

## 擬球面上の曲線の双対性について

北海道大学・大学院理学院 伊藤 紀章 (Noriaki Ito)  
Department of Mathematics, Hokkaido University

### 1 はじめに

本論文は 3 次元ミンコフスキー空間内にある空間的曲面上の曲線に対して得られる 5 種類の曲線の特異点とその幾何学的性質についての研究結果を紹介する. 曲線の接方向に関しての高さ関数から得られる曲線の特異点の分類については [12] で研究されており, 本論文では空間的曲面上の曲線に対する擬正規直交系である, ローレンツダルブフレーム  $\{t, n_\gamma, b\}$  のうち, 空間的ベクトル  $b$  と時間的ベクトル  $n_\gamma$  に関しての高さ関数から得られる曲線の特異点の分類を行った. 擬球上の曲線の特異点を持つ条件を 1 変数関数の開折理論を応用して分類したのが本論文の主結果である (定理 5.2). また, それら擬球上の曲線の双対性についても紹介する.

### 2 基本概念

$\mathbb{R}^3$  を 3 次元数ベクトル空間とし,  $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$  とする.  $x$  と  $y$  に対して擬内積を  $\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$  と定義する. このとき  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を 3 次元ミンコフスキー空間と呼ぶ.  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を簡単に  $\mathbb{R}_1^3$  と書く. さらにゼロベクトルでない  $x \in \mathbb{R}_1^3$  を  $\langle x, x \rangle > 0$ ,  $\langle x, x \rangle = 0$ ,  $\langle x, x \rangle < 0$  を満たす時それぞれ, 空間的ベクトル, 光的ベクトル, 時間的ベクトルと呼ぶ.  $x \in \mathbb{R}_1^3$  のノルムを  $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$  と定義する.  $\mathbb{R}_1^3$  には時間的向きが定まる. 本論文では  $e_0 = (1, 0, 0)$  を未来方向と定める. 任意のゼロベクトルでない  $v \in \mathbb{R}_1^3$  と実数  $c \in \mathbb{R}$  に対して,  $v \in \mathbb{R}_1^3$  が擬法線ベクトルとなる平面を次のように定義する.

$$P(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, v \rangle = c\}$$

$v$  が空間的, 光的, 時間的ベクトルのときそれぞれ空間的平面, 光的平面, 時間的平面と呼ぶ. 次に 3 種類の擬球について説明する.

双曲平面とは

$$H_+^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

のことであり, ド・ジッター空間とは

$$S_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

のことであり, 光円錐とは

$$LC^* = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\} \mid \langle x, x \rangle = 0\}$$

のことである.

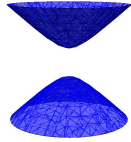


図1 双曲平面

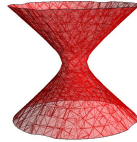


図2 ド・ジッター空間



図3 光円錐

これらの擬球と平面との切り口には曲線が現れる．双曲平面と平面の切り口  $H^2(-1) \cap P(v, c)$  は、平面が空間的なとき等距離曲線，時間的なとき円，光的なときホロ円と呼ばれる．特に，空間的な平面で原点を通る場合の等距離曲線は測地線であり，測地的双曲線と呼ばれる．ド・ジッター空間と平面の切り口  $S_1^2 \cap P(v, c)$  にも特徴的な曲線が現れ，平面が空間的なとき円となる．特に平面が原点を通る場合の円を測地円という．時間的なときには2種類の双曲線が考えられ，ド・ジッター空間の半径1に対して， $|c| > 1$  ならば空間的双曲線， $|c| < 1$  ならば，時間的双曲線と呼ぶ． $c = 0$ ，つまり原点を通るとき測地的双曲線と呼ぶ．光的なときはド・ジッターホロ円と呼ばれる．また， $\mathbb{R}_1^3$  の基底を  $\{e_0, e_1, e_2\}$  としたとき，ベクトル  $a = (a_0, a_1, a_2), b = (b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}_1^3$  に対して擬外積を

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

と定義する．

### 3 ローレンツダルブーフレーム

$U$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合とする．空間的埋め込み  $X: U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  に対して  $M = X(U)$  と書く． $X$  が空間的埋め込みであるとは，点  $p = X(u)$  における接空間  $T_p M$  を構成するベクトルが空間的であるときに言う．平面上の正則曲線  $\bar{\gamma}: I \rightarrow U; t \mapsto (u(t), v(t))$  に対し，空間曲線を

$$\gamma = X \circ \bar{\gamma}: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

と定義する．このとき  $\gamma$  を空間的曲面  $M$  上の曲線と言う． $\gamma$  は空間的曲線なので，パラメータを弧長  $s$  に取り直せる．このとき  $\gamma$  の単位接ベクトルを  $t(s) = \gamma'(s)$  とする． $X$  は空間的埋め込みであったので，曲面  $M = X(U)$  上の点  $p = X(u)$  における時間的単位法ベクトル  $n$  を次のように定義する：

$$n(p) = \frac{X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)}{\|X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)\|}$$

