

自由境界層流における高波数乱れ

京大 理 物理 後 藤 金 英

1. はしがき

異なる二つの平行流の境界に出来る流れを自由境界層流という(図1.)。この論文の目的は, 自由境界層流における微小乱れの, 安定特性を求める事である。微小な乱れは, normal mode に分解して, 取扱うことが出来る。各々の mode は対応する波数をもつ。この波数の大小によつて, 高波数乱れ, 低波数乱れと大雑把に分けて考える。

こゝでは, 話を簡単にするために, 粘性ゼロの極限に議論を限る。低波数の乱れは, 波数あるいは増幅因子が小さい事を利用すれば, 困難ではあるが, 解析的にこれを解くことが出来る。¹⁾ 一方, 高波数乱れの増幅因子は, 波数と共に限りなく大きくなる。そのため此の場合には, 一直した解析的な取扱いの試みは, 殆んど絶望的になる。本論文では, 電子計算機による数値解で, この難点を克服することを試みた。

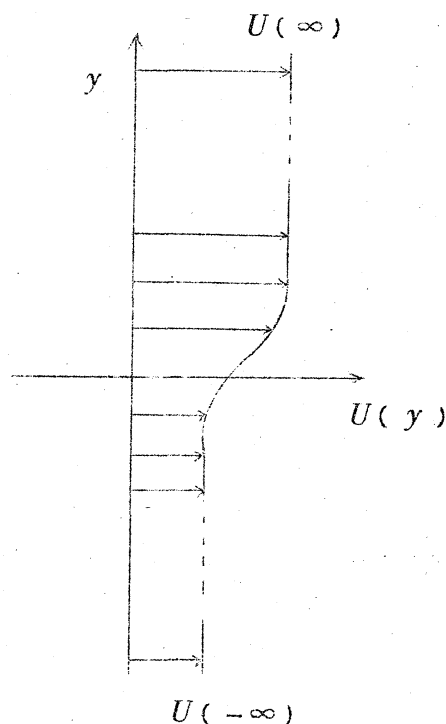


図1. 自由境界層流
の速度分布

計算の結果, 高波数の乱れは, すべて減衰する。

粘性ゼロの極限に於ても, 尚減衰する乱れが存在するということは, 物理的にみて, 極めて興味ある結果である。

2. 問題の定式化

流れの方向に x 軸, 直角に y 軸をとる。定常速度分布を $U(y)$ で表わす。二次元乱れを (u, v) とする。 (u, v) は, 乱れの流れ関数 ψ を用いると, $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$ と表わされる。Navier-Stokes 方程式から圧力を消去し, 速度成分 $(U + \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x})$

を代入， ψ に関する二次の項を，一次の項に比して省略する。得られた線型方程式に含まれる係数関数は， $U(y)$ から導かれる関数だけである。従つて， ψ を **normal mode** に分解し，一つ一つのmode を別個に考える事が出来る。波数 $\alpha (>0)$ ，複素位相速度 $c (=c_r + i c_i)$ をもつたmode は

$$\psi = \phi(y) \exp [i \alpha (x - ct)]$$

と表わされる。 t は時間。 c_i は増幅因子と呼ばれ， $c_i > 0$ 或は < 0 に従い，乱れは時間的に増大，或は減衰する。 $c_i = 0$ の場合は，乱れは伝播するのみで，増大も減衰もしない。 c_r は位相速度である。 ψ を支配する方程式に，この形を代入すると， ϕ を支配する方程式 (Orr-Sommerfeld 方程式)

$$(U - c)(D^2 - \alpha^2) \phi - (D^2 U) \phi = \frac{1}{i \alpha R} (D^2 - \alpha^2)^2 \phi \quad (1)$$

