

Homotopy normality について

愛知教育大学 古川靖邦

Furukawa Yasukuni

1 まえがき

群論におけるような概念を homotopy 圏で考えることは多い。例えば homotopy-abelian, homotopy normal 等……。

James [3] は $k=2$ or $k \geq 4$ のとき U_k は回転群 R_{2k} の McCarty の意味での homotopy normal な部分群になることを示した。

Bott の結果を relative Samelson 積にしたこの証明方法は $k=3$ の場合に適用できない。この小稿では $k=3$ の homotopy normality を示し (定理 1), この obstruction を用いて例外リー群の場合について調べる (定理 2)。

2 定義と例

定義 1. リー群 G の部分群 H が McCarty [6] の意味で homotopy normal とは homotopy $\nu: (G \times H, H \times H) \rightarrow (G, H)$ が存在して $\nu_1(G \times H) \subset H$, $\nu_0(g, h) = ghg^{-1}$ ($g \in G, h \in H$) とみえろとき。

定義 2. 上の定義で homotopy について 2 の条件
 $V_t(H \times H) \subset H$ を要求しないとき H は G で James [2] の
 意味で homotopy normal という。

上の定義より次の可換な図式 (James [4])

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_p(H) \times \pi_q(G) & \\
 \swarrow i_x \times 1 & & \searrow 1 \times j_x \\
 \pi_p(G) \times \pi_q(G) & & \pi_p(H) \times \pi_q(G, H) \quad \text{----- (A)} \\
 \downarrow \langle, \rangle & & \downarrow \langle, \rangle \\
 \pi_{pq}(G) & \xrightarrow{j_x} & \pi_{pq}(G, H)
 \end{array}$$

(但し, i は injection, j は projection),

において右側の写像 $\langle, \rangle (1 \times j_x)$ が必ず p , q で零と
 ならないとき James の意味で homotopy normal である。
 又, ある p , q に対して $\langle, \rangle : \pi_p(H) \times \pi_q(G, H) \rightarrow \pi_{pq}(G, H)$
 が零でないとき McCarty の意味で homotopy-normal である
 という obstruction を与えている。

例 1 $G = \text{real (complex) affine group}$,

$H = GL(n, F)$ (但し $F = R$ or C) とおくと

H は G の normal subgroup であるが James の意味で
 homotopy normal.

例 2 $G = S^3$, $H = S^1$ とおくと S^1 は James'sense で

homotopy normal $\subset$ McLarty's sense $\subset$ homotopy normal
でない (27).

例 3. G, H が古典群 n を 2 倍 n の q 場合 group n 2
normal $\subset$ なければ homotopy sense $\subset$ normal に含まれる。
(James [2, 3, 4], McLarty [6], Kachi [5]).

3 定理と予想

定理 1 U_3 は R_6 $\subset$ homotopy normal $\subset$ ない (James's sense)

定理 2 subgroups $SU_3 \subset G_2, G_2 \subset Spin(7),$

$Spin(7) \subset Spin(8), Spin(8) \subset Spin(9), Spin(9) \subset F_4$ は
homotopy normal $\subset$ ない, (McLarty's sense).

系 3 G_2 は R_7 $\subset$ homotopy normal $\subset$ ない (James's sense).

予想 単連結, コンパクト, 単純リー群 n は n $\subset$ homotopy
normal な部分群 n を含む (McLarty or James's sense)

定理 1 の証明 下の可換図式のように生成元をおく.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}\{\hat{v}_3\} = \pi_3(U_3) & & \pi_{10}(U_3) = \mathbb{Z}_2\{\hat{v}_5\hat{v}_8^2\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}\{\hat{v}_3\} \times \mathbb{Z}\{\hat{v}_7\} = \pi_3(U_4) \times \pi_7(U_4) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{10}(U_4) = \mathbb{Z}_8\{\hat{v}_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\hat{v}_5\hat{v}_8^2\} \\
 \uparrow \cong & \curvearrowright & \uparrow \cong \\
 \pi_3(R_6) \times \pi_7(R_6) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{10}(R_6)
 \end{array}$$

但し i, i' は適当な injection, q は合成

$$\pi_2(R_6) \xleftarrow{\cong} \pi_2(\text{spin}(6)) \xrightarrow{\cong} \pi_2(U_4) \quad \text{とす。}$$