$n$  の方向が未来方向であるとは， $\langle n, e_0 \rangle < 0$  を満たす時に言う．本論文では  $n$  を未来方向となるように曲面の向きを定めて，この時間的単位法ベクトルを  $\gamma$  に制限したものを  $n_\gamma(s) = n(\gamma(s))$  とする．空間的単位ベクトルとして  $b(s) = t(s) \wedge n_\gamma(s) \in T_p M$  を取ると， $\langle n_\gamma(s), n_\gamma(s) \rangle = -1, \langle n_\gamma(s), b(s) \rangle = 0, \langle b(s), b(s) \rangle = 1$  を得る．このとき， $\{t(s), n_\gamma(s), b(s)\}$  は  $\mathbb{R}_1^3$  内の擬正規直交基底をなし，これは  $\gamma$  に沿ったローレンツダルブーフレーム (Lorentzian Darboux frame) と呼ばれる．このフレームに対して以下のフレネ・セレ型の公式

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{n}'_\gamma(s) = \kappa_n(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s). \end{cases}$$

が成り立つ [12]. このとき,  $\kappa_n(s)$  は法曲率,  $\kappa_g(s)$  は測地的曲率,  $\tau_g(s)$  は測地的振率と呼ばれる. それぞれ,  $\kappa_n(s) = -\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle$ ,  $\kappa_g(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ ,  $\tau_g(s) = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle$  によって得られる. このときベクトル  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{b}(s)$  の微分を正規化したものをそれぞれ次のように書く:

$$\mathbf{T}_t(s) = \frac{\kappa_n(s)\mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{b}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}}, \mathbf{T}_b(s) = \frac{-\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}, \mathbf{T}_{n_\gamma}(s) = \frac{\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{b}(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2}}$$

ここで, 次の 5 つのダルブーベクトルを定義する:

$$\begin{aligned} (A) \quad \overline{D_r^T}(s) &= \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} \\ (B) \quad \overline{D_r^S}(s) &= \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}} \\ (C) \quad \overline{D_r^L}(s) &= \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} + \mathbf{b}(s) \\ (D) \quad \overline{D_o^S}(s) &= \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{b}(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} \\ (E) \quad \overline{D_o^L}(s) &= \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{b}(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} + \mathbf{n}_\gamma(s) \end{aligned}$$

さらに,  $(M, \gamma)$  の不変量を以下のように定める:

$$\begin{aligned} (A) \quad \delta_r^T &= \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau_g(s)' - \kappa_g(s)'\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} \\ (B) \quad \delta_r^S &= \kappa_n(s) + \frac{\kappa_g(s)\tau_g(s)' - \kappa_g(s)'\tau_g(s)}{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2} \\ (C) \quad \delta_r^L &= \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau_g(s)' - \kappa_g(s)'\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} + \sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} \\ (D) \quad \delta_o^S &= \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau_g(s)' - \kappa_n(s)'\tau_g(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \\ (E) \quad \delta_o^L &= \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau_g(s)' - \kappa_n(s)'\tau_g(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} + \sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \end{aligned}$$

法曲率  $\kappa_g(s)$ , 測地的曲率  $\kappa_n(s)$ , 測地的振率  $\tau_g(s)$  については, 次の事実が知られている.

**命題 3.1.**

1.  $\kappa_g(s) \equiv 0$  になるための必要十分条件は,  $\gamma$  が  $M$  の測地線になることである.
2.  $\kappa_n(s) \equiv 0$  になるための必要十分条件は,  $\gamma$  が  $M$  の漸近線になることである.
3.  $\tau_g(s) \equiv 0$  になるための必要十分条件は,  $\gamma$  が  $M$  の曲率線になることである.

この命題の意味するところは, 測地的曲率  $\kappa_g(s)$ , 法曲率  $\kappa_n(s)$ , 測地的振率  $\tau_g(s)$  は, 曲面上の曲線  $\gamma$  上のある点において, 曲線  $\gamma$  とそれぞれ測地線, 漸近線, 曲率線との近さをはかる不変量であるということである.

## 4 線織面

空間曲線  $\gamma(u)$  とその変数  $u$  に依存するゼロベクトルでないベクトル  $\xi(u)$  およびパラメータ  $v$  によって,

$$p(u, v) = \gamma(u) + v\xi(u)$$

と表される曲面を線織面 (ruled surface) と言う. このとき,  $\gamma$  を導線 (base curve),  $\xi$  を準曲線 (director curve) と呼び,  $u$  を止めるごとに得られる直線  $\gamma(u) + v\xi(u)$  を母線 (rulings) と呼ぶ. このときベクトル  $\xi(u)$  が空間的, 時間的, 光的の場合にそれぞれ, 空間的線織面, 時間的線織面, 光的線織面とよぶ. また, ベクトル  $\xi(u)$  が定ベクトルに取れるとき, 線織面  $p(u, v)$  を柱面とよぶ. この場合もベクトル  $\xi$  が空間的, 時間的, 光的の場合にそれぞれ, 空間的柱面, 時間的柱面, 光的柱面とよぶ. 次に, 擬法柱面と擬接触柱面について説明する.  $\mathbb{R}_1^3$  上の曲面を  $M$ , 柱面を  $N$  とする.  $M \cap N \neq \emptyset$  かつ,  $M \cap N$  上の点  $p$  における  $M$  の法ベクトル  $n(p)$  が  $T_p N$  に含まれているとき,  $N$  を擬法柱面とよぶ. このとき,  $M$  と  $N$  は横断的で,  $M \cap N$  は正則曲線であり,  $C$  を  $M$  の擬法柱面による切断とよぶ. また準曲線が空間的, 時間的な場合にはそれぞれ, 擬法空間的柱面, 擬法時間的柱面とよぶ. 準曲線が光的な場合は擬法柱面は存在しない. もし  $N$  が局所的に  $F(t, u) = \sigma(t) + uv$  と表せるとき,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \sigma'(t), \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = v$$

