

多項式の複素中の積分が満たす
ある差分微分方程式系

上智大 理工 野海正俊

0. $f = f(t, x)$ をパラメータ t を含む x の多項式とし, その複素中 f^λ の積分 $u(\lambda, t) = \int_{C(t)} f(t, x)^\lambda dx$ を考えると, $u(\lambda, t)$ は, 積分に対する適当な条件 (部分積分及びパラメータに関する積分記号下の微分が許されること) の下で, λ に関する差分・ t に関する微分方程式を満たす。(差分微分方程式の一般的な存在証明が, I. N. Bernstein [1] にある。) ここでは, 積分変数一変数の場合に限定して, この種の差分微分方程式の explicit な表示を与える。

$f = x^h + t_1 x^{h-1} + \dots + t_h$ を次数 h の一般の多項式とする。この f に対する差分微分方程式を連立系で表示することになると, 基底として例えば

$u_1(\lambda) = \int f^\lambda dx, u_2(\lambda) = \int x f^\lambda dx, \dots, u_{h-1}(\lambda) = \int x^{h-2} f^\lambda dx$ をとることができ, この基底 $\vec{u}(\lambda) = {}^t(u_1(\lambda), \dots, u_{h-1}(\lambda))$ に対して次の様な方程式系が生ずる ($t = (t_1, \dots, t_h)$ は明示しない):

$$\vec{u}(\lambda) = A(\lambda) \vec{u}(\lambda-1), \quad D_{t_k} \vec{u}(\lambda) = C^{(k)}(\lambda) \vec{u}(\lambda).$$

ここで, $A(\lambda), C^{(*)}(\lambda)$ は, $(h-1) \times (h-1)$ 行列で, その成分は夫々, $\mathbb{Q}(\lambda)[t], \mathbb{Q}(\lambda)[t, \Delta^{-1}]$ に属す。(Δ は f の判別式 = 根の差積の平方。) ところが, この $A(\lambda), C^{(*)}(\lambda)$ には, λ の因子が不規則に混入する等不合理な点がある。そこで, この基底を修正してよりよい基底を構成し, その「よい基底」を用いて差分微分方程式系の具体表示を与えることにする。(但し, 「よい基底」を今は天下りに構成する。)

1. 「よい基底」の構成. まず $f = x^h(1 + t_1 x^{-1} + \dots + t_h x^{-h})$

と書いて, () 内を x^h に対する擾動項と思う。そこで, f の分数巾 $f^{\frac{i}{h}} = x^i(1 + t_1 x^{-1} + \dots + t_h x^{-h})^{\frac{i}{h}}$ を考えると, 擾動項に対応する部分は $x = \infty$ で正則, 全体として i 位の極をもつ ($i = 1, \dots, h-1$)。 $f^{\frac{i}{h}}$ を $x = \infty$ で Laurent 展開して

$$f^{\frac{i}{h}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{i-\nu} C(i, \nu), \quad C(i, \nu) \in \mathbb{Q}[t]$$

と書き, x に関して多項式の部分

$$g_i = \sum_{\nu=0}^i x^{i-\nu} C(i, \nu)$$

をとる。これを x で微分して

$$e_i = \frac{1}{i} D_x(g_i) = \sum_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{i}\right) x^{i-\nu-1} C(i, \nu)$$

とおくと, e_i は, 主係数 1 の $i-1$ 次多項式である。この e_i を用いて

$$u_i(\lambda) = \int e_i f^\lambda dx \quad (i = 1, \dots, h-1)$$

をとり, $e_1, \dots, e_{h-1}$ または $u_1(\lambda), \dots, u_{h-1}(\lambda)$ を「よい基底」と称する。上の $C(i, \nu)$ は, 具体的には次の式で与えられる:

$$C(i, \nu) = \sum_{\alpha \in P(\nu)} \frac{i}{h} \left(\frac{i}{h} - 1 \right) \cdots \left(\frac{i}{h} - |\alpha| + 1 \right) t^\alpha / \alpha!.$$

