

水銀乱流における 2 つの境界層の逆転現象

瀬川武彦 Antoine Naert 佐野雅己

東北大学電気通信研究所

1 はじめに

近年、様々な流体の熱乱流における統計的性質が詳しく研究され、Soft 乱流, Hard 乱流という 2 つの異なる乱流状態が存在することが明らかになっている。Hard 乱流中の熱流や平均流などがより詳しく測定され、またシミュレーションおよび理論的解析から、その性質やダイナミクスが解明されつつある。特に最近、高圧 SF_6 ガス中の局所的な温度ゆらぎの測定により、Hard 乱流中の速度境界層と熱境界層の位置関係が詳しく調べられた [1]。従来、熱境界層は速度境界層よりも薄いと考えられ、実際 SF_6 ガスでもそうであるが、その実験結果は、さらに高い Rayleigh 数でそれらの 2 つの境界層が逆転する可能性があることを示している。しかし今のところ、He や高圧 SF_6 ガスでそのような乱流状態を実現することは困難であり、逆転現象は見られていない。水銀は、Prandtl 数が小さいゆえに $10^5 < Ra < 10^8$ で逆転する可能性があることが理論的に予測されている。我々の製作した装置はそのような乱流状態を作り出すことができ、また乱流中の境界層付近をミクロン精度で移動できる温度センサーにより、水銀における 2 つの境界層の位置関係を決定することができる。2 つの境界層が逆転している場合、熱流の変化にともなう Nusselt 数などの物理量の Rayleigh 数に対するスケーリング則が遷移することや、乱流を特徴付けられると思われる plume の発生機構が変化することなどが考えられ、究極の乱流状態へのアプローチと理解へ向け大変興味深い。

2 対流系を特徴付ける無次元数

これからの内容で必要になる 4 つの無次元数を定義する。

まずは、温度差に関する無次元数 Rayleigh 数 (Ra) を、

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu}$$

とする。ここで、 α は熱膨張率、 g は重力加速度、 ΔT は対流セルの上下の温度差、 κ および ν はそれぞれ熱拡散定数と動粘性率である。速度に関する無次元数、Reynolds 数 (Re) は、

$$Re = \frac{LU}{\nu}$$

である。 L は系の長さ (対流セルの高さ)、 U は流体の速さ (Hard 乱流に存在する巨視的流れの平均の速さ) とする。熱流に関する無次元数、Nusselt 数 (Nu) は、

$$Nu = \frac{Q}{\chi_T \Delta T}$$

である。 Q 、 χ 、および A は、流体に供給される単位時間あたりの全熱輸送量、熱伝導率、断面積である。Prandtl 数 (Pr) は、

物質	Prandtl数
水銀	0.024
低温ヘリウム	~0.7
SF ₆	~0.7
空気	~0.7
水	2~9
シリコンオイル	50~10 ³
プラズマ	~10 ⁶

表 1: 主な物質の Prandtl 数

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

であり、水銀のような液体金属は κ が大きいので Prandtl 数は小さくなる。主な物質の Prandtl 数を表 1 に示す。

3 Hard 乱流の特徴と 2 つの境界層

1980 年代後半に、シカゴ大グループの実験的研究により発見された Hard 乱流は、1) 対流セルの中心での温度ゆらぎ確率分布が指数分布である、2) 巨視的流れが存在する、3) Nusselt 数、温度ゆらぎの平均自乗偏差、および巨視的流れの平均速度の Rayleigh 数に対するスケーリング則がそれまでのものと異なる、4) 温度ゆらぎパワースペクトラムが、 $Ra < 10^{11}$ で -1.4 の傾きで減衰するのに対し、 $Ra > 10^{11}$ では 2 つの傾きが存在する、という特徴を持つ [2, 3, 4, 5, 6]。Hard 乱流のスケーリング則の理論による説明は、熱境界層と速度境界層の 2 つの境界層を仮定し、熱境界層と中央領域の間に浮力と粘性力が釣り合うような領域を考え、これらの領域の Matching で行われている。Nusselt 数および Reynolds 数の Rayleigh 数に対するスケーリングは、

$$Nu \sim Ra^{\gamma}$$

$$Re \sim Ra^{\epsilon}$$

である。実験及び理論で γ の値はそれぞれ、 $\gamma = 0.285 \pm 0.004$, $2/7$ で、 ϵ の値はそれぞれ、 $\epsilon = 0.485 \pm 0.005$, $3/7$ である。

