

無限あるいは有限時間区間上で定義された 非周期軌道の不変多様体と制御

岐阜大工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

Faculty of Engineering, Gifu University

1. はじめに

力学系理論は、さまざまな分野において、カオスや分岐などの非線形現象を解明する上で大きな成功を収めている [1-4]. その結果のいくつかは非線形系の新たな制御法を確立するためにも用いられている [5-7]. 特に, Ott, Grebogi と Yorke [8] は, 安定多様体と不安定多様体が存在するという幾何学的な構造を用いることにより, カオス・アトラクターに埋め込まれた不安定な双曲型周期軌道を安定化可能であることを示した. その制御法は現在 OGY 法と呼ばれ, 彼らの論文発表後, 関連した分野について膨大な研究が行われ, カオス制御という大きな研究分野が形成されている [5, 6].

一方, 従来の力学系理論では, 微分方程式の場合, 自律的あるいは時間に関して周期的なベクトル場が取り扱われ, 主として時間が無限大での解の漸近的な挙動に関心が払われていた. そこで用いられたいくつかのアイデアは非周期的な時間依存性をもつ, あるいは有限時間区間上でのみ定義されたベクトル場の場合に一般化されている. 特に, 不変多様体の概念が拡張され [9-11], このような系のカオス力学 [12-14] や輸送および混合現象 [10, 15-17] を説明する手法が開発されている.

本稿では, 無限あるいは有限時間区間上で定義された, 一般的な非自律系の双曲型軌道やその不変多様体のいくつかの性質がさらに調べられる. 特に, 有限時間区間の場合, ここで採用する双曲型軌道とその不変多様体の定義は, Haller ら [10, 16] の従来のものとは異なっている. OGY 法のアイデアがこれらの系の場合に拡張され, 不安定な双曲型非周期軌道を安定化する制御法が提案される. 詳細については現在投稿中の論文 [18] を参照されたい.

2. 非双曲型軌道と不変多様体

まず, 無限時間区間 $(-\infty, \infty)$ の場合を考える. $A(t)$ を, t の連続関数を要素としてもつ n 次正方行列とし, $\|\cdot\|$ によって $\mathbb{R}^n$ 上のノルムあるいは n 次正方行列のノルムを表す. 線形微分方程式

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

は, 射影演算子 P ($P^2 = P$) と 2 つの正数 K, a が存在し, 任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \|X(t)PX^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-a(t-s)} \quad \text{for } s \leq t, \\ \|X(t)(\text{id} - P)X^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-a(s-t)} \quad \text{for } s \geq t \end{aligned} \quad (2)$$

となるとき, **exponential dichotomy** をもつという. ここで, $X(t)$ は $X(0) = \text{id}$ を満たす (id は n 次単位行列), 式 (1) の基本行列である. もし式 (1) が **exponential dichotomy** を有するならば, **安定部分空間** と **不安定部分空間**

$$\begin{aligned} E^s(\tau) &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)X^{-1}(\tau)\xi\| = 0\}, \\ E^u(\tau) &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \|X(t)X^{-1}(\tau)\xi\| = 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

が存在する [19].

さて, 一般的な非自律系

$$\dot{x} = f(x, t; \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (4)$$

を考える. ここで, f は十分に滑らかであると仮定し, μ はパラメータを表す. 式 (4) の軌道 $x = \gamma(t)$ は, そのまわりで線形化された系

$$\dot{\xi} = D_x f(\gamma(t), t)\xi \quad (5)$$

が **exponential dichotomy** を有するとき, **双曲型**であるという. 式 (4) の相空間を $\mathcal{E} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}$ に拡張し, $\Sigma_\tau = \{(x, t) \in \mathcal{E} \mid t = \tau\}$ とおき, これを**時間スライス**と呼ぶことにする. $\mathcal{E}$ において双曲型軌道 $\gamma(t)$ を $\Gamma = \{(\gamma(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と表し, $E^{s,u}(\Gamma) = \{(x, t) \mid x \in E^{s,u}(t), t \in \mathbb{R}\}$ とする. ここで, $E^{s,u}(\tau)$ は線形化方程式 (5) の安定および不安定部分空間である. 次の定理が成立する [18].