が得られる。 $D = d/dy$ 。 R はレイノルズ数。一方，境界条件は，流れが $y = \pm \infty$ まで広がっているので，

$$y = \pm \infty \text{ で } u = v = 0,$$

$$\text{即ち， } D\phi = \alpha \phi = 0 \quad (2)$$

となる。

さて，こゝでは $\alpha R = \infty$ の場合のみに議論を限ることにする。この場合，方程式 (1)，境界条件 (2)はそれぞれ

$$(U - c)(D^2 - \alpha^2) \phi - (D^2 U) \phi = 0, \quad (3)$$

$$\alpha \phi = 0 \quad (y = \pm \infty) \quad (4)$$

となる。 $U(y_s) = c$ ， $D^2 U(y_s) \neq 0$ なる点 $y = y_s$ は，方程式 (3)の特異点である。 $Re[DU(y_s)] > 0$ の場合，

この特異点の下側を迂回する

領域 (図2)で，方程式 (3)

の解が，(1) の解の漸近解 ($\alpha R \rightarrow \infty$ の意味で) となる。

(例えば文献2参照)。従つ

て，この領域で (3)式を解き，

境界条件 (4)をみたす解を求

めればよい。その際，(4)が

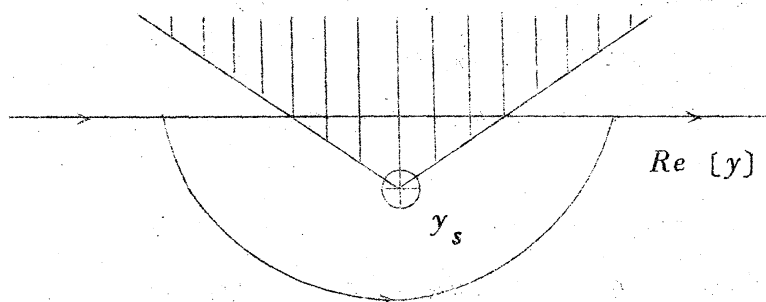


図2. 影をつけない領域で (3) 式の解は有効。

齊次条件なので，(3)に含まれるパラメーター c と α のうち一つを決めると，他は対応する固有値として確定する。安定特性は， c_i によつて決まるから， c と α の関係を求める事が主目的であり，固有函数 ϕ を実軸上の全ての点で決定する必要はない。結局問題は『(3)式の解が条件(4)をみたすべく， $c=c(\alpha)$ なる固有値を求めること』となる。

3. $\alpha R = \infty$, $U = \tanh y$ に対する $c(\alpha)$

自由境界層の速度分布として $U = \tanh y$ をとる。比較的小さな波数 α については，固有値問題を解析的に取扱うことが出来る。ここでは，それらの結果だけを引用する。(文献1参照)。

3.1.a $\alpha \ll 1$ (α -展開による解析)。

$$c_r = 0,$$

$$c_i \begin{cases} = 1 - (1 + \frac{\pi}{4})\alpha - \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} - I_1)\alpha^2 + O(\alpha^3), \\ = -1 + (1 - \frac{3}{4}\pi)\alpha + \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}\pi + 2\pi \log 2 - \frac{9}{16}\pi^2 - I_1)\alpha^2 + O(\alpha^3), \end{cases} \quad (5.a)$$

$$I_1 = 2.921. \quad (5.6)$$

3.1.b $\alpha \approx 1$ (c -展開による解析)。

$$c_r = 0,$$

$$\alpha = 1 - \frac{\pi}{2}c_i + (2 - \frac{3}{8}\pi^2 - I_2)c_i^2 + O(c_i^3), \quad (6)$$

$$I_2 = -2.331$$

3.2 $\alpha \gg 1$ に対する $c(\alpha)$ 。

$\alpha \gg 1$ に対しては，以下に定義される変数変換を行うと，都合がよい。

変換 1

$$Z = \tanh y, \quad f = D\phi/\phi. \quad (7)$$

この変換により，(3)式および境界条件(4)は，

$$\frac{df}{dZ} + \frac{f^2 - \alpha^2}{1 - Z^2} + \frac{2Z}{Z - c} = 0, \quad (8)$$