となり,  $N$  の法方向は次のようになる,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) \wedge \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = \sigma'(t) \wedge v.$$

もし  $C$  が弧長パラメータ  $s$  を持つ曲線として,  $\gamma(s)$  と書けるとき, 局所的に  $N$  は  $F(s, u) = \sigma(s) + uv$  と書ける.  $N$  が  $F$  によって与えられるとき,  $C$  に沿った  $N$  の法ベクトルは  $b(s)$  となる. 特に  $\langle b(s), v \rangle = 0$  となる.

$M$  の接平面と  $M$  上の曲線  $\gamma$  上での  $N$  の接平面が常に一致するとき,  $N$  を擬接触柱面とよぶ. このとき  $N$  の導線は  $\gamma$  となり,  $\gamma$  を  $M$  の擬接触柱面による切断とよぶ. また準曲線が空間的な場合にのみ擬接触柱面となる. もし  $N$  が局所的に  $F(t, u) = \sigma(t) + uv$  と表せるとき,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \sigma'(t), \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = v$$

となり,  $N$  の法方向は次のようになる,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) \wedge \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = \sigma'(t) \wedge v.$$

もし  $C$  が弧長パラメータ  $s$  を持つ曲線として,  $\gamma(s)$  と書けるとき, 局所的に  $N$  は  $F(s, u) = \sigma(s) + uv$  と書ける. 正則曲線  $C$  に沿った  $M$  の法ベクトルは  $n_\gamma(s)$  と一致し,  $\langle n_\gamma(s), v \rangle = 0$  となる.

最後に双曲光柱面, ド・ジッター光柱面について説明する.  $M \cap N \neq \emptyset$  かつ,  $M \cap N$  上の点  $p$  において  $T_p M$  に含まれている法ベクトル  $n(p)$  が,  $\langle n(p), v \rangle = -1$  を満たすとき,  $N$  を双曲光柱面とよぶ. このとき,  $M$  と  $N$  は横断的で,  $M \cap N$  は正則曲線であり,  $C$  を  $M$  の双曲光柱面による切断とよぶ. また,  $M \cap N \neq \emptyset$  かつ,  $M$  上の曲線  $\gamma$  上の点  $p$  における接平面  $T_p M$  に含まれているベクトル  $b(s)$  が,  $\langle b(s), v \rangle = 1$  を満たす

とき,  $N$  をド・ジッター光柱面とよぶ. このとき,  $M$  と  $N$  は横断的で,  $M \cap N$  は正則曲線であり,  $C$  を  $M$  のド・ジッター光柱面による切断とよぶ.

## 5 高さ関数

空間的曲面上の曲線  $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$  に対して5つの高さ関数を導入する.  $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0, \|\mathbf{b}'(s)\| \neq 0$  と仮定する. 5つの高さ関数をそれぞれ,

$$\begin{aligned} H_r^T &: I \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}; (s, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v} \rangle, \\ H_r^S &: I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; (s, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v} \rangle, \\ H_r^L &: I \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}; (s, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v} \rangle - 1, \\ H_o^T &: I \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}; (s, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{v} \rangle, \\ H_o^L &: I \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}; (s, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{v} \rangle + 1. \end{aligned}$$

と定義する.

ここで高さ関数を任意の  $\mathbf{v}$  で固定したときそれぞれ,  $h_{r,v}^T(s) := H_r^T(s, \mathbf{v}), h_{r,v}^S(s) := H_r^S(s, \mathbf{v}), h_{r,v}^L(s) := H_r^L(s, \mathbf{v}), h_{o,v}^T(s) := H_o^T(s, \mathbf{v}), h_{o,v}^L(s) := H_o^L(s, \mathbf{v})$  と定めると, これらの関数族は対応する芽の3次元開折になっている. そして, これらの高さ関数族に関して以下の命題を得る.

**命題 5.1.**  $\|\mathbf{t}'(s)\| \neq 0, \|\mathbf{b}'(s)\| \neq 0$  と仮定したとき以下が成り立つ.

(A) 任意の  $(s, \mathbf{v}) \in I \times H^2(-1)$  について以下が成り立つ.

(1)  $h_{r,v}^T(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,  $-\lambda^2 + \mu^2 = 1$  をみたす  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  に対して  $\mathbf{v}$  が,

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}_\gamma(s)$$

にただ1つ定まることである.