熱対流系の Hard 乱流中の温度分布と速度分布の概念図を図 1 に示す。 z は対流セルのプレートからの垂直方向の距離である。熱はプレート付近では熱伝導のみで運ばれると考えられるので温度は直線的に変化したが、セルの中心へ向かうにつれ勾配は小さくなり一定温度になる。プレートと、直線的に温度が上昇する領域と一定温度の領域の外挿の交点までを、熱境界層 (λ_T) と定義する。一方速度はプレートではゼロで、プレートから離れるに従い速くなるが、ある地点で最大値になる。その地点を越えると徐々に遅くなり、中心部では速度の平均はゼロとなる。プレートとこの速度最大の地点までを、速度境界層 (λ_v) と定義する。

高圧 SF₆ ガス中の局所的な温度ゆらぎの測定により、Hard 乱流中の速度境界層と熱境界層の位置関係が調べられ、

$$\lambda_T \sim Ra^{-0.29 \pm 0.01} \sim Ra^{-\gamma}$$

$$\lambda_v \sim Ra^{-0.44 \pm 0.09} \sim Ra^{-\epsilon}$$

なる関係で、2 つの境界層が Rayleigh 数増加とともに薄くなっていることが確認された [1]。また、測定した範囲においては熱境界層が速度境界層の内側にあるが、 $Ra \sim 10^{14}$ でこれらが逆転する可能性があることが予測されている。Hard 乱流の理論からも、これらの関係を導き出すことができる [3]。熱境界層中の熱流 Q は、

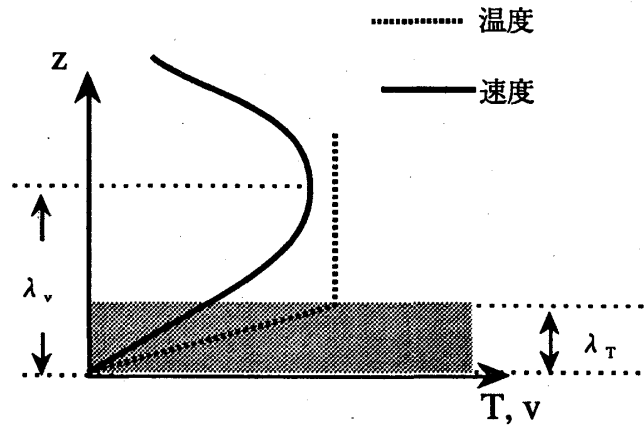


図 1: Hard 乱流中の温度および速度分布

$$Q = \chi \frac{\frac{\Delta T}{2}}{\lambda_T}$$

であるので、

$$Nu = \frac{L}{2\lambda_T}$$

$$\frac{\lambda_T}{L} \sim \frac{1}{Nu} \sim Pr^{1/7} Ra^{-2/7} \sim Ra^{-\gamma}$$

と次元解析される。同様に速度境界層に関して、

$$\lambda_v \sim \frac{\nu}{U} \sim \frac{L}{Re}$$

$$\frac{\lambda_v}{L} \sim \frac{1}{Re} \sim Pr^{5/7} Ra^{-3/7} \sim Ra^{-\epsilon}$$

と次元解析される。速度境界層の Rayleigh 数の指数が $3/7$ と 0.485 で少し異なるが、実験結果も理論も高 Rayleigh 数で 2 つの境界層が逆転する可能性を示唆している。また上式から、

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_T} \sim Pr^{4/7} Ra^{-1/7}$$

が導出でき、境界層の逆転 ($\frac{\lambda_v}{\lambda_T} \sim 1$) は、低 Prandtl 数流体ではより低 Rayleigh 数で起こることを示している [8]。高圧 SF_6 ガス ($Pr = 0.7$) では、 $Ra \sim 10^{14}$ であるのに対し、水銀 ($Pr = 0.024$) では $10^5 < Ra < 10^8$ と推測される。逆転現象が起きていれば、乱流中の熱流が変化し、Nusselt 数の Rayleigh 数に対するスケーリング則が変化することが予想される。究極の乱流状態では境界層が存在しなくなり、 $Nu \sim Ra^{1/2}$ のスケーリングを示す理論的予測があるが [7, 8, 9]、そのような結果はどの物質においてもまだ確認されていない。