$$f(\pm 1) = \mp \alpha, \quad (9)$$

となる。条件 (9) は, $y = \pm \infty$ で $D^2 U = 0$ となる事を用いて, (3) (4) から得られる。(9) 式は更に簡単になる。先ず, $\alpha \leq 1$ の結果を考慮して, 以下の解析でも $c \equiv i c_i$ ($c_i < 0$) を仮定する。その結果, (8) の解 f はエルミット共役性をもつ, 即ち

$$f(Z_0, c) + f^*(Z_0^*, c^*) = 0$$

ただし, Z_0 は c より更に下方の, 虚軸上の点とする。この性質を用いると, 条件 (9) は

$$f(1) = -\alpha, \quad \operatorname{Re} [f(Z_0)] = 0 \quad (10)$$

となる。

変換 2

$$\zeta = \frac{2r}{Z} \quad (\text{但し } r = |c_i|), \quad g = \frac{f}{\alpha} + 1. \quad (11)$$

この変換により (8), (10) は

$$\frac{dg}{d\zeta} + \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{\zeta^2}{4r^2}} (g^2 - 2g) + \frac{4ik}{\zeta^2 (\zeta - 2i)} = 0, \quad (12)$$

$$g(2r) = 0 \quad \operatorname{Re} [g(\zeta_0)] = 0 \quad (13)$$

となる。但し, $k = 2r/\alpha$, $\zeta_0 = 2r/Z_0$

ζ_0 の値は 0 と 2 の間で任意である。以下簡単に 1 ととる。図 2 に示した, 解の有効領域は, 図 3 のようになる。

方程式 (12) を解くには, 独立変数 ζ の領域を, $\zeta = 2r$ 近傍 (I) と, その他 (II) とに分けて取扱うとうまくゆく。

$g(2r) = 0$ からわかるように, $\zeta = 2r$ の近傍では, g の値は十分小さい。従つて, 領域 (I) では, (12) 式を線型化して, 解くことが出来る。その結果, 境界条件 $g(2r) = 0$ をみたとす解:

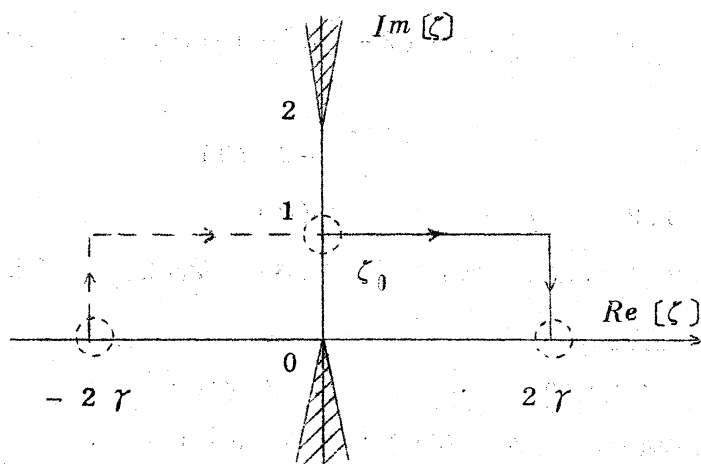


図 3. 影をつけない領域で (12) 式の解は有効。

$$g_I = \frac{2ik^2}{\zeta^2(\zeta - 2i)} \left(1 - \frac{\zeta^2}{4r^2}\right) \quad (14)$$

が得られる。

一方、領域 (II) では、 g と k とが共に、 r のべき級数に展開出来ると仮定する。即ち、

$$\begin{aligned} g_{II} &= g_0 + r^{-\lambda_1} g_1 + r^{-\lambda_2} g_2 + \dots, \\ k &= k_0 + r^{-\lambda_1} k_1 + r^{-\lambda_2} k_2 + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

但し、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ は正の定数で、 $k_1, k_2, \dots$ が $O(1)$ になるように、あとで決める。

