

二次元射影空間の、完全四角形で分岐するKummer被覆のcohomology群(II)。

織田孝幸 (新潟大学理学部) (Takayuki Oda, Niigata Univ.)

§ 0. 始めに。

野田の東京理科大学で、7月あった代数分科会で話した事に続けて書く。幾つか定義、記号が必要になるので、代数分科会の記録の一部(§ 1、2の一部)をまず再掲する。あとは§ 4からはじめる。

§ 1 (再掲)。 Kummer被覆。

$(X:Y:Z)$ を二次元射影空間 P^2 の同次座標とする。方程式：

$$XYZ(Y-Z)(Z-X)(X-Y)=0$$

で定義される直線たちの配置を考えよう。そのとき P^2 の中でこの6本の直線 $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $Y=Z$, $Z=X$, $X=Y$ の補集合を U と書く。あとで引用するために、この6本の直線に名前を付けよう。

$$\begin{aligned} l_1 : X=0, & \quad l_2 : Y=0, & \quad l_3 : Z=0 \\ l_4 : Y-Z=0, & \quad l_5 : Z-X=0, & \quad l_6 : X-Y=0. \end{aligned}$$

各 l_i は直線を示すだけでなく、それを定義する線形型式も表すとする。例えば $l_1 = X$ 等。以下、上の6本の直線上で分岐する P^2 のアーベル被覆を問題にする。

自然数 n を一つ固定する。 ζ を1の原始 n 乗根とする。

二次元複素射影空間 P^2 の関数体は $\lambda = X/Z$, $\mu = Y/Z$ とするとの複素数体 $\mathbb{C}$ 上の2変数有理関数体 $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ になる。線形型式 l_i たちの商 l_i/l_j は関数体 $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ の元になる。 $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ のKummer拡大体 K ：

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{C}(\lambda, \mu, {}^n\sqrt{\lambda}, {}^n\sqrt{\mu}, {}^n\sqrt{\lambda-1}, {}^n\sqrt{\mu-1}, {}^n\sqrt{\lambda-\mu}) \\ &= \mathbb{C}(\lambda, \mu, (l_i/l_j)^{1/n} \quad (1 \leq i, j \leq n)) \end{aligned}$$

を考える。これは体 $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ の n^5 次のアーベル拡大でそのGalois群 A は巡回群 $\mathbb{Z}/(n)$ の5個の直和に同型である。 ζ を1の原始 n 乗根とする。これをひとつ固定する。1の n 乗根の全体のなす群を μ_n と記す。群 μ_n から μ_n たち6個の直和

$\mu_n^{\otimes 6}$ への対角写像を考える。このとき剰余群 $\mu_n^{\otimes 6}/\mu_n$ によって、Galois群 $A = \text{Gal}(K/\mathbb{C}(\lambda, \mu))$ の表示を次のように与える：

$\sigma \in A$ に対して元 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6) \bmod \mu_n$ を
 $\sigma((1_i/1_j)^{1/n}) = \xi_i/\xi_j (1_i/1_j)^{1/n} \quad (\xi_i \in \mu_n \quad (1 \leq i \leq 6))$
 によって定める。

A^* を A の指標群とする。これを次のようにして表示する。

$$A^* = \{ (a_1, a_2, \dots, a_6) \in \mathbb{Z}^6 \mid 0 \leq a_i < n, \sum_{i=1}^6 a_i \equiv 0 \pmod{n} \}$$

A^* と右辺の集合の同一視は次のようにして行う：

A^* の元 $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ が与えられているとき、これに対応する $\alpha: A \rightarrow \mathbb{C}^*$ は $\sigma = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6) \bmod \mu_n \in A$ に対して

$$\alpha(\sigma) = \prod_{i=1}^6 \xi_i^{a_i} \in \mu_n \subset \mathbb{C}^*$$

2次元複素射影空間 P^2 は $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ の一つのmodelを定める。これの K の中で正規化を X_n' と記す。 X_n' の minimal-resolution を X_n と書く。 X_n は非特異極小モデルである。 A は X_n' に双正則に作用する、従って X_n の普遍性から X_n の双正則写像としても作用する。 X_n の cohomology 群を考える。

$H^i(X_n, \mathbb{C})$ を X_n の i 次元複素係数 cohomology 空間とする。 A の各指標 α に対して $H^i(X_n, \mathbb{C})$ の部分空間 $H^i(\alpha)$ を

$$H^i(\alpha) = \{ \omega \in H^i(X_n, \mathbb{C}) \mid \sigma^*(\omega) = \alpha(\sigma)(\omega), \quad \sigma \in A \}$$