(A) $H = U_3, G = U_4$ とおくと

$$\hat{J}_x \langle \hat{v}_2 z_3, \hat{z}_7 \rangle = \langle \hat{v}_2 z_3, \hat{z}_7 \rangle = 2J_c(\hat{v}_2 z_3) = 2E^2(J_c z_3) \cdots \cdots (B)$$

(J_c については [1] 参照)

$\therefore$ 写像 $k: \pi_3(R_4) \rightarrow \pi_3(R_5) \xrightarrow{\cong} \pi_3(R_7)$ に $\neq 0$ の生成元 $\hat{z}_3$ が z にうつるものとする; $k(\hat{z}_3) = z$. 可なり

$$J_c(\hat{v}_2 z_3) = J_R(z) = J_R k(\hat{z}_3) = E^3 J_R(\hat{z}_3) = E^3 v_4 = v_7 \neq 0 \quad \cdots \cdots (C)$$

□

定理 2 の証明 (i) $SU_3 \subset G_2$ について;

下の可換図式におけるように 2-成分の生成元をとる

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\langle \hat{v}_2 z_3 \rangle \times \mathbb{Z}\langle \hat{z}_6 \rangle = \pi_3(SU_3) \times \pi_6(G_2/SU_3) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_9(G_2/SU_3) = \mathbb{Z}_8\langle \hat{v}_6 \rangle \\ \downarrow 1 \times \Delta & \curvearrowright & \downarrow \Delta \\ \pi_3(SU_3) \times \underbrace{\pi_5(SU_3)}_{\mathbb{Z}\langle \hat{z}_5 \rangle} & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_8(SU_3) \end{array}$$

但し, Δ は transgression, 例外群のホモトピー-群については [7] 等参照。

$$\Delta \langle \hat{v}_2 z_3, \hat{z}_6 \rangle = \langle \hat{v}_2 z_3, \Delta \hat{z}_6 \rangle = \langle \hat{v}_2 z_3, \hat{z}_5 \rangle \quad \text{これが零でない}$$

ないことは (A) により $H = SU_2, G = SU_3$ とおくとよい)

$$\hat{J}_x \langle \hat{v}_2 z_3, \hat{z}_5 \rangle = \langle \hat{z}_3, \hat{z}_5 \rangle = 2J_c(z_3) \neq 0 \quad ((B), (C) \text{ による})$$

からわかる。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}\{\alpha_2\beta_3\} & & \mathbb{Z}\{\alpha\} & & \\
\parallel & & \parallel & & \\
\pi_3(\text{spin}(9)) \times \pi_8(\mathbb{F}_4/\text{spin}(9)) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{11}(\mathbb{F}_4/\text{spin}(9)) & & \\
\cong \downarrow 1 \times \Delta & & \searrow & & \downarrow \Delta \\
\pi_3(\text{spin}(9)) \times \pi_7(\text{spin}(9)) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{10}(\text{spin}(9)) & & \\
\cong \uparrow & & \searrow & & \cong \uparrow \\
\pi_3(\text{spin}(7)) \times \pi_7(\text{spin}(7)) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{10}(\text{spin}(7)) & &
\end{array}$$

(ii) の議論を用いて、底空間の $\langle, \rangle \neq 0$ が示される，
 従って π 上の $\langle \alpha_2\beta_3, \alpha \rangle \neq 0$ も示された。

□

参考文献

- [1] Y. Furukawa, Whitehead products in the complex Stiefel manifolds, Proc. Edinburgh Math. Soc. 26 (1983), 241-251.
- [2] I. M. James, On the homotopy theory of the classical groups, An. da. Acad. Brasileira de Ciências 39 (1967), 39-48.
- [3] ———, Products between homotopy groups, Compositio Math. 23 (1971), 329-345.
- [4] ———, The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture Note series, 24, Cambridge (1976).
- [5] H. Kachi, On the iterated Samelson product, Math. J. Okayama Univ. 24 (1982), 37-48.
- [6] G. S. McCarty, Jr., Products between homotopy groups and

the J -morphism, *Quart. J. of Math. (Oxford)* 15 (1964),
362 - 370.

[7] M. Mimura, The homotopy groups of Lie groups of low
rank, *J. Math. Kyoto Univ.* 6 (1967), 131 - 176.

[8] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*,
Springer-Verlag (1978).

[9] Y. Furukawa, Homotopy normality of Lie groups,
to appear.