ここで $P(\nu)$ は ν の分割

$$P(\nu) = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_h) \in \mathbb{N}^h; \sum_{k=1}^h k \alpha_k = \nu \right\}$$

$$\text{で, } |\alpha| = \sum_{k=1}^h \alpha_k, \quad t^\alpha / \alpha! = t_1^{\alpha_1} \cdots t_h^{\alpha_h} / \alpha_1! \cdots \alpha_h!.$$

2. 差分微分方程式の表示. この「よい基底」を用いると, $\vec{u}(\lambda) = {}^t(u_1(\lambda), \dots, u_{h-1}(\lambda))$ について, 次の様な差分方程式が生ずる:

$$(A) \quad E(\lambda) \vec{u}(\lambda) = \lambda A \vec{u}(\lambda-1).$$

ここで, $E(\lambda)$ は (i, i) 成分が $h\lambda + i$ の対角行列, $A = (a_{ij})$ は, $\mathbb{Q}[t]$ 係数の行列で次の著しい性質をもつ: (A.0) t_k の重みを k と数えるとき, a_{ij} は重み $h+i-j$ の斉重多項式。

(A.1) A は, 反対角線に関して対称 ($J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

AJ が対称)。 (A.2) $\det A = (-1)^{[\frac{h}{2}]} \Delta / h$. さらに, 上に用

いた $C(i, \nu)$ によつて A の成分は

$$a_{i, h-j} = \frac{h}{j} \sum_{\nu=1}^i \nu C(i, i-\nu) C(j, j+\nu) \\ + \frac{h}{i} \sum_{\nu=1}^j \nu C(j, j-\nu) C(i, i+\nu)$$

と表わされる。

$d_t = \sum_{k=1}^h dt_k \frac{\partial}{\partial t_k}$ と書いておくと, d_t の $\vec{u}(\lambda)$ への作用は $\vec{u}(\lambda-1)$ によつて

$$(B) \quad d_t \vec{u}(\lambda) = \lambda B \vec{u}(\lambda-1)$$

と表わされ、 B の成分は $\sum_{k=1}^h \mathbb{Q}[t] dt_k$ の形の微分形式となる。 $B = (b_{ij})$ について: (B.1) $b_{ij} = d_t a_{ij} / (h+i-j)$ (b_{ij} は a_{ij} を外微分して重みで割ったもの。 dt_k の重みも k と数えれば b_{ij} も重み $h+i-j$ で斉重となる。) (B.2) $AB = BA$ なる性質がある。(A.1) (B.1) から B もまた反対角線に関して対称である。(性質 (B.1) (B.2) は、2つの表示式 (A) (B) の両立条件として得られる。)

$C = BA^{-1}$ とおけば、(A.2) から、 C は判別式 Δ に高々 1 位の極をもつ微分形式の行列で、再び反対角線に関して対称であって、

$$(C) \quad d_t \vec{u}(\lambda) = C E(\lambda) \vec{u}(\lambda)$$

の形の微分方程式系が得られる。($h=3$, $\lambda=-\frac{1}{2}$ の場合が、Gauß の超幾何方程式に対応する。)

行列 B, C は上の手続きで A から計算される。行列 A については、 $C(i, \nu)$ を用いた成分の表示を与えたが、このノートの末尾に $h=2, 3, 4, 5$ の場合の具体形を掲げておく。

3. 注釈. (その1) 上で構成した「よい基底」は、Saito-Yano-Sekiguchi [3] によって導入された flat coordinate と次の様な関係にあることを、この研究集会の会期中に 矢野環

先生が検証された。 $t_1=0$ として, $f = x^{\ell+1} + t_2 x^{\ell-1} + \dots + t_{\ell+1}$ を A_ℓ 型孤立特異点の versal deformation と思う。このとき $t = (t_2, \dots, t_{\ell+1})$ 空間の flat coordinate $s = (s_2, \dots, s_{\ell+1})$ は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_{i+1}} f &= f^{\frac{i}{\ell+1}} \text{ の展開の } -1 \text{ 次の係数} \\ &= c(i, i+1) \end{aligned}$$