4 実験および実験結果

4.1 水銀乱流におけるスケーリング指数

2 つの境界層の測定は、直径 10cm、高さ 10cm (アスペクト比: 1) の円筒状の対流セルを使用した [10]。厚さ 2cm の上下のプレートは銅製であり、シリンダー内の水銀はマンガン線ヒーターの埋め込まれた下部プレートで暖められ、循環水により一定の温度に保たれている上部プレートで冷却される (図 2)。シリンダーの側壁は厚さ 2mm のステンレス製である。温度センサーは、中心に 1 個、側壁に 2 個、上部プレート付近の可動式センサーの 2 個の計 5 個である。また高さ 5cm、20cm (アスペクト比: 2, 1/2) のセルでも、熱流を測定した。

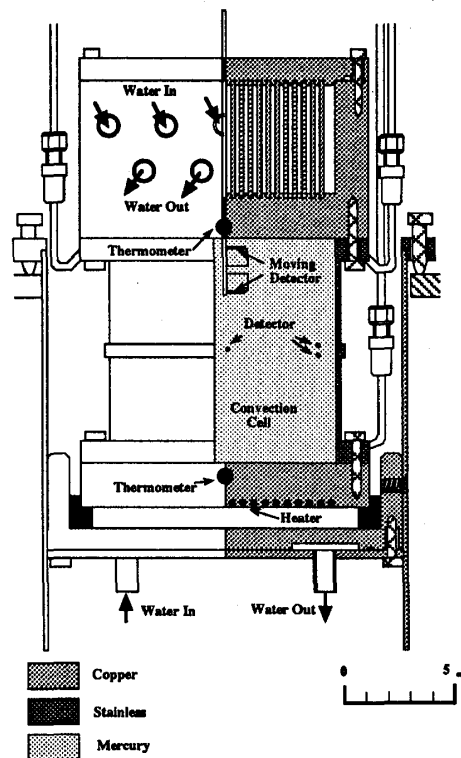


図 2: 実験装置

アスペクト比が1のセルにおいて、温度ゆらぎ確率分布は、対流セルの中央で $10^5 < Ra < 10^8$ の範囲で指数分布に近い形をしている（図3）。可動式センサーはセル内のセンターラインに沿って垂直方向に動くことができるため、様々な位置での温度ゆらぎの時系列データを得ることができる。図4は $Ra = 7.5 \times 10^7$ における温度ゆらぎ確率分布の形の移り変わりである。 z は上部プレートからの距離で、プレート付近では gauss 分布に近いが中央へ近づくにつれ指数分布に近い形へと変化する。

側壁の2個のセンサーの時系列の cross spectrum の phase delay から、流体の速度を計算でき、 $Ra = 10^7$ での平均流速は約 2cm/s である。Reynolds 数の Rayleigh 数に関するスケーリングは、

$$Re = 6.24 Ra^{0.47 \pm 0.02}$$

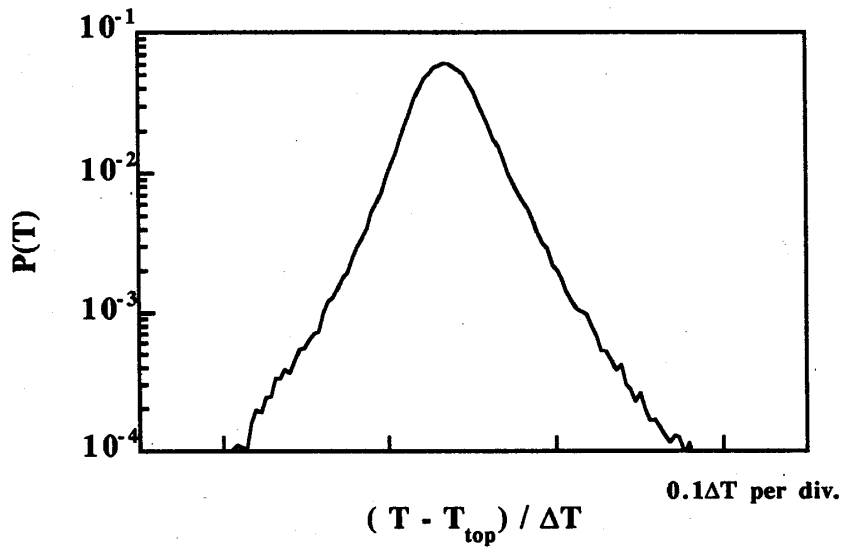
となり、指数は He などの Hard 乱流の値に近いが、係数はヘリウムのそれと比べて約 20 倍大きい。