(2)  $h_{r,v}^T(s) = (h_{r,v}^T)'(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$  が成り立つことである.

(3)  $h_{r,v}^T(s) = (h_{r,v}^T)'(s) = (h_{r,v}^T)''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2, \delta_r^T = 0$  が成り立つことである.

(4)  $h_{r,v}^T(s) = (h_{r,v}^T)'(s) = (h_{r,v}^T)''(s) = (h_{r,v}^T)'''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\tau_g(s)\mathbf{t}(s) - \kappa_g(s)\mathbf{n}_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2, \delta_r^T = 0, (\delta_r^T)' = 0$  が成り立つことである.

(B) 任意の  $(s, \mathbf{v}) \in I \times S_1^2$  について以下が成り立つ.

- (1)  $h_{r,v}^S(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,  $-\lambda^2 + \mu^2 = -1$  をみたす  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  に対して  $v$  が,

$$v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s)$$

にただ1つ定まることである.

- (2)  $h_{r,v}^S(s) = (h_{r,v}^S)'(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}}$$

かつ,  $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$  が成り立つことである.

- (3)  $h_{r,v}^S(s) = (h_{r,v}^S)'(s) = (h_{r,v}^S)''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}}$$

かつ,  $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2, \delta_r^S = 0$  が成り立つことである.

- (4)  $h_{r,v}^S(s) = (h_{r,v}^S)'(s) = (h_{r,v}^S)''(s) = (h_{r,v}^S)'''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}}$$

かつ,  $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2, \delta_r^S = 0, (\delta_r^S)' = 0$  が成り立つことである.

(C) 任意の  $(s, v) \in I \times LC^*$  について以下が成り立つ.

- (1)  $h_{r,v}^L(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,  $\lambda^2 - \mu^2 = -1$  をみたす  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  に対して  $v$  が,

$$v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s) + b(s)$$

にただ1つ定まることである.

- (2)  $h_{r,v}^L(s) = (h_{r,v}^L)'(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} + b(s)$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$  が成り立つことである.

- (3)  $h_{r,v}^L(s) = (h_{r,v}^L)'(s) = (h_{r,v}^L)''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} + b(s)$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2, \delta_r^L = 0$  が成り立つことである.

- (4)  $h_{r,v}^L(s) = (h_{r,v}^L)'(s) = (h_{r,v}^L)''(s) = (h_{r,v}^L)'''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} + b(s)$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2, \delta_r^L = 0, (\delta_r^L)' = 0$  が成り立つことである.

(D) 任意の  $(s, v) \in I \times S_1^2$  について以下が成り立つ.

- (1)  $h_{o,v}^S(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  をみたす  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  に対して  $v$  が,

$$v = \lambda t(s) + \mu b(s)$$

にただ1つ定まることである.

(2)  $h_{o,v}^S(s) = (h_{o,v}^S)'(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2}}$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$  が成り立つことである.

(3)  $h_{o,v}^S(s) = (h_{o,v}^S)'(s) = (h_{o,v}^S)''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2}}$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0, \delta_o^S = 0$  が成り立つことである.

(4)  $h_{o,v}^S(s) = (h_{o,v}^S)'(s) = (h_{o,v}^S)''(s) = (h_{o,v}^S)'''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2}}$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0, \delta_o^S = 0, (\delta_o^S)' = 0$  が成り立つことである.

(E) 任意の  $(s, v) \in I \times LC^*$  について以下が成り立つ.

(1)  $h_{o,v}^L(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  をみたす  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  に対して  $v$  が,

$$v = \lambda t(s) + \mu b(s) + n_\gamma(s)$$

にただ 1 つ定まることである.

(2)  $h_{o,v}^L(s) = (h_{o,v}^L)'(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} + n_\gamma(s)$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$  が成り立つことである.

(3)  $h_{o,v}^L(s) = (h_{o,v}^L)'(s) = (h_{o,v}^L)''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} + n_\gamma(s)$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0, \delta_o^L = 0$  が成り立つことである.

(4)  $h_{o,v}^L(s) = (h_{o,v}^L)'(s) = (h_{o,v}^L)''(s) = (h_{o,v}^L)'''(s) = 0$  が成り立つための必要十分条件は,

$$v = \pm \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} + n_\gamma(s)$$

かつ,  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0, \delta_o^L = 0, (\delta_o^L)' = 0$  が成り立つことである.

これらのベクトルは高さ関数の判別集合の像に対応しており, これらのベクトルの特異点を分類したのが本論文の主結果であり,

ダルブーベクトルの特異点を以下のように分類できた.

**定理 5.2.**  $\gamma: I \rightarrow M$  の単位速度曲線とし,  $\|t'(s)\| \neq 0, \|b'(s)\| \neq 0$  とする.

(A)  $\kappa_g^2(s_0) > \tau_g^2(s_0)$  のとき以下が成り立つ.

1.  $\overline{D_r^T}(s_0)$  が正則であるための必要十分条件は,  $\delta_r^T(s_0) \neq 0$  である.