で定義され, f の係数を $s = (s_2, \dots, s_{\ell+1})$ の座標でみたとき

$$e_1 = \frac{\partial f}{\partial s_{\ell+1}}, e_2 = \frac{\partial f}{\partial s_\ell}, \dots, e_\ell = \frac{\partial f}{\partial s_2}$$

なる等式が成立する。(この観点からすれば「よい基底」は「平坦な基底」と呼ぶべきものになっている。) f の分数中と, flat coordinate との間に, 何故このような奇妙な関係があるのか, 今のところよくわからない。(Yano [4] も参照。)
(その2) f の複素中でなく, δ -函数 $\delta(y-f(t,x))$ の積分を考えると; $u_i(\lambda, t)$ と

$$v_i(y, t) = \int e_i \delta(y-f) dx$$

は, 形式的に Mellin 変換で

$$u_i(\lambda-1) = \int v_i(y, t) y^{\lambda-1} dy$$

と対応する。この対応関係によって, n°2 の表示式を, 積分 $\int \delta(y-f) dx$ に対する Gauß-Manin の微分方程式系に移しかえることができる。

(その3) n°2 で与えた表示式は, x の平行移動に関する不変性を有している。言い換えると, ベクトル場

$$\partial_t = \sum_{k=1}^h (h+1-k) t_{k-1} \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (t_0=1)$$

について, $\partial_t A = 0$ となる。 B についても, dt_k を τ_k と書き直して, ∂_τ を上と同じ式で定義するとき, $(\partial_t + \partial_\tau) B = 0$ となる。(C についても同様。)

4. 以下順に, «よい基底» について, $n^\circ 2$ の形の表示が得られることを示していく。その前に, 差分微分方程式を引き出す枠組について説明しておく。一般多項式 $f = x^{h+t_1} x + \dots + t_h$ に対して係数環として, h 変数の多項式環 $\mathbb{Q}[t] = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_h]$ と取る。中のパラメータは, 不定元と考えることにする。そこで, 被積分函数の加群として

$$M = \mathbb{Q}(\lambda)[t, x, f^{-1}] f^\lambda$$

をとる (f^λ は基底を表わす記号と思う)。

$$D_x(g(\lambda) f^\lambda) = D_x(g(\lambda)) f^\lambda + \lambda g(\lambda) D_x(f) f^{\lambda-1}; g(\lambda) \in \mathbb{Q}(\lambda)[t, x, f^{-1}]$$

等の作用で, M は $\mathbb{Q}(\lambda)[t, x, D_t, D_x]$ 上の左加群となる。これに対して, x に関する de Rham 複体

$$\Omega_x^*(M): 0 \rightarrow M \xrightarrow{d_x} \underbrace{\Omega_x^1 \otimes M}_{\mathbb{Q}[x]} \rightarrow 0$$

をとる。 ($\Omega_x^1 = \mathbb{Q}[x] dx$, $d_x = dx \otimes D_x$.) これに, 次のフィルトレーションを入れる:

$$\Omega_x^*(M)_m: 0 \rightarrow M_m \xrightarrow{d_x} \underbrace{\Omega_x^1 \otimes M_{m+1}}_{\mathbb{Q}[x]} \rightarrow 0$$

ここで $M_m = \mathbb{Q}(\lambda)[t, x] f^{\lambda-m}$ ($m \in \mathbb{Z}$). このとき,

命題 i) 各 $m \in \mathbb{Z}$ について, $H^0(\Omega_x(M)_m) = 0$. また

$$H^1(\Omega_x(M)_m) \simeq Q(\lambda)[t, x]^{(h-2)} f^{\lambda-m-1} dx.$$

で, $H^1(\Omega_x(M)_m)$ は, 階数 $h-1$ の自由 $Q(\lambda)[t]$ -加群.