温度ゆらぎパワースペクトラムは、

$$P(f) = \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-\xi} \exp\left(-\frac{f}{f_c}\right)$$

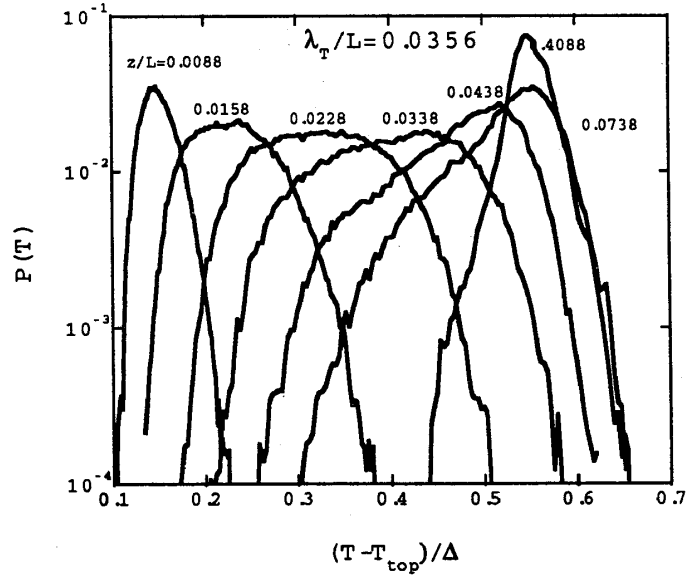
で fitting 可能である（図5）。 $10^5 < Ra < 10^8$ で、 $\xi = 1.58 \pm 0.09$ である。cut off 周波数 f_c のスケーリングは、 $f_c \sim Ra^\beta$ で $\beta = 0.4 \pm 0.05$ であり、ヘリウムの $\beta = 0.78$ と大きく異なっている。ヘリウムの指数は、最も小さい空間構造 (plume) のサイズを Λ 、平均流速を V とすると、 $f_c \sim V/\Lambda$ と書ける。 Λ が熱境界層の厚さ λ_T と同じ大きさだと仮定すると、 $f_c \sim Ra^{\gamma+\epsilon}$ となる。つまり $\beta = \gamma + \epsilon = 0.78$ となり f_c の周波数の意味が説明できるが、水銀の指数に関しては説明できない。

次に、3種類の異なるアスペクト比の対流セルで熱流を測定し、Nusselt 数の Rayleigh 数に関するスケーリングを得た。アスペクト比1のセルで、



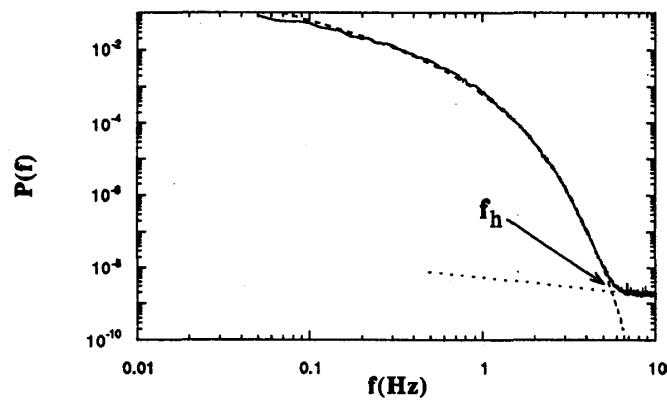
アスペクト比 1 の対流セルの中心での温度ゆらぎ確率分布。指数分布に近い。データ数： 4×10^5 , $Ra = 7.5 \times 10^7$.