定理 1 $x = \gamma(t)$ を式 (4) の軌道とし, $\gamma_\pm(t)$ を

$$\dot{x} = f_\pm(x, t) \quad (6)$$

の双曲型軌道で

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\gamma(t) - \gamma_\pm(t)\| = 0 \quad (7)$$

を満たすものとする. また, $x = \gamma(t)$ の近傍で

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|f_\pm(x, t) - f(x, t)\| = 0 \quad (8)$$

および

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|D_x f_\pm(x, t) - D_x f(x, t)\| = 0 \quad (9)$$

が成立し, 式 (6) に対する線形化方程式

$$\dot{\xi} = D_x f_\pm(\gamma_\pm(t), t), \quad (10)$$

の安定および不安定部分空間 $E_\pm^{s,u}$ は $\dim E_+^s = \dim E_-^s$, $\dim E_+^u = \dim E_-^u$ となるものと仮定する. このとき, 線形化方程式 (5) が $(-\infty, \infty)$ 上で非自明な有界な解をもたないならば, $\gamma(t)$ は双曲型である.

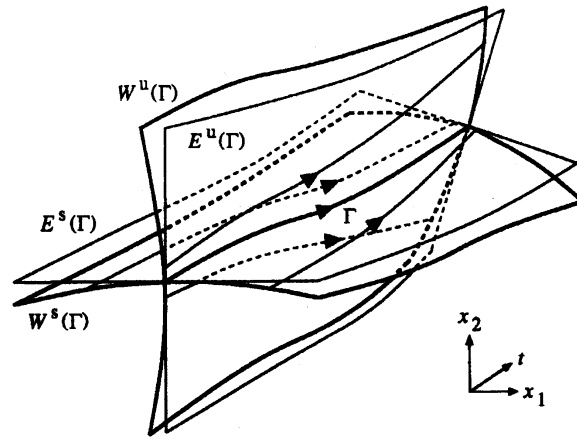


図 1. 安定多様体と不安定多様体

定理 1 より式 (4) の双曲型平衡点あるいは周期軌道に対する横断的なホモクリニック軌道は双曲型であることが導かれる。

一般に、双曲型軌道 Γ は、 Γ 上で $E^{s,u}(\Gamma)$ と接する安定多様体 $W^s(\Gamma)$ と不安定多様体 $W^u(\Gamma)$ を有する。 $W^s(\Gamma)$ あるいは $W^u(\Gamma)$ 上を出発した軌道は、 $t \rightarrow +\infty$ あるいは $t \rightarrow -\infty$ のとき、 Γ に漸近する (図 1 を参照)。さらに、小さな摂動下で $W^{s,u}(\Gamma)$ は存在し続ける。これらの事実の詳細は文献 [9, 11, 15, 18] を参照せよ。 $W^{s,u}(\Gamma, \tau) = W^{s,u}(\Gamma) \cap \Sigma_\tau$ を、 $t = \tau$ における Γ の安定スライスあるいは不安定スライスと呼ぶ。次の結果が成り立つ [18]。

定理 2 式 (4) の軌道 $\gamma(t)$ に対して、 $x = \gamma_\pm(t)$ を、条件 (7)-(9) を満足する式 (6) の双曲型軌道とし、 $\Gamma_\pm = \{(\gamma_\pm(t), t) | t \in \mathbb{R}\}$ と表す。 $T \rightarrow \infty$ のとき、 $W^s(\Gamma, T)$ と $W^u(\Gamma, -T)$ は、それぞれ、 $W^s(\Gamma_+, T)$ と $W^u(\Gamma_-, -T)$ に漸近する。

例として、 $f_\pm(x, t)$ と $\gamma_\pm(t)$ が t に関して周期的である場合を考える。このとき、不変多様体が 1 次元の場合は標準的な方法 [20, 21] により、また、多次元の場合には拡張された方法 [22, 23] により、不変多様体 $W^s(\Gamma_+, T)$ と $W^u(\Gamma_-, -T)$ を容易に計算できる。定理 2 を用いると、式 (4) の流れの下で、 $W^u(\Gamma_-, -T)$ を時間の正の方向に、 $W^s(\Gamma_+, T)$ を時間の負の方向に発展させることにより、不変多様体 $W^{s,u}(\Gamma)$ を近似的に求めることができる。