2.  $\overline{D}_r^T(s_0)$  が通常カuspと局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\delta_r^T(s_0) = 0, (\delta_r^T)'(s_0) \neq 0$  である.
- (B)  $\tau_g^2(s_0) > \kappa_g^2(s_0)$  のとき以下が成り立つ.
1.  $\overline{D}_r^S(s_0)$  が正則であるための必要十分条件は,  $\delta_r^S(s_0) \neq 0$  である.
  2.  $\overline{D}_r^S(s_0)$  が通常カuspと局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\delta_r^S(s_0) = 0, (\delta_r^S)'(s_0) \neq 0$  である.
- (C)  $\kappa_g^2(s_0) > \tau_g^2(s_0)$  のとき以下が成り立つ.
1.  $\overline{D}_r^L(s_0)$  が正則であるための必要十分条件は,  $\delta_r^L(s_0) \neq 0$  である.
  2.  $\overline{D}_r^L(s_0)$  が通常カuspと局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\delta_r^L(s_0) = 0, (\delta_r^L)'(s_0) \neq 0$  である.
- (D)  $\kappa_g^2(s_0) + \tau_g^2(s_0) \neq 0$  のとき以下が成り立つ.
1.  $\overline{D}_o^S(s_0)$  が正則であるための必要十分条件は,  $\delta_o^S(s_0) \neq 0$  である.
  2.  $\overline{D}_o^S(s_0)$  が通常カuspと局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\delta_o^S(s_0) = 0, (\delta_o^S)'(s_0) \neq 0$  である.
- (E)  $\kappa_g^2(s_0) + \tau_g^2(s_0) \neq 0$  のとき以下が成り立つ.
1.  $\overline{D}_o^L(s_0)$  が正則であるための必要十分条件は,  $\delta_o^L(s_0) \neq 0$  である.
  2.  $\overline{D}_o^L(s_0)$  が通常カuspと局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\delta_o^L(s_0) = 0, (\delta_o^L)'(s_0) \neq 0$  である.

## 6 ルジャンドル双対

本節では泉屋周一氏と L.Chen 氏が [[5],[9]] で示した, 擬球面に対するルジャンドル双対性について説明する. そのためにまず接触多様体とそのルジャンドル部分多様体について説明する.

$N$  を多様体,  $K$  を接ベクトルバンドル  $TN$  の余次元 1 の部分ベクトルバンドルとする. 局所的に 1 形式  $\alpha$  を使って,  $K = \{\alpha = 0\}$  つまり,  $K = \alpha^{-1}(0)$  と表わしたとき,  $\alpha$  の外微分  $d\alpha$  が  $K$  上で非退化のとき,  $K$  を  $N$  の 接触構造 とよぶ. また,  $\alpha$  を 接触形式 とよび,  $(N, K)$  を 接触多様体 という.

ここで,  $d\alpha$  が  $K$  上で非退化であるとは,  $N$  の各点  $c$  について, 交代双線形形式  $d\alpha(c) : K_c \times K_c \rightarrow \mathbb{R}$  が正則であることである. つまり  $N$  の各点  $c$  について,  $(K_c, \alpha(c))$  は シンプレクティックベクトル空間 である. シンプレクティックベクトル空間とは, 有限次元ベクトル空間  $V$  に正則な交代双線形形式  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられているとき,  $(K_c, \alpha(c))$  をシンプレクティックベクトル空間とよぶ. また,  $\Omega$  を シンプレクティック形式 とよぶ. シンプレクティックベクトル空間の次元は偶数であることが知られていて, したがって各  $K_c \subset T_c N$  の次元は偶数である. また, 余次元は 1 であるから,  $N$  の次元は奇数である.  $N$  の次元を  $2n+1$  とするとき,  $\alpha$  が接触形式であるという条件は, 言い換えると,

$$\alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha}_{n \text{ 個}}$$

が各点で 0 でないということである.

$\phi : N \rightarrow N'$  を接触多様体  $(N, K)$  と  $(N', K')$  の間の可微分写像とする. このとき,  $d\phi(K) = K'$  を満たすとき,  $\phi$  を 接触微分同相写像 といい, それが存在するとき  $(N, K)$  と  $(N', K')$  は 接触微分同相 であるという.  $(N, K)$  を  $2n+1$  次元接触多様体,  $\Lambda$  を  $N$  の部分多様体とする.  $\Lambda$  が  $(N, K)$  の 積分多様体 であるとは, 各点  $c \in \Lambda$  に対して,  $T_c K \subset K_c$  となる時にいう.  $2n+1$  次元接触多様体の  $n$  次元積分多様体を ルジャンド

ル部分多様体とよぶ. また, 滑らかなファイバー束  $\pi: E \rightarrow M$  がルジャンドルファイバー束であるとは, その全空間  $E$  接触多様体でファイバーがすべてルジャンドル部分多様体であることである. さらに  $i: L \subset E$  がルジャンドル多様体のとき, 射影  $\pi \cdot i: L \rightarrow M$  をルジャンドル写像といい, その像を  $L$  の波面集合とよび,  $W(L)$  と表わす.