図 3: セルの中心での温度ゆらぎ確率分布



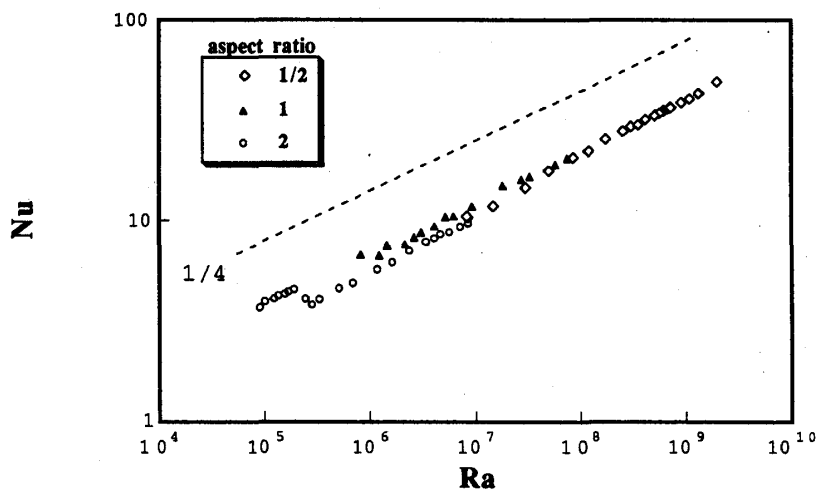
上部プレートからの距離 z/L ($L=10\text{cm}$) の温度ゆらぎ確率分布。 $Ra = 7.5 \times 10^7$ 。上部プレート付近では gauss 分布に近いが、センターに近づくにつれ指数分布に近い形へと変化する。 $z/L=0.036$ が熱境界層の位置。

図 4: 対流セル内の様々な位置での温度ゆらぎ確率分布



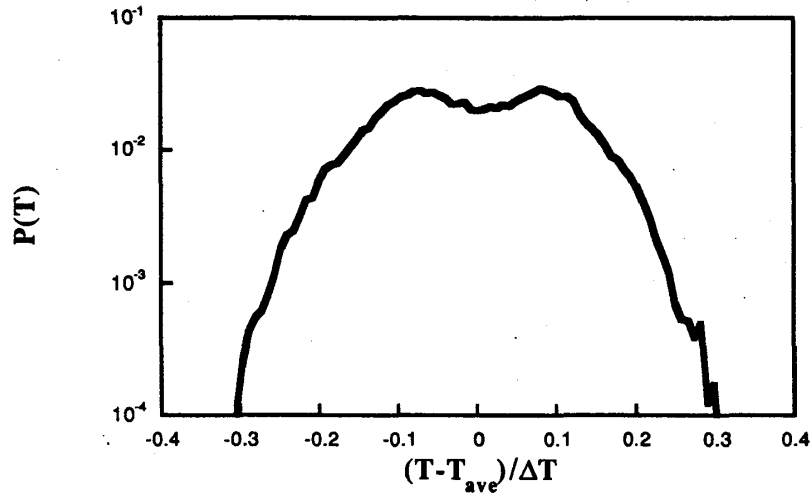
速度境界層付近の温度ゆらぎパワースペクトラム. $P(f) = \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-\xi} \exp\left(-\frac{f}{f_c}\right)$ で fitting 可能. セル中心での温度ゆらぎパワースペクトラムの cut off 周波数 f_c は, Rayleigh 数に対して $\beta = 0.4 \pm 0.05$ と低温ヘリウム 0.78 と大きく違うスケーリングを示す. また, 最も速い周波数 f_h を fitting 曲線がノイズレベルに落ち込む周波数とする. f_h はその位置の流速に比例すると仮定し, 速度境界層を決定する. $Ra = 2.34 \times 10^7$. データ数: 8×10^5 .

図 5: 温度ゆらぎパワースペクトル



3種類のセルにおける Rayleigh 数と Nusselt 数の関係. アスペクト比 1, 1/2 および 2 における γ の値はそれぞれ, $\gamma = 0.26 \pm 0.02$, 0.29 ± 0.02 , 0.26 ± 0.02 である. $\gamma = 1/2$ は見られない. アスペクト比 2 のセルにおいては $Ra = 2 \times 10^5$ 付近で転移が存在する. 破線は $\gamma = 1/4$.