次に、有限時間区間 $[t_-, t_+]$ ($t_- < 0 < t_+$) の場合を考える。 $\phi(x_0, t; t_0)$ を式 (4) によって生成される流れとする。 $D_x \phi(\bar{\gamma}(t_-), t_+; t_-)$ が絶対値 1 の固有値をもたないとき、式 (4) の軌道 $\bar{\gamma}(t)$ を有限時間双曲型であるという。有限時間双曲型軌道 $\bar{\gamma}(t)$ に対して、写像

$$\psi(x) = \phi(x + \bar{\gamma}(t_-), t_+; t_-) - \bar{\gamma}(t_+) \quad (11)$$

を Poincaré 型写像と呼ぶ。明らかに、原点 $x = 0$ は ψ の双曲型不動点であり、標準的な力学系理論 [1, 2] によって、安定多様体 $W^s(0)$ と不安定多様体 $W^u(0)$ が存在する。相空間を $\bar{\mathcal{E}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_-, t_+]\}$ と拡張し、 $\bar{\Gamma} = \{(\bar{\gamma}(t), t) | t \in [t_-, t_+]\}$ と表す。 $\bar{\Gamma}$ の有限時間安定多様体と有限時間不安定多様体を次式によって定義する。

$$\begin{aligned} \bar{W}^s(\bar{\Gamma}) &= \{(\phi(x, t; t_+), t) \in \bar{\mathcal{E}} | x - \bar{\gamma}(t_+) \in W^s(0), t \in [t_-, t_+]\}, \\ \bar{W}^u(\bar{\Gamma}) &= \{(\phi(x, t; t_-), t) \in \bar{\mathcal{E}} | x - \bar{\gamma}(t_-) \in W^u(0), t \in [t_-, t_+]\} \end{aligned} \quad (12)$$

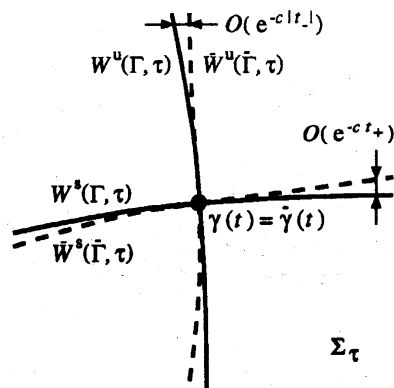


図 2. 2つのタイプの安定および不安定スライスの違い

$\tau \in [t_-, t_+]$ に対して $\tilde{W}^{s,u}(\tilde{\Gamma}, \tau) = \tilde{W}^{s,u}(\tilde{\Gamma}) \cap \Sigma_\tau$ と表し, $t = \tau$ における $\tilde{\Gamma}$ の有限時間安定スライスあるいは有限時間不安定スライスと呼ぶ. 有限時間双曲型軌道の近傍では, 有限時間区間 $[t_-, t_+]$ において有限時間安定多様体上の軌道は有限時間双曲型軌道に近づき, 有限時間不安定多様体上の軌道は有限時間双曲型軌道から遠ざかる. 次の定理が成立する [18].

定理 3 $\gamma(t)$ を無限時間区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された式 (4) の双曲型軌道とし, $t \in [t_-, t_+]$ に対して $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ と表す. このとき, 任意の $\tau \in \mathbb{R}$ と十分大きな $|t_\pm|$ に対して, $\tilde{\gamma}(t)$ は有限時間双曲型であり, $\tilde{\gamma}(\tau)$ の近傍において, $\tilde{W}^s(\tilde{\Gamma}, \tau)$ と $\tilde{W}^u(\tilde{\Gamma}, \tau)$ は, それぞれ, $W^s(\Gamma, \tau)$ と $W^u(\Gamma, \tau)$ から高々 $O(e^{-c|t-t_+|})$ と $O(e^{-c|t-t_-|})$ ($c > 0$ はある正数) の距離にある (図 2 を参照).