表式 (15) を (12), (13) 式に代入し、最低次の項のみを残すと、次の方程式と境界条件が得られる。

$$\frac{dg_0}{d\zeta} + \frac{1}{k_0} (g_0^2 - 2g_0) + \frac{4ik_0}{\zeta^2(\zeta - 2i)} = 0, \quad (16)$$

$$Re[g_0(i)] = 1. \quad (17)$$

g_0 を具体的に求めるのは後にする。

さて、領域 (I), (II) の全体を通して、完全な解を得るには、領域 (I), (II) の間の適当な点 $\zeta = \zeta_1$ に於て、 g_I, g_{II} を解析的に接続しなければならない。(12) 式は一階方程式であるから、 $\zeta = \zeta_1$ に於ける g の解析性は、

$$g_I(\zeta_1) = g_{II}(\zeta_1) \quad (18)$$

であれば、保証される。今 $\zeta_1 = r^{2/5}$ ととれば、 g_I ならびに (16), (17) の導出の際省略した項が、共に $O(r^{-6/5})$ となる。従つて、 $r = \infty$ とおけば、 g_{II} は g_0 で表わされ、接続条件 (18) は、

$$g_0(\infty) = 0 \quad (19)$$

となる。結局、方程式 (16) と境界条件 (17), (19) が、 k_0 の固有値を決める。たゞし、方程式 (16) は、非線型方程式であり、 g_0 を解析的な形で求める事は出来ない。数値解をあとで示す。

次に、 g_1 を同様の論法で求めると、固有値 k_1, λ_1 が、同時に決る。こゝでは、 $\lambda_1 = 2$ となる結果以外の詳細は、割愛する。(文献 3 参照)。 $\lambda_1 = 2$ を用いると、 c_i の漸近形 ($\alpha \gg 1$ に対する) は、

$$c_i = -\frac{k_0}{2} \alpha - \frac{k_1}{2} \frac{1}{\alpha} + \dots \quad (20)$$

て与えられる。

4. 数値解

境界条件 (17), (19) に従う, 方程式 (16) の数値解を求め, k_0 の固有値を決める。数値計算の便宜上, 変数変換: $\xi = -i$ により, 積分路を実軸に移す。この変換により, $G(\xi) = g_0(\cdot)$ に対する方程式, 境界条件は, (16), (17), (19) から,

$$\frac{dG}{d\xi} + \frac{1}{k_0} (G^2 - 2G) + \frac{4k_0(1+i\xi)}{(1+\xi^2)^2} = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{Re}[G(0)] = 1, \quad G(\infty) = 0 \quad (22)$$

となる。

計算の手順は以下の通り,

- (i) 無限区間 $\xi = [0, \infty]$ にかえて, 適当に ξ_0 を決め, $\xi = [0, \xi_0]$ を積分領域とする。
- (ii) k_0 を勝手に与え, $G(\xi_0) = 0$ から出発し, Runge-Kutta 法 (ピッチ $\Delta\xi$) で積分し, 対応する $\operatorname{Re}[G(0)]$ を求める。 $\operatorname{Re}[G(0)] = 1$ となる k_0 の値の, およその見当をつける。
- (iii) $\operatorname{Re}[G(0)] \simeq 1$ となる k_0 を与え, $\operatorname{Re}[G(0)]$ を求め, 1からのずれに応じて k_0 を修正し, ずれが指定値より小さくなるまで, 繰り返し計算を続ける。
- (iv) 区間 $[0, \xi_0]$, ピッチ $\Delta\xi$ をいろいろ変えて, k_0 の固有値の動きを調べる。

計算の結果は, 表1に示す通りである。

$\xi = [0, \xi_0]$	$\Delta\xi = 0.2$	$\Delta\xi = 0.1$
$[0, 4]$	$k_0 = 0.752$ $\operatorname{Re}[G(0)] = 1.0000$ $\operatorname{Im}[G(0)] = 0.5037$	$k_0 = 0.752$ $\operatorname{Re}[G(0)] = 1.0000$ $\operatorname{Im}[G(0)] = 0.5037$
$[0, 8]$	$k_0 = 0.752$ $\operatorname{Re}[G(0)] = 1.0000$ $\operatorname{Im}[G(0)] = 0.5037$	
$[0, 8]$	$k_0 = 4.46$ $\operatorname{Re}[G(0)] = 1.0000$ $\operatorname{Im}[G(0)] = 9.9207$	$k_0 = 4.43$ $\operatorname{Re}[G(0)] = 1.0000$ $\operatorname{Im}[G(0)] = 9.8575$
$[0, 12]$		$k_0 = 4.44$ $\operatorname{Re}[G(0)] = 1.0000$ $\operatorname{Im}[G(0)] = 9.8854$