(ここで $Q(\lambda)[t, x]^{(d)}$ は x について d 次以下の多項式全体.)

ii) 各 $m \in \mathbb{Z}$ について

$$Q[t, \Delta^{-1}] \otimes_{Q[t]} H^1(\Omega_x(M)_m) \simeq Q[t, \Delta^{-1}] \otimes_{Q[t]} H^1(\Omega_x(M)).$$

この命題の証明は古典的と思われるので略す。(Pham [2] の Introduction にある命題と本質的に同じ。) この命題から,

$e_1, \dots, e_{h-1} \in Q[t, x]^{(h-2)}$ を $Q[t]$ -基底となるようにとれば, 剰余類, $[e_i f^{\lambda-m-1} dx]$ が, $H^1(\Omega_x(M)_m)$ の $Q(\lambda)[t]$ -基底を与えることがわかる。このことから

$$\begin{aligned} e_i f^\lambda dx &\equiv \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij}(\lambda) e_j f^{\lambda-1} dx \\ D_{t_k}(e_i f^\lambda) dx &\equiv \sum_{j=1}^{h-1} b_{ij}^{(k)}(\lambda) e_j f^{\lambda-1} dx \pmod{d_x M_0} \end{aligned}$$

なる $a_{ij}(\lambda), b_{ij}^{(k)}(\lambda) \in Q(\lambda)[t]$ が一意に定まる。

$$u_i(\lambda-m) = e_i f^{\lambda-m} dx \pmod{d_x M}$$

と書けば, 上の2式が

$$\begin{aligned} u_i(\lambda) &= \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij}(\lambda) u_j(\lambda-1) \\ D_{t_k} u_i(\lambda) &= \sum_{j=1}^{h-1} b_{ij}^{(k)}(\lambda) u_j(\lambda-1) \end{aligned}$$

なる方程式系を与える訳である。

5. 表示(A)と行列Aの対称性. $n^{\circ}1$ の記号を踏襲する。表示

(A)を得るためには、各 i で、 $he_i f - g_i D_x(f)$ が x について高々 $h-2$ 次であることを言えばよい。そうすれば、

$$(5.1) \quad he_i f - g_i D_x(f) = \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij} e_j \quad (i=1, \dots, h-1)$$

なる $a_{ij} \in \mathbb{Q}[t]$ が一意に定まる。部分積分により、

$$-g_i D_x(f) f^{\lambda-1} dx \equiv \frac{i}{\lambda} e_i f^{\lambda} dx \pmod{d_x M_0}$$

だから、(5.1)式から

$$\left(h + \frac{i}{\lambda}\right) e_i f^{\lambda} dx \equiv \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij} e_j f^{\lambda-1} dx \pmod{d_x M_0}$$

となる — これが表示(A)を与える。記号の便宜として

$$\varphi = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x^{\nu} c_{\nu}$$

の形の巾級数に対して

$$[\varphi]_+ = \text{多項式部分} = \sum_{\nu \geq 0} x^{\nu} c_{\nu}$$

$$[\varphi]_- = \varphi - [\varphi]_+ = \sum_{\nu < 0} x^{\nu} c_{\nu}$$

$$[\varphi]_{\mu} = x^{\mu} \text{の係数} = c_{\mu}$$

と書くことにする。例えば $e_i = \frac{1}{2} [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_+ = \frac{1}{h} [D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}]_+$.

[補題1. «よい基底»の e_i ($i=1, \dots, h-1$) について、 $he_i f - g_i D_x(f)$ は高々 $h-2$ 次式。

$$\text{証明) } he_i f = [D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}]_+ f = D_x(f) f^{\frac{i}{h}} - [D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}]_- f$$

$$g_i D_x(f) = D_x(f) [f^{\frac{i}{h}}]_+ = D_x(f) f^{\frac{i}{h}} - D_x(f) [f^{\frac{i}{h}}]_-$$

$$\text{従って, } he_i f - g_i D_x(f) = D_x(f) [f^{\frac{i}{h}}]_- - [D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}]_- f.$$

ここで, $D_x(f)[f^{\frac{i}{h}}]_-$ は高々 $h-2$ 次。一方 $D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}$
 $= \frac{h}{i} D_x(f^{\frac{i}{h}})$ の -1 次の係数は 0 だから, $[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}]_- f$
 も高々 $h-2$ 次となる。□.