3. 制御

$\gamma(t)$ を, 無限時間区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された式 (4) の不安定双曲型軌道とする. OGY 法 [8] と同様に, 不安定方向に小さな摂動を適用し, 双曲型軌道 $\gamma(t)$ を安定化する. パラメータ (ベクトル) の次元 m は不安定スライス $W^u(\Gamma, \tau)$ の次元に一致し, 線形化方程式 (5) の不安定部分空間 $E^u(\tau)$ が $e_j^u(\tau)$, $j = 1, \dots, n_u$, によって張られるものとする. 任意の k に対して $t_k < t_{k+1}$ を満たす時刻列 $\{t_k | k \in \mathbb{Z}\}$ を導入する.

時刻 $t = t_k$ において双曲型軌道 $\gamma(t)$ から微小量 $\Delta x_k \in \mathbb{R}^n$ だけ偏差した軌道 $x(t)$ を考える. 時刻 $t = t_{k+1}$ においてその軌道が安定スライス $W^s(\Gamma, t_{k+1})$ に移動するようにパラメータ $\mu \in \mathbb{R}^m$ の値を $\Delta \mu_k \in \mathbb{R}^m$ だけ変化させる. 流れ ϕ を線形化すると,

$$\begin{aligned} & \phi(\gamma(t_k) + \Delta x_k, t_{k+1}; t_k; \mu + \Delta \mu_k) - \gamma(t_{k+1}) \\ & \approx D_x \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu) \Delta x_k + D_\mu \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu) \Delta \mu_k \end{aligned} \quad (13)$$

となる. $A_u(t) = (e_1^u(t), \dots, e_{n_u}^u(t))^T$ とする. ここで, 上添え字 T は転置演算を表し, m 次正方行列 $A_u(t_{k+1}) D_\mu \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu)$ は正則であると仮定した. パラメータ μ の変動量 $\Delta \mu$ を

$$A_u(t_{k+1}) [D_x \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu) \Delta x_k + D_\mu \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu) \Delta \mu_k] = 0$$

となるように, すなわち,

$$\Delta \mu_k = -(A_u(t_{k+1}) D_\mu \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu))^{-1} A_u(t_{k+1}) D_x \phi(\gamma(t_k), t_{k+1}; t_k; \mu) \Delta x_k, \quad (14)$$

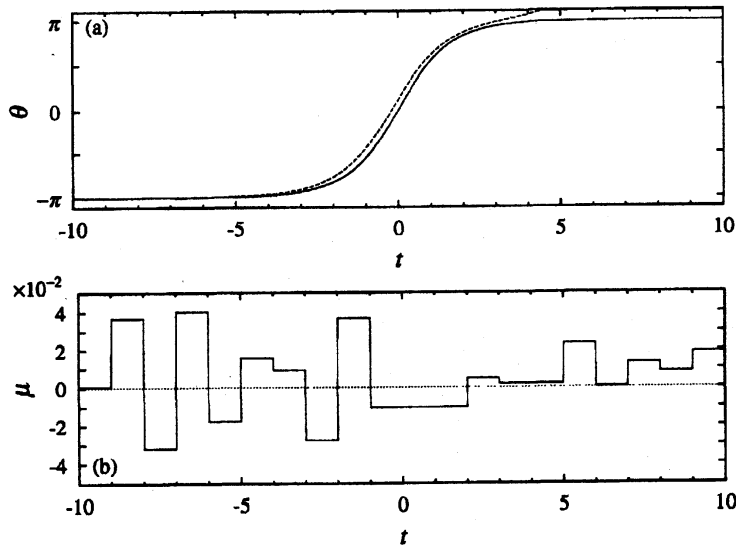


図 3. ホモクリニック軌道の制御結果：(a) 軌道；(b) パラメータ μ の変動

と選ぶと、 Δx_k と $\Delta \mu$ が十分に小さいという条件の下で、時刻 $t = t_{k+1}$ において軌道は安定スライス $W^s(\Gamma, t_{k+1})$ に移動し、 $t \rightarrow +\infty$ のとき双曲型軌道 $\gamma(t)$ に収束する。有限時間区間の場合に対しても、同様な方法により、不安定な有限時間双曲型軌道を安定化し、その近傍に留まるよう軌道を制御することができる。