図 6: Nusselt 数と Rayleigh 数の関係



測定位置はセルの中心。2つのピークが存在し、ロールが複数存在することが考えられる。

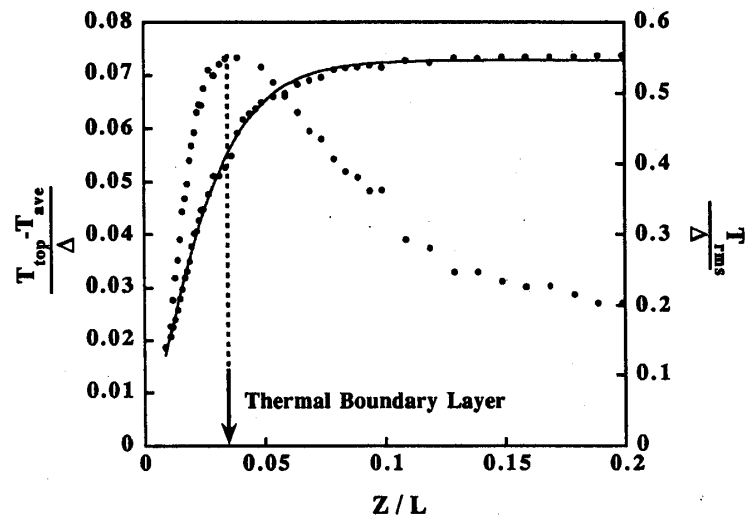
図 7: アスペクト比 2 のセルにおける温度ゆらぎ確率分布

$$Nu = 0.17 Ra^{0.26 \pm 0.02}$$

となり、指数はヘリウムのそれと比べて少し小さく、1/4に近い(図6)。アスペクト比 1/2 および 2 のセルでの指数は、それぞれ $\gamma = 0.29 \pm 0.02, 0.26 \pm 0.02$ である。指数にはアスペクト比依存性がある可能性があり、 γ の値は 1/4 から 2/7 の間でばらつきがある。しかし本研究において測定した $9.0 \times 10^4 \leq Ra \leq 2.0 \times 10^9$ の全範囲において $Nu \sim Ra^{1/2}$ は見られない。アスペクト比 2 のセルにおいては、 $Ra = 2.0 \times 10^5$ で転移がある。このセルの中心での温度ゆらぎ確率分布は2つのピークを持つ(図7)。これは対流のロールが2つ以上存在し、セルの中心で不安定に上昇流と下降流が入れ替わっているためであると考えられる。

4.2 水銀乱流中の2つの境界層の位置関係

2つのサーミスタはステッピング・モーターにより制御され、対流セル内のセンターラインに沿って上部プレートから 20mm 動くことができる。2つの境界層の空間構造は、このサーミスタの温度ゆらぎ時系列の解析により決定できる。熱境界層を決定するために、各高さでの平均温度 $\langle T_{ave}(z) \rangle$ と平均自乗偏差 $\langle T_{rms} \rangle$ を測定し、高さ z に対する、 $(T_{ave}(z) - T_{top})/\Delta$ の関係をプロットする(図8)。ここで、 T_{top} は上部プレートの平均温度で、 Δ は上部と下部のプレートの温度差である。 $(T_{ave}(z) - T_{top})/\Delta = m_1 \tanh(m_2 z/L)$ で fitting を行くと、 $\lambda_T = 1/m_2$ となる。概念的には、 λ_T は $z = 0$ 付近の温度の直線的上昇部の外挿とセルの中央付近の温度一定の部分の外挿の交点の位置である。また T_{rms}/Δ が最大値になるところがその交点の位置と一致することが知られている。速度境界層は、SF₆ の手法を用い各高さ z における温度ゆらぎパワースペクトルを測定することにより推定する。温度ゆらぎパワースペクトルの曲線がノイズレベルまで落ち込む cut off 周波数を f_h とし、高さ z と f_h の関係をプロットし(図9)、 f_h の最大値 f_{hmax} の位置が速度境界層の厚さである。 $Ra = 3.5 \times 10^7$ の場合、2つの境界層の位置を矢印で示したが、明らかに速度境界層が熱境界層の内側にあり、つまり2つの境界層は逆転している。図10は、測定した2つの境界層の位置関係が全範囲において逆転していることを示している。



$(T_{ave}(z) - T_{top})/\Delta = m_1 \tanh(m_2 z/L)$ の fitting から熱境界層の厚さ $\lambda_T = 1/m_2$ を決定する. $Ra = 3.5 \times 10^7$. $\downarrow$ が熱境界層を示す. また, T_{rms}/Δ が最大値になるところが熱境界層の位置と一致する.

