zeta \cong \tau(\omega) \otimes \Lambda$ である。また
 $\text{supp}(\zeta) = i(E \times \{0\}) \subset i(E \times V)$ である。よって $\zeta|_{i(E \times V)} \cong \alpha \otimes \Lambda$
を示せばよい。

$p^*(\tau(\omega)) = \alpha \oplus \sigma$, $\sigma|_{W_\lambda^k} = \bigoplus_{k \neq j} \alpha|_{W_\lambda^k}$ と分解することとに注意すると、
 $\zeta|_{i(E \times V)} = [p^*(\tau(\omega)) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} p^*(\tau(\omega)) \otimes \Lambda_1]$
 $= [\alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \alpha \otimes \Lambda_1] \oplus [\sigma \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \sigma \otimes \Lambda_1]$

と分解する。ここで $\Delta|_{\alpha \otimes \Lambda_0} = id \otimes z^* \partial^B$, $z: V \cong U \hookrightarrow V$, ただし U は V の原点におけるある開近傍で、標準的に V と同一視できるもの, という形をしていることは容易にたしかめられ、従って再び補題を使えば $[\alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \alpha \otimes \Lambda_1] \cong \alpha \otimes \Lambda \in KR_G(E \times V)$ がわかる。また $\Delta|_{\sigma \otimes \Lambda_0}$ は明らかに束の同型写像であるから $[\sigma \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \sigma \otimes \Lambda_1] = 0$ である。これで命題が証明された。

なお、この報告は [6] の命題 2.4 を紹介したものである。

文献

- [1] M.F. Atiyah, Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. IHES 9 (1961), 23-64.
- [2] M.F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford (2), 19 (1968), 113-40.
- [3] 橋本 伸, The transfer maps in the KR-theory, 本講要録.
- [4] C. Koenigowski, Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann. 210 (1974), 83-104.
- [5] G. Nishida, The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978) 435-451.
- [6] M. Nagata, G. Nishida and H. Toda, Segal-Becker theorem for KR-theory, preprint.
- [7] G. Segal, Equivariant K-theory, Publ. Math. IHES 34 (1968), 129-151.