4. 計算例

具体的な計算例として、次の運動方程式で与えられる、制御された振り子を考える。

$$\dot{\theta} = v, \quad \dot{v} = -\sin \theta - \delta v + u(t) \quad (15)$$

ここで、 δ は定数、 $u(t)$ は以下で定義される制御力である。 $\delta = 0$, $u(t) \equiv 0$ の場合、系 (15) は、 $t \rightarrow \pm\infty$ のとき双曲型平衡点 $(\pi, 0)$ に収束するホモクリニック軌道 $(\theta, v) = (2 \arcsin(\tanh t), 2 \operatorname{sech} t)$ を有する。目標軌道をこのホモクリニック軌道に選び、 $\mu \in \mathbb{R}$ として、制御力を

$$u(t) = 2\delta_1 \operatorname{sech} t + \delta_0 + \mu \quad (16)$$

とする。この目標軌道は不安定で双曲型である [18]。

$T = 10$ とおき、初期条件 $\theta(-T) = -\pi$, $v(-T) = 0$ を満たす軌道に対して制御を行った結果を図 3 に示す。ここで、 $\delta = 0.5$ であり、強度 0.02 のホワイトノイズが式 (15) の第 2 式の右辺に加えられている。パラメータの摂動 $\Delta \mu$ を計算するための時刻列は、時間区間 $(-1, 2)$ の時刻は含まず、時間区間 $(-1, 2)$ 以外は 1 の等間隔に取られている。軌道はほぼ目標軌道通りに制御されていることがわかる。比較のために、パラメータの値が $\mu = 0$ に固定された場合の結果が図 3(a) に破線で描かれている。

次に、 $\mu = 0$ のとき、ある T と $\Delta T > 0$ に対して $(\theta, v) = (\theta_0(t), v_0(t))$ が式 (15) の解となる

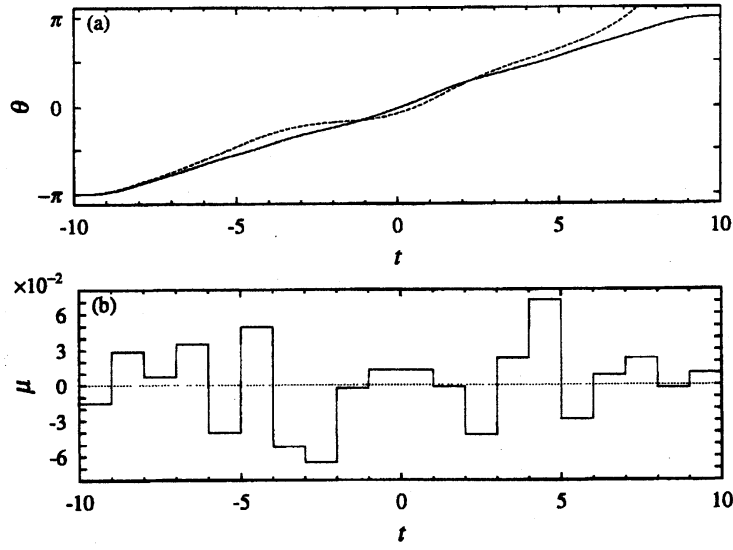


図 4.

ように制御力 $u(t)$ を選ぶ。ここで、 $T_1 = T - \Delta T$, $T_2 = T - 2\Delta T$ として、

$$\theta_0(t) = \begin{cases} -\frac{\pi[(t+T)^4 - 4\Delta T(t+T)^3]}{16T_1\Delta T^3} - \pi & \text{for } t \in [-T, -T_2]; \\ \frac{\pi}{T_1} t & \text{for } t \in [-T_2, T_2]; \\ \frac{\pi[(t-T)^4 + 4\Delta T(t-T)^3]}{16T_1\Delta T^3} + \pi & \text{for } t \in (T_2, T], \end{cases} \quad (17)$$

$$v_0(t) = \begin{cases} -\frac{\pi[(t+T)^3 - 3\Delta T(t+T)^2]}{4T_1\Delta T^3} & \text{for } t \in [-T, -T_2]; \\ \frac{\pi}{T_1} & \text{for } t \in [-T_2, T_2]; \\ \frac{\pi[(t-T)^3 + 3\Delta T(t-T)^2]}{4T_1\Delta T^3} & \text{for } t \in (T_2, T] \end{cases} \quad (18)$$

である。この目標軌道は、時刻 $t = -T$ に $\theta = -\pi$ を出発し、 $t = T$ で $\theta = \pi$ に到達する、振り子が 1 回転する軌道を表す。次式が得られる。

$$u(t) = \sin \theta_0(t; \theta_*) + \delta_1 v_0(t) + \delta_0 + u_0(t) + \mu \quad (19)$$