図 8: 対流セル内の温度分布と平均自乗偏差

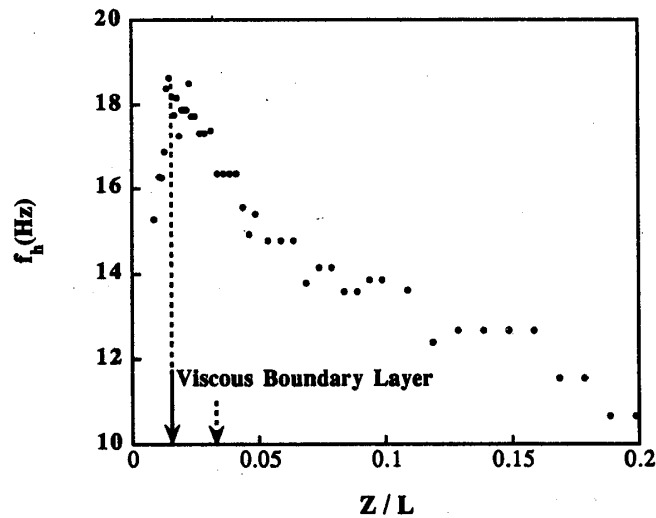
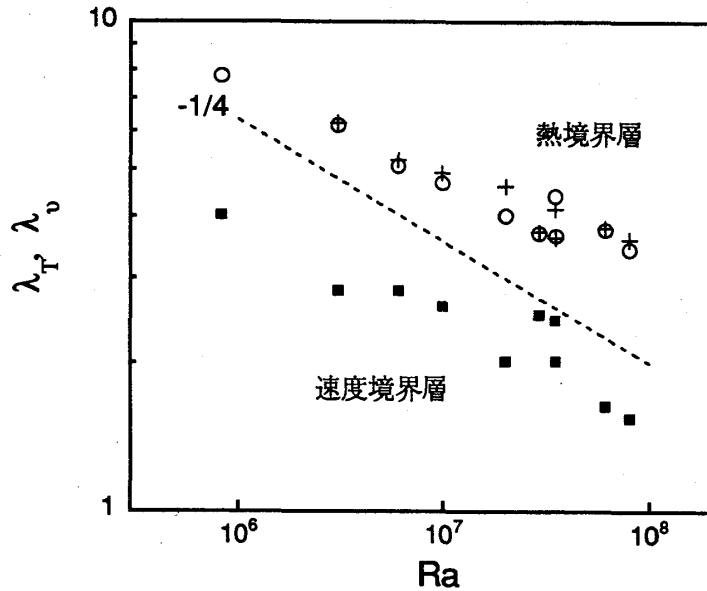


図 8 と同じ条件でのセル内の速度分布. f_h が速度に比例していると仮定する. f_h が最大になる位置は明らかに熱境界層の内側にあり 2 つの境界層は逆転している.

図 9: 高さ Z に対する cut off 周波数 f_h



アスペクト比1のセルにおいて、 $8.3 \times 10^5 \leq Ra \leq 8.0 \times 10^7$ の全範囲で速度境界層は熱境界層の内側に存在し、2つの境界層は逆転している。○、+はそれぞれ T_{ave} 、 T_{rms} から解析した λ_T 。破線は $Ra^{-1/4}$ 。

図 10: Rayleigh 数に対する2つの境界層の位置関係

5 考察

速度境界層の厚さ $\lambda_v \sim 3mm$ とすると、境界層での Reynolds 数 (Re_λ) は、 $Re_\lambda \sim 500$ と見積もられ、さらに境界層の逆転により、その内部に速度勾配が存在し、境界層が乱流化していると考えられる。このため水銀のような低 Prandtl 数流体では、乱流に特徴的な plume が境界層から安定して発生していない可能性がある。

また、低温ヘリウムの温度ゆらぎパワースペクトルにおける指数が $\xi = 1.35 \pm 0.05$ であるのに対し、水銀では $\xi = 1.58 \pm 0.09$ である。中央領域での温度ゆらぎの平均自乗偏差 θ は、全体の温度差 ΔT の約3%であり、 $Ra = 10^7$ では $\theta/\Delta T \sim 10^{-2}$ と見積もることができる。また平均流は $Ra = 10^7$ では約2cm/secである。慣性力は $|U \nabla U| \sim U^2/L$ と次元解析され、浮力と慣性力の比は、

$$\frac{\alpha g \theta}{|U \nabla U|} \sim \frac{\alpha g \theta}{\frac{U^2}{L}} \sim 10^{-2}$$