これで 表示 (A) が保証された。次に行列 A の対称性と問
 題にする。そのために, 同型 $\mathbb{Q}[t, x]^{(h-2)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[t, x] / \mathbb{Q}[t, x] D_x(f)$
 に注目して, 次の記号 $\langle \rangle$ を導入する。一般の $g \in \mathbb{Q}[t, x]$
 を, $g = q \cdot D_x(f) + r$ ($q, r \in \mathbb{Q}[t, x]$, $\deg_x r \leq h-2$) と書いて,
 $\langle g \rangle = r$ の $h-2$ 次の係数 とおく。 ($D_x(f)^{-1} \in x=\infty$ で展開す
 れば $\langle g \rangle = h[g/D_x(f)]_{-1}$ と言ってもよい。) これについて,

[補題 2. «よい基底» $e_1, \dots, e_{h-1}$ について, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i, h-j}$.

証明) $i+j \leq h$ のときは明らか (e_i は $i-1$ 次式で主係数 1
 だから)。 $i+j = h+k$, $k > 0$ とする。 $ie_i = D_x(f^{\frac{i}{h}}) - [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-$
 等から,

$$\begin{aligned} ije_ie_j &= D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}}) - D_x(f^{\frac{i}{h}})[D_x(f^{\frac{j}{h}})]_- \\ &\quad - [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_- D_x(f^{\frac{j}{h}}) + [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_- [D_x(f^{\frac{j}{h}})]_- \end{aligned}$$

$\langle \rangle$ をとるには, 右辺の多項式部分 (各項の) に注目すれば
 よい。後の 3 項は $h-3$ 次以下。第 1 項は

$$\begin{aligned} D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}}) &= \frac{ij}{h^2} D_x(f)^2 f^{\frac{i}{h} + \frac{j}{h} - 2} \\ &= \frac{ij}{h^2} D_x(f)^2 f^{\frac{k}{h} - 1} = \frac{ij}{hk} D_x(f) D_x(f^{\frac{k}{h}}) \\ &= \frac{ij}{hk} D_x(f) [D_x(f^{\frac{k}{h}})]_+ - \frac{ij}{hk} D_x(f) [D_x(f^{\frac{k}{h}})]_- \end{aligned}$$

この式の第1項は $D_x(f)$ の倍数、第2項は高々 $h-3$ 次だから、 $D_x(f^{\frac{z}{h}})D_x(f^{\frac{z}{h}})$ の多項式部分についても $\langle \cdot \rangle$ は 0 となる。即ち $i+j > h$ ならば $\langle e_i e_j \rangle = 0$ である。□

さて、(5.1) 式から、

$$h e_i f \equiv \sum_{k=1}^{h-1} a_{ik} e_k \pmod{D_x(f)}.$$

両辺に e_j を掛けて $\langle \cdot \rangle$ をとると、補題 2 から

$$(5.2) \quad a_{i,h-j} = h \langle e_i e_j f \rangle \quad (1 \leq i, j \leq h-1)$$

を得、右辺は i, j について対称となる。これが A の対称性 (A.1) の内容である。(5.2) の右辺を補題 2 の証明と同様の方法で計算すると

$$a_{i,h-j} = -\frac{h}{j} \left[f^{\frac{z}{h}} \left[D_x \left(f^{\frac{z}{h}} \right) \right]_- \right]_{-1} - \frac{h}{i} \left[f^{\frac{z}{h}} \left[D_x \left(f^{\frac{z}{h}} \right) \right]_- \right]_{-1}$$