ここで、

$$u_0(t) = \begin{cases} -\frac{3\pi[(t+T)^2 - 2\Delta T(t+T)]}{4T_1\Delta T^3} & \text{for } t \in [-T, -T_2]; \\ 0 & \text{for } t \in [-T_2, T_2]; \\ \frac{3\pi[(t-T)^2 + 2\Delta T(t-T)]}{4T_1\Delta T^3} & \text{for } t \in (T_2, T] \end{cases} \quad (20)$$

$\delta = 0.2$, $T = 10$, $\Delta T = 1$ の場合に, 初期条件 $\theta(-T) = -\pi$, $v(-T) = 0.01$ を満たす軌道に対して, 強度 0.02 のホワイトノイズの影響下で制御を行った結果を図 3 に示す. パラメータの摂動 $\Delta\mu$ を計算するための時刻列は, 時間区間 $(-1, 1)$ の時刻は含まず, 時間区間 $(-1, 1)$ 以外は 1 の等間隔に取られている. 破線で描かれた, $\mu = 0$ に固定された場合の軌道が目標軌道から大きくはずれるのに対し, 本制御法により制御された軌道はほぼ目標軌道通りとなっていることがわかる.

参考文献

- [1] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York, 1983).
- [2] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. (Springer, New York, 1990).
- [3] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [4] K.T. Alligood, T.D. Sauer and J.A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. (Springer, New York, 1996).
- [5] G. Chen and X. Dong, *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [6] H.G. Shuster (ed.) *Handbook of Chaos Control* (Wiley-VCH, New York, 1999).
- [7] S. Sastry, *Nonlinear Systems – Analysis, Stability, and Control* (Springer, New York, 1999).
- [8] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 1196–1199.
- [9] Y. Yi, Stability of integral manifold and orbital attraction of quasi-periodic motion, *J. Diff. Eqns.*, **103** (1990), 278–322.
- [10] G. Haller and A. Poje, Finite time transport in aperiodic flows, *Phys. D*, **119** (1998), 352–380.
- [11] A.M. Mancho, D. Small, S. Wiggins and K. Ide, Computation of stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories in two-dimensional, aperiodically time-dependent vector fields, *Phys. D*, **182** (2003), 188–222.
- [12] D. Stoffer, Transversal homoclinic points and hyperbolic sets for non-autonomous maps I & II, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, **39** (1988), 518–549; 783–812.
- [13] L.M. Lerman and L.P. Šilnikov, Homoclinic structures in nonautonomous systems: Nonautonomous chaos *Chaos*, **2** (1992), 447–454.

- [14] B. Sandstede, H.S. Balasuriya, C.K.R.T. Jones and P. Miller, Melnikov theory for finite-time vector fields, *Nonlinearity*, **13** (2000), 1357–1377.
- [15] N. Malhotra and S. Wiggins, Geometric structures, lobe dynamics, and Lagrangian transport in flows with aperiodic time-dependence, with applications to Rossby wave flow, *J. Nonlinear Sci.*, **8** (1998), 401–456.
- [16] G. Haller, Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields, *Chaos*, **10** (2000), 99–108.
- [17] G. Haller, Lagrangian structures and the rate of strain in a partition of two-dimensional turbulence *Phys. Fluids A*, **13** (2001), 3365–3385.
- [18] K. Yagasaki, Invariant manifolds and control of hyperbolic trajectories, submitted for publication.
- [19] W.A. Coppel, *Dichotomies in Stability Theory*, Lecture Notes in Math. No.629 (Springer, New York, 1978).
- [20] T.S. Parker and L.O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer, New York, 1989).
- [21] H.E. Nusse and J.A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations* (Springer, New York, 1997).
- [22] B. Krauskopf and H. Osinga, Two-dimensional global manifolds of vector fields, *Chaos* **9** (1999), 768–774.
- [23] Dellnitz M and Junge O 2002 Set oriented numerical methods for dynamical systems, in B. Fiedler (ed.), *Handbook of Dynamical Systems*, Vol. 2 (Elsevier, Amsterdam, 2002), pp 221–264.