と算出される。つまり、中央領域では浮力が効かず passive scalar に近い状態になっているために、 ξ の値が1.6に近くなっている可能性がある。

最後に、Nusselt 数の Rayleigh 数に対するスケーリングは、アスペクト比1のセルは $10^6 < Ra < 10^8$ の範囲で $\gamma = 0.26 \pm 0.02$ と1/4に近い値になった。境界層が逆転しているために $\gamma = 1/2$ が期待されたが、その様な現象はまだ見られていない。仮に $\gamma = 1/4$ であるとする、この指数はどのように説明できるだろうか。図10の結果を2つの境界層が Rayleigh 数の広い範囲で Match していると解釈して、 $\lambda_T = \lambda_v$ を仮定しよう。熱境界層における Rayleigh 数 (Ra_{λ_T}) および速度境界層における Reynolds 数 (Re_{λ_v}) をそれぞれ、

$$Ra_{\lambda_T} = \frac{\alpha g \Delta T \lambda_T^3}{\kappa \nu}$$

$$Re_{\lambda_v} = \frac{U \lambda_v}{\nu}$$

と定義する。ここで無次元パラメータ G を境界層中での浮力と粘性の比として、

$$G = \frac{\alpha g \Delta T}{\nu \nabla^2 U}$$

と定義する。 $\nu \nabla^2 U \sim \nu U / \lambda_v^2$ を用い次元解析すると、

$$G \sim \frac{\alpha g \Delta T \lambda_T^3}{\kappa \nu} \times \frac{1}{\frac{U \lambda_v}{\nu} \times \frac{\nu}{\kappa}} \\ = \frac{Ra_{\lambda_T}}{Re_{\lambda_v} Pr}$$

となる。 $\lambda = \lambda_T = \lambda_v$ のスケールを決めるためには、もう一つ条件が必要である。そこで、浮力が境界層で粘性により全て散逸されるとする。つまり G が一定であるとする上式から、

$$Ra_{\lambda_T} \sim Re_{\lambda_v}$$

が導かれる。 $\lambda = \lambda_T = \lambda_v$ より、

$$\frac{\alpha g \Delta T \lambda^3}{\kappa \nu} = \frac{U \lambda}{\nu}$$

の関係と $Re \sim Ra^{1/2}$ より、

$$Ra \left(\frac{\lambda}{L} \right)^3 = Re \left(\frac{\lambda}{L} \right) = Ra^{1/2} \left(\frac{\lambda}{L} \right)$$

となり、

$$Nu \sim \frac{L}{\lambda} \sim Ra^{1/4}$$

を導出できる。

6 まとめ

水銀の熱乱流の性質を、 $9.0 \times 10^4 \leq Ra \leq 2.0 \times 10^9$ の4桁の範囲で測定した。高圧 SF_6 ガスにより詳しく測定された Hard 乱流領域の2つの境界層の位置関係とは異なり、速度境界層が熱境界層の内側に存在していた。Nusselt 数の Rayleigh 数に対するスケーリング則は、 $1/4 \leq \gamma \leq 2/7$ となり、低温ヘリウムや高圧 SF_6 ガスなどの Hard 乱流領域でみられる値と同じか少し小さい結果になった。境界層の逆転現象が見られたのにもかかわらず、 $Nu \sim Ra^{1/2}$ は確認されなかった。今後はさらに高い乱流状態を作り出し、Hard 乱流より高い状態が存在し新たなスケーリング則が見られるか否かを研究する予定である。

参考文献

- [1] A. Belmonte, A. Tilgner, and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **70**, 4067 (1993).
- [2] F. Heslot, B. Casting, and A. Libchaber, Phys. Rev. A **36**, 5870 (1987).
- [3] B. Casting, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X. Z. Wu, G. Zaleski, and G. Zanetti, J. Fluid Mech. **204**, 1 (1989).
- [4] M. Sano, X. Z. Wu, and A. Libchaber, Phys. Rev. A **40**, 6421 (1989).
- [5] X. Z. Wu, L. Kadanoff, A. Libchaber, and M. Sano, Phys. Rev. Lett. **64**, 2140 (1990).
- [6] T. H. Solomon and J. P. Gollub, Phys. Rev. Lett. **64**, 2382 (1990); Phys. Rev. A **43**, 6683 (1991).
- [7] W. V. R. Malkus, Proc. R. Soc. London A **225**, 185 (1954).
- [8] B. I. Shraiman E. D. Siggia, Phys. Rev. A **42**, 3650 (1990).
- [9] A. Kraichnan, Phys. Fluids **5**, 1374 (1962).
- [10] T. Takeshita, T. Segawa, J. G. Glazier, and M. Sano, Phys. Rev. Lett. **76**, 1465 (1996).