となる。これを書き下した式が、 $n^{\circ}2$ で掲げた表示式である。

この $n^{\circ}5$ の最後に、 $\det A$ を決定しておく。まず $n^{\circ}4$ の命題の ii) から、行列 A は $\mathbb{Q}[t, \Delta^{-1}]$ でみると可逆である。従って $\det A$ は Δ の中を割り切る。 Δ は t の多項式として既約だから、 $\det A$ は Δ の中の定数倍 ($\in \mathbb{Q}$) となる。そこで $\det A$ と Δ の t についての重みに注目すると、両者とも重み $h(h-1)$ なのだから、 $\det A = c \cdot \Delta$ ($c \in \mathbb{Q}$) の形となる。 c を求めるには、 $f = x^h - 1$ ($t_1 = \dots = t_{h-1} = 0, t_h = -1$) について、

$\det A$ と Δ を比較すれば十分である。このとき $a_{i,h-j}$ の表示式から $A = -hI$ (I は単位行列) で $\det A = (-h)^{h-1}$ 。一方 $\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)+h-1} \cdot h^h$ から, $C = (-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)}/h = (-1)^{[\frac{h}{2}]/h}$ を得る。

6. 表示 (B) と両立条件. まず「 $\ll$ よい基底 $\gg$ 」に対する表示 (B) を確認する。 k ($1 \leq k \leq h$) を 1 つ固定して $D_t = D_{t_k}$ と書くことにする。このとき

$$\begin{aligned} i D_t(e_i f^\lambda) dx &= D_t(D_x(q_i) f^\lambda) dx \\ &= \lambda D_x(q_i) D_t(f) f^{\lambda-1} dx + D_x(D_t(q_i)) f^\lambda dx \\ &\equiv \lambda (D_x(q_i) D_t(f) - D_t(q_i) D_x(f)) f^{\lambda-1} dx \\ &\quad (\text{mod } d_x M.) \end{aligned}$$

である。従って, $D_x(q_i) D_t(f) - D_t(q_i) D_x(f)$ が高々 $h-2$ 次式であることがわかれば, これを $i \sum_{j=1}^{h-1} b_{ij} e_j$ と書いて $D_t \vec{u}(\lambda) = \lambda B \vec{u}(\lambda-1)$ ($B = (b_{ij})$) の形の表示が得られることになる。

[補題 3. $D_x(q_i) D_t(f) - D_t(q_i) D_x(f)$ は高々 $h-2$ 次式。

証明) $D(q_i) = \frac{i}{h} f^{\frac{i}{h}-1} D(f) - \frac{i}{h} [f^{\frac{i}{h}-1} D(f)]_-$ の形の式を予式に代入すると

$$\frac{i}{h} [f^{\frac{i}{h}-1} D_t(f)]_- D_x(f) - \frac{i}{h} [f^{\frac{i}{h}-1} D_x(f)]_- D_t(f)$$

これが $h-2$ 次以下となることはみやすい。□

次に2つの表示

$$E(\lambda) \vec{u}(\lambda) = \lambda A \vec{u}(\lambda-1), \quad D_t \vec{u}(\lambda) = \lambda B \vec{u}(\lambda-1)$$

から、両立条件として性質 (B.1) (B.2) を導く。 $E(\lambda+1) \vec{u}(\lambda+1)$ を D_t で微分したものを2通りにみると、 $D_t(A) \vec{u}(\lambda) + A D_t \vec{u}(\lambda) = E(\lambda+1) B \vec{u}(\lambda)$. これを $\vec{u}(\lambda-1)$ で統一すると

$$\begin{aligned} D_t(A) E(\lambda)^{-1} A \vec{u}(\lambda-1) + A B \vec{u}(\lambda-1) \\ = E(\lambda+1) B E(\lambda)^{-1} A \vec{u}(\lambda-1) \end{aligned}$$