表1 いろいろな区間 $[0, \xi_0]$ とピッチ $\Delta\xi$ に対する k_0 の値

この結果から， k_0 の固有値 0.752 および 4.44 は， ξ_0 および $\Delta \xi$ に，殆んど依らないとみてよい。積分区間 $[0, \infty)$ に対する解として，これを採用する。固有函数 $G(\xi)$ の数値表は省略する。 $k_0 = 0.752, 4.44$ に対応して，

$$c_i = \begin{cases} -0.376\alpha + O(1/\alpha), & (23a) \\ -2.22\alpha + O(1/\alpha), & (23b) \end{cases}$$

が得られる。

(23a)，(23b)の結果を，(5a, b)

(6)と共に，図4に示す。

$c_i(\alpha)$ の二つの mode (5a, 6) (5b) は，それぞれ漸近枝 (23a, b) に，十分早く近づくとと思われる。乱れの高波数成分が，粘性ゼロの極限においても減衰し，その減衰率 (αc_i) が，漸近的に波数 α の二乗に比例する結果は，極めて注目すべきことである。

付記 1) この研究の本論文は参考文献 3 に発表。2) 数値計算は，ファコム株式会社 大阪計算所に，全面的に依頼した。費用は総額 ¥70,000。

参考文献

- 1) T. Tatsumi, K. Gotoh & K. Ayukawa : J. Phys. Soc. Japan 19 (1964) 1966.
- 2) 角谷典彦 : "Orr-Sommerfeld 方程式の転移点", 境界層と変わり点に関するシンポジウム報告
- 3) K. Gotoh : J. Phys. Soc. Japan 20 (1965) 164.

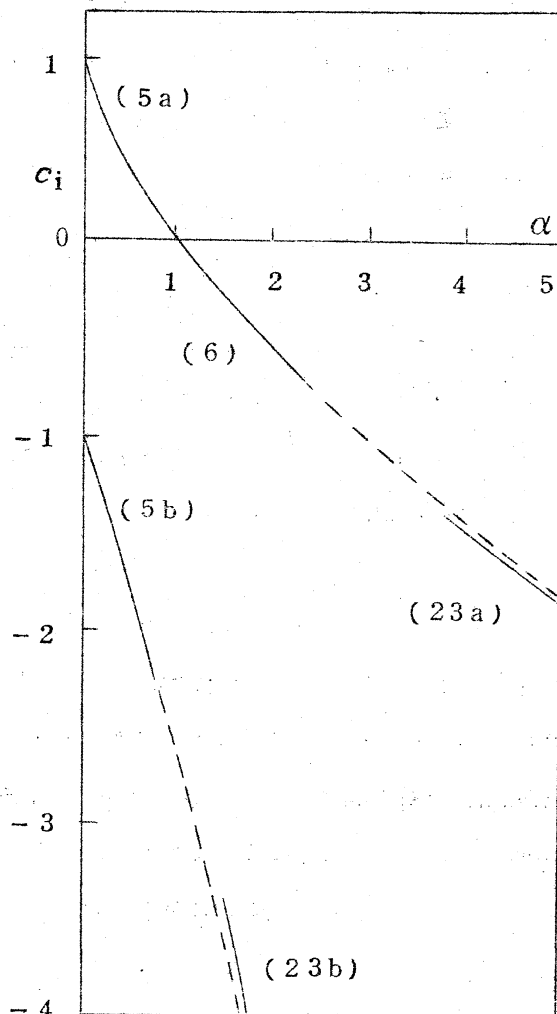


図4. 安定特性 $c_i(\alpha)$