で定義する。 X_n は円分体 $Q(\zeta)$ 上の自然なmodelを持ち、群 A の作用も $Q(\zeta)$ 上定義されている。 X_n の 1-進 cohomology 群 $H^i(X_n, Q_\ell)$ についても同様に、部分空間 $H^i_\ell(\alpha)$ を定義する。明らかに

$$H^i(X_n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\alpha \in A^*} H^i(\alpha), \quad H^i(X_n, Q_\ell) = \bigoplus_{\alpha \in A^*} H^i_\ell(\alpha)$$

という分解がある。

(1.1) 定義。 A^* の元 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_6)$ を考える。

(i) α が L -generic であるとは各 i ($1 \leq i \leq 6$) に対して $a_i \not\equiv 0 \pmod{n}$ が成り立つときをいう。

(ii) α が P-generic であるとは、4 個の各 3 重点 $p_j (1 \leq j \leq 4)$ それぞれに対して、それに交わる 3 本の直線を l_u, l_v, l_w とするとき a_u, a_v, a_w に対して

$$a_u + a_v + a_w \equiv 0 \pmod{n}$$

が成り立つときをいう。

(iii) α が L-generic かつ P-generic のとき、 α を generic という。

§ 2 (再掲) 次元公式。

(2.1) 定理 (河野 [K]) α を A の generic な指標とせよ。このとき

もし $i \neq 2$ ならば、 $H^i(\alpha) = H^{i+1}(\alpha) = \{0\}$ で、

もし $i = 2$ ならば、 $\dim H^2(\alpha) = \dim H^2_1(\alpha) = 2$ 。

以下、 α が generic であってある対称性をもつとき、2 次元 ℓ -進表現

$$\rho(\alpha) : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta)) \rightarrow \text{Aut}(H^2_\ell(\alpha))$$

を問題にする。

§ 4. 自己同型群。

$U = \mathbb{P}^2 - \{XYZ(X-Y)(Y-Z)(Z-X) = 0\}$ の自分自身への双正則な写像全体のなす群 $\text{Aut}(U)$ を求めよう。

命題。 $\text{Aut}(U)$ は 5 次対称群と同型である。

(証明) cf. 若林功 [W]。なを山崎-吉田[Y-Y]も見よ。

$\text{Aut}(U)$ の表示を与える。

$\text{Aut}(U)$ の元 $\sigma, \alpha, \beta, \gamma$ を関数体 K への作用で与えることにし

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda) &= 1/\lambda & ; & \quad \sigma(\mu) = 1/\mu \\ \alpha(\lambda) &= \lambda/(\lambda-1) & ; & \quad \alpha(\mu) = (\lambda-\mu)/(\lambda-1) \end{aligned}$$

$$\beta(\lambda) = (-\lambda) / (\mu - 1) \quad ; \quad \beta(\mu) = \mu / (\mu - 1)$$

$$\gamma(\lambda) = -\lambda + 1 \quad ; \quad \gamma(\mu) = -\mu + 1$$

と定める。するとこれら4個の元は何れも位数2で $\sigma\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma$ の位数は3となる。表示：

$$\sigma^2 = \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1 \quad ; \quad (\sigma\alpha)^3 = (\alpha\beta)^3 = (\beta\gamma)^3 = 1。$$

は5次対称群 S_5 の生成元と基本関係式である。

F を、 P^2 の上で定めた直線配置の4個の3重点をblowing-upして得られる代数曲面とすると U の自己同型 $\tau: U \rightarrow U$ は自然に F の自己同型 $\tau: F \rightarrow F$ に延びる(同じ記号で書く)。 $\pi_1(U \times \bar{Q}, *)$ を $\bar{Q}$ のgeometric fundamental groupとすれば、 τ は $\pi_1(U \times \bar{Q}, *)$ の内部自己同型をmoduloとして自然に定まる自己同型：

$$\pi_1(\tau) : \pi_1(U \times \bar{Q}, *) \rightarrow \pi_1(U \times \bar{Q}, *)$$

を誘導し、さらにそのアーベル化の自己同型：

$$\pi_1(\tau)^{ab} : \pi_1(U \times \bar{Q}, *)^{ab} \rightarrow \pi_1(U \times \bar{Q}, *)^{ab}$$