3次元ミンコフスキー空間内の3種類の擬球面内の間の双対定理は以下の4つの2重ファイバー束からなる:

- (1) (a)  $H^2(-1) \times S_1^2 \supset \Delta_1 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ ,  
 (b)  $\pi_{11}: \Delta_1 \rightarrow H^2(-1), \pi_{12}: \Delta_1 \rightarrow S_1^2$ ,  
 (c)  $\theta_{11} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_1}, \theta_{12} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_1}$ .
- (2) (a)  $H^2(-1) \times LC^* \supset \Delta_2 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = -1\}$ ,  
 (b)  $\pi_{21}: \Delta_2 \rightarrow H^2(-1), \pi_{22}: \Delta_2 \rightarrow LC^*$ ,  
 (c)  $\theta_{21} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_2}, \theta_{22} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_2}$ .
- (3) (a)  $LC^* \times S_1^2 \supset \Delta_3 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = 1\}$ ,  
 (b)  $\pi_{31}: \Delta_3 \rightarrow LC^*, \pi_{32}: \Delta_3 \rightarrow S_1^2$ ,  
 (c)  $\theta_{31} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_3}, \theta_{32} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_3}$ .
- (4) (a)  $LC^* \times LC^* \supset \Delta_4 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = -2\}$ ,  
 (b)  $\pi_{41}: \Delta_4 \rightarrow LC^*, \pi_{42}: \Delta_4 \rightarrow LC^*$ ,  
 (c)  $\theta_{41} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_4}, \theta_{42} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_4}$ .

ただし,  $\pi_{i1}(v, w) = v, \pi_{i2}(v, w) = w, \langle dv, w \rangle = -w_0 dv_0 + \sum_{i=1}^2 w_i dv_i, \langle v, dw \rangle = -v_0 dw_0 + \sum_{i=1}^2 v_i dw_i$  とする. 定義から  $\theta_{i1}^{-1}(0)$  と  $\theta_{i2}^{-1}(0)$  は  $\Delta_i$  上で同じ接ベクトルバンドルを定めそれを  $K_i$  と表す.

**定理 6.1.** [5, 9]  $(\Delta_i, K_i) (i = 1, 2, 3, 4)$  は接触多様体であり, 射影  $\pi_{ij} (j = 1, 2)$  はルジャンドルファイバー束となる. さらに, それぞれの接触多様体はお互いに接触微分同相である.

このとき具体的に接触微分同相写像は,

$$\begin{aligned}
 \Psi_{12}(v, w) &= (v, v + w), \Psi_{21}(v, w) = (v, w - v), \\
 \Psi_{13}(v, w) &= (v - w, -w), \Psi_{31}(v, w) = (v - w, -v), \\
 \Psi_{14}(v, w) &= (v - w, v + w), \Psi_{41}(v, w) = \left(\frac{v + w}{2}, \frac{w - v}{2}\right), \\
 \Psi_{23}(v, w) &= (2v - w, v - w), \Psi_{32}(v, w) = (v - w, v - 2w), \\
 \Psi_{24}(v, w) &= (2v - w, w), \Psi_{42}(v, w) = \left(\frac{v + w}{2}, w\right), \\
 \Psi_{34}(v, w) &= (v, v - 2w), \Psi_{43}(v, w) = \left(v, \frac{w - v}{2}\right).
 \end{aligned}$$

で与えられる. これらのルジャンドル双対性をまとめてルジャンドル双対性の曼荼羅とよぶ. それは以下のような曼荼羅図を描くことができるからである.