$u_i(\lambda-1)$ は、 $\mathbb{Q}[t, \Delta^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}[t]} H'(\Omega_x^*(M))$ の元として $\mathbb{Q}(\lambda)[t, \Delta^{-1}]$ 上の自由基底を与えるから、行列として

$$D_t(A) E(\lambda)^{-1} A + A B = E(\lambda+1) B E(\lambda)^{-1} A$$

が成立する。両辺の (i, j) 成分をとり整理すると

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{1}{h\lambda+r} \{ D_t(a_{ir}) - (h+i-r) b_{ir} \} a_{rj} \\ + \sum_r (a_{ir} b_{rj} - b_{ir} a_{rj}) = 0 \end{aligned}$$

となる。1, $\frac{1}{h\lambda+r}$ ($r=1, \dots, h-1$) は $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$ において $\mathbb{Q}[t]$ 上独立だから

$$\begin{aligned} \{ D_t(a_{ir}) - (h+i-r) b_{ir} \} a_{rj} &= 0 \\ \sum_r (a_{ir} b_{rj} - b_{ir} a_{rj}) &= 0. \end{aligned}$$

を得る。Aの各行に0でない成分があるから上の式で $\{$ $\}$ が0となる。即ち $b_{ij} = D_t(a_{ij}) / (h+i-j)$. 下の式は $AB = BA$. これで (B.1) (B.2) が示せた。

7. 付録. $h=2, 3, 4, 5$ に対する「基底」 $e_1, \dots, e_{h-1}$ と行列 A を掲げておく。但し, $h=3, 4, 5$ では一般多項式 f の $t_1=0$ とした形: $f = x^h + t_2 x^{h-2} + \dots + t_h$ で書いている。

$$(h=2) \quad e=1, \quad A = 2t_2 - \frac{1}{2}t_1^2$$

$$(h=3) \quad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3t_3 & 2t_2 \\ -\frac{2}{3}t_2^2 & 3t_3 \end{pmatrix}$$

$$(h=4) \quad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=x \\ e_3=x^2 + \frac{1}{4}t_2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 4t_4 - \frac{1}{2}t_2^2 & 3t_3 & 2t_2 \\ -\frac{5}{4}t_2t_3 & 4t_4 - t_2^2 & 3t_3 \\ \frac{1}{8}t_2^3 - \frac{3}{4}t_3^2 & -\frac{5}{4}t_2t_3 & 4t_4 - \frac{1}{2}t_2^2 \end{pmatrix}$$

$$(h=5) \quad \begin{aligned} e_1 &= 1 \\ e_2 &= x \\ e_3 &= x^2 + \frac{1}{5}t_2 \\ e_4 &= x^3 + \frac{2}{5}t_2x + \frac{1}{5}t_3 \end{aligned}$$

$$A = (a_{ij}) \quad (a_{i,h-j} = a_{j,h-i} \text{ に注意して補う。})$$

$$a_{11} = 5t_5 - t_2t_3, \quad a_{12} = 4t_4 - \frac{4}{5}t_2^2, \quad a_{13} = 3t_3, \quad a_{14} = 2t_2$$

$$a_{21} = -\frac{6}{5}t_2t_4 - \frac{3}{5}t_3^2 + \frac{6}{25}t_2^3, \quad a_{22} = 5t_5 - 2t_2t_3,$$

$$a_{23} = 4t_4 - \frac{6}{5}t_2^2, \quad a_{31} = -\frac{7}{5}t_3t_4 + \frac{14}{25}t_2^2t_3$$

$$a_{32} = -\frac{6}{5}t_2t_4 - \frac{6}{5}t_3^2 + \frac{8}{25}t_2^3$$

$$a_{41} = -\frac{4}{5}t_4^2 + \frac{8}{25}t_2^2t_4 + \frac{8}{25}t_2t_3^2 - \frac{6}{125}t_2^3$$

————— * —————

文献

- [1] Bernstein, I.N. : The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. Analysis and its Appl.*, 6(4) 1972, 26-40.
- [2] Pham, F. : *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Birkhäuser, 1979.
- [3] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J. : On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, *Comm. in algebra*, 8(4) 1980, 373 - 408.
- [4] Yano, T. : Free deformations of isolated singularities, *Science Report of the Saitama Univ., Ser A, Vol. IX, No. 3*, 1980, 61-70.