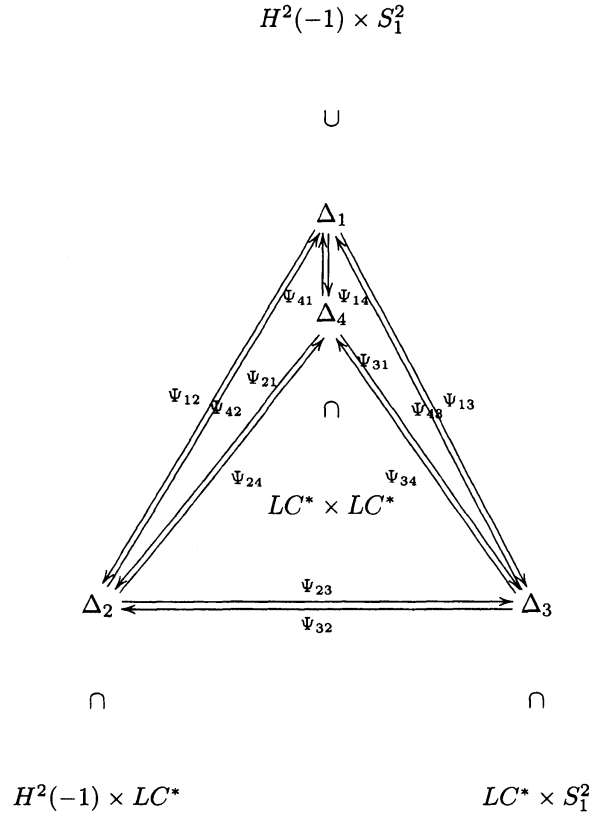


図 4. ルジャンドル双対性の曼荼羅

この他にも 2 つの 2 重ファイバー束を考えることができる：

- (5) (a)  $S_1^2 \times S_1^2 \supset \Delta_5 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ ,  
 (b)  $\pi_{51} : \Delta_5 \rightarrow S_1^2, \pi_{52} : \Delta_5 \rightarrow S_1^2$ ,  
 (c)  $\theta_{51} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_5}, \theta_{52} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_5}$ .
- (6) (a)  $H^2(-1) \times H^2(-1) \supset \Delta_6 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ ,  
 (b)  $\pi_{61} : \Delta_6 \rightarrow H^2(-1), \pi_{62} : \Delta_6 \rightarrow H^2(-1)$ ,  
 (c)  $\theta_{61} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_6}, \theta_{62} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_6}$ .

これらの間にも以下の定理が成り立つ。

**定理 6.2.** [5, 9]  $(\Delta_i, K_i) (i = 5, 6)$  は接触多様体であり，射影  $\pi_{ij} (j = 1, 2)$  はルジャンドルファイバー束となる。

ルジャンドル部分多様体  $i : L \rightarrow \Delta_i, i = 1, 2, 3$  を与えたとき，射影  $\pi_{i1}(i(L))$  と  $\pi_{i2}(i(L))$  は互いに  $\Delta_i$  双対であると言う。このことから，これまで考えてきた空間的曲面上の曲線に付随するローレンツダルブーフレームに対して，ダルブーベクトルが互いにルジャンドル双対の関係を持つことがわかる。

**命題 6.3.**  $t'(s) \neq 0, b'(s) \neq 0$  を仮定したとき，以下が成り立つ：

- (1)  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$  のとき， $b(s)$  と  $\overline{D_r^T}(s)$  は  $\Delta_1$  双対である。

- (2)  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$  のとき,  $\mathbf{n}_\gamma(s)$  と  $\overline{D}_o^S(s)$  は  $\Delta_1$  双対である.  
 (3)  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$  のとき,  $\mathbf{n}_\gamma(s)$  と  $\overline{D}_o^L(s)$  は  $\Delta_2$  双対である.  
 (4)  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$  のとき,  $\mathbf{b}(s)$  と  $\overline{D}_r^L(s)$  は  $\Delta_3$  双対である.  
 (5)  $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$  のとき,  $\mathbf{b}(s)$  と  $\overline{D}_r^S(s)$  は  $\Delta_5$  双対である.

## 7 例

### 7.1 空間的平面上の曲線

$M = \mathbb{R}_0^2 = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_0 = 0\}$  とする. 平面曲線  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_0^2$  を考える. このとき,  $\mathbf{n}_\gamma = \mathbf{e}_0, \mathbf{t}(s) = \gamma'(s), \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{e}_0$ .  $\kappa_n(s) \equiv \tau_g(s) \equiv 0$  より,  $\kappa = \kappa_g(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$  となる. ユークリッド平面上でのフレネ・セレ型の公式は以下ようになる.

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = -\kappa \mathbf{t}(s). \end{cases}$$

このとき,  $\mathbf{b}(s)$  は  $\mathbb{R}_0^2$  内の平面曲線としての  $\gamma$  の単位法線ベクトルとなっている.  $\delta_r^T, \delta_r^L$  であり, それぞれ  $\delta_r^T \equiv 0, \delta_r^L \equiv 0$  となり, それらに対応するダルブーベクトルは,  $\overline{D}_r^T = -\mathbf{n}_\gamma = -\mathbf{e}_0, \overline{D}_r^L = -\mathbf{n}_\gamma + \mathbf{b}(s) = -\mathbf{e}_0 + \mathbf{b}(s)$  となる. これはそれぞれ何を意味しているのかというと,  $\overline{D}_r^T = -\mathbf{e}_0$  は  $M = P(v, c) \cap M$  であることを示している. また,  $\overline{D}_r^L = -\mathbf{e}_0 + \mathbf{b}(s)$  から, 切り口は実数  $\lambda \in \mathbb{R}$  を用いて  $\gamma = \lambda \mathbf{t}(s)$  となる.

### 7.2 双曲平面上の曲線

本節では  $M = H_+^2(-1)$  の場合のダルブーベクトルの特異点やその双対性について考察する.  $M = H^2(-1)$  のとき,  $\mathbf{n}_\gamma(s) = \gamma(s), \mathbf{t}(s) = \gamma'(s), \kappa_n(s) \equiv 1, \tau_g(s) \equiv 0$  このときのダルブーフレーム  $\{\mathbf{t}, \gamma, \mathbf{b}\}$  はローレンツサバンフレームとよばれ, 次のようなフレネ・セレ型の公式を得る.

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \gamma + \kappa_g(s) \mathbf{b}(s), \\ \gamma'(s) = \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = -\kappa_g(s) \mathbf{t}(s). \end{cases}$$

このとき,  $\delta_o^S = \kappa_g, \delta_o^L = \kappa_g + 1$  となり, ダルブーベクトルはそれぞれ,  $\overline{D}_o^S(s) = -\mathbf{b}(s), \overline{D}_o^L(s) = \mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{b}(s)$  となる. 定理 5.2 より,  $\overline{D}_o^S(s)$  が正則になるのは,  $\delta_o^S = \kappa_g \neq 0$  のとき, また, 局所的に通常カスプになるのは  $\delta_o^S = \kappa_g = 0$  かつ  $(\delta_o^S)' = \kappa_g' \neq 0$  のときである. さらに,  $\overline{D}_o^L(s)$  が正則になるのは,  $\delta_o^L = \kappa_g + 1 \neq 0$  のとき, また, 局所的に通常カスプになるのは  $\delta_o^L = \kappa_g + 1 = 0$  かつ  $(\delta_o^S)' = (\kappa_g + 1)' \neq 0$  のときである. このとき  $-\mathbf{b}(s)$  と  $\mathbf{n}_\gamma(s)$  は  $\Delta_1$  双対になっており, また,  $\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{b}(s)$  と  $\mathbf{n}_\gamma(s)$  は  $\Delta_2$  双対になっている.

## 8 曲線の不変量

各不変量,  $\delta_r^T, \delta_r^S, \delta_r^L, \delta_o^S, \delta_o^L$  がつねに 0 であるような条件と各ダルブーベクトルの双対性から空間的曲面  $M$  上の曲線  $\gamma$  やそのローレンツダルブーフレームの各ベクトルに対して以下のことがわかった.

**定理 8.1.**  $M$  上の曲線  $\gamma : I \rightarrow M \in \mathbb{R}_1^3$  を単位速度曲線とする.

- (A)  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$  のとき以下は同値である.

1.  $\overline{D_r^T}(s)$  は定ベクトルである,
  2.  $\delta_r^T(s) \equiv 0$ ,
  3.  $\gamma$  は曲面  $M$  の擬法時間的柱面の切り口である,
  4.  $b(s)$  は測地的双曲線である.
- (B)  $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$  のとき以下は同値である.
1.  $\overline{D_r^S}(s)$  は定ベクトルである,
  2.  $\delta_r^S(s) \equiv 0$ ,
  3.  $\gamma$  は曲面  $M$  の擬法空間的柱面の切り口である,
  4.  $b(s)$  は測地円である.
- (C)  $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$  のとき以下は同値である.
1.  $\overline{D_r^L}(s)$  は定ベクトルである,
  2.  $\delta_r^L(s) \equiv 0$ ,
  3.  $\gamma$  は曲面  $M$  のド・ジッター光的柱面の切り口である,
  4.  $b(s)$  はド・ジッターホロ円である.
- (D)  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$  のとき以下は同値である.
1.  $\overline{D_o^S}(s)$  は定ベクトルである,
  2.  $\delta_o^S(s) \equiv 0$ ,
  3.  $\gamma$  は曲面  $M$  の擬接触柱面の切り口である,
  4.  $n_\gamma(s)$  は測地的双曲線である.
- (E)  $\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2 \neq 0$  のとき以下は同値である.
1.  $\overline{D_o^L}(s)$  は定ベクトルである,
  2.  $\delta_o^L(s) \equiv 0$ ,
  3.  $\gamma$  は曲面  $M$  の双曲光柱面の切り口である,
  4.  $n_\gamma(s)$  はホロ円である.

## 参考文献

- [1] 泉屋周一, 石川剛郎: 応用特異点論, 共立出版 (1998)
- [2] 泉屋周一, 佐野貴志, 佐伯修, 佐久間一浩: 幾何学と特異点 (特異点の数理 1), 共立出版 (2001)
- [3] 中岡稔: 双曲幾何学入門, サイエンス社 (1993)
- [4] J.W. Bruce and P.J. Giblin: *Curves and Singularities (second edition)*, Cambridge Univ. Press (1992)
- [5] L. Chen and S. Izumiya, A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in semi-Euclidean space, "Proc. Japan. Acad., Ser. A, **85**, 4954 (2009).
- [6] R. Hayashi, S. Izumiya and T. Sato, Duals of curves in Hyperbolic space, *Note di Matematica* **33**(2)97-106(2013)
- [7] S. Izumiya and S. Otani, Flat approximations of surfaces on curves, to appear in *Demonstratio Mathematica*
- [8] S. Izumiya, D. Pei, T. Sano and E. Torii, Evolutes of hyperbolic plane curves. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser)* **20**, 543-550(2004)
- [9] S. Izumiya, Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, *Moscow Mathematical*

Journal, **9**, (2009), 325-357.

- [10] S. Izumiya, A.C. Nabarro and A.J. Sacramento, Pseudo-spherical evolutes of curves on a timelike surface in  $\mathbb{R}_1^3$ , preprint (2014)
- [11] M. Kasedou, Spacelike submanifolds in de Sitter space, *Demonstratio Mathematica* **43**(2)401-418(2010)
- [12] T. Sato, Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space, *Journal of geometry* **103**(2) 319-331(2012)