を誘導する。

さて $p: X_n \rightarrow F$ というfinite morphismを考える。 $\bar{Q}_\ell$ の p によるdirect image $p_* \bar{Q}_\ell$ は A の自然な作用をもち、それによって固有成分に分けると、分解：

$$p_* \bar{Q}_\ell = \bigoplus L(\alpha)$$

$$\alpha \in A^*$$

を得る。ここで $L(\alpha)$ は U に制限するとrank 1のsmooth $\bar{Q}_\ell$ sheafになる。これに対応する $\pi_1(U \times \bar{Q}, *)$ の表現を

$$R(\alpha) : \pi_1(U \times \bar{Q}, *) \rightarrow \text{Aut}(\bar{Q}_\ell) \cong \bar{Q}_\ell^*$$

と書く。 $R(\alpha)$ は $\pi_1(U \times \bar{Q}, *)^{ab}$ から $\bar{Q}_\ell^*$ への準同型ともみなせ、

$$R(\alpha) \pi_1(\tau)^{ab} = R(\beta)$$

となる指標 $\beta \in A^*$ が存在する。このとき α に対する ℓ -進表現と、 β に対する ℓ -進表現とは同型になる。

次節で $\alpha = \beta$ となるときを調べる。

§ 5. genericで対称な指標について。

この節ではgenericな指標 α に対しても、それがある対称性を持てば、対応する1-進表現はabelianであることを示す。de Rhamコホモロジー群のときの土屋-蟹江[T-K]の議論がそのままここで通用する。念のため説明する。

定義. $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ が狭義の対称指標であるとは

$$a_1 = a_2 \quad \text{かつ} \quad a_3 = a_4$$

であるときをいう。

前節でさだめた U 上のrank 1のsmooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sheaf $L(\alpha)$ を思い出す。 α が上でいう対称性をもつとき、 τ を関数体への作用：

$$\tau(\lambda) = \mu, \quad \tau(\mu) = \lambda$$

で定まる U の自己同型とすると

$$(\#): \quad R(\alpha) \pi_1(\tau)^{\text{ab}} = R(\alpha).$$

τ は U に固定点なしで作用するから自然なmorphism

$$\pi: U \rightarrow U / \langle \tau \rangle$$

は不分岐な被覆である。さて

$$1 \rightarrow \pi_1(U \times \overline{\mathbb{Q}}, *) \rightarrow \pi_1(U / \langle \tau \rangle \times \overline{\mathbb{Q}}, *) \rightarrow \langle \tau \rangle \rightarrow 1$$

という完全列から $(\#)$ によって $R(\alpha)$ を延長する表現

$$R'(\alpha): \pi_1(U / \langle \tau \rangle \times \overline{\mathbb{Q}}, *) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^*$$

が得られ、これに対応する $U / \langle \tau \rangle$ のsmooth $\mathbb{Q}_\ell$ -sheafを $M(\alpha)$ とすれば

$$\pi^* M(\alpha) = L(\alpha).$$

さて $\chi(U, L(\alpha))$ を

$$\chi(U, L(\alpha)) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(U \times \overline{\mathbb{Q}}, L(\alpha))$$

で定めると、 α がgenericであるから、 $\chi(U, L(\alpha)) = 2$ である。

$$\chi(U, L(\alpha)) = \{\text{rank } L(\alpha)\} \chi(U, \mathbb{Q}_\ell)$$

に注意して

$$\chi(U / \langle \tau \rangle, M(\alpha)) = 1.$$

従ってLerayのspectral sequenceより

$$H^2(U / \langle \tau \rangle \times \overline{\mathbb{Q}}, M(\alpha))$$

は1次元。よって

$$\pi \cdot L(\alpha) = M(\alpha) \oplus M'(\alpha)$$

となる $U/\langle \tau \rangle$ の rank 1 の $\mathbb{Q}_\ell$ -sheaf $M'(\alpha)$ が存在する。

$H^2_\ell(\alpha) = H^2(U \times \bar{\mathbb{Q}}, L(\alpha))$ に注意して、 $H^2_\ell(\alpha)$ が $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\xi))$ 不変な2つの rank 1 の部分空間に分解することが分かる。 $\mathbb{Q}(\xi)$ の最大アーベル拡大を $\mathbb{Q}(\xi)^{ab}$ と書く。まとめて次を得る。

命題(5.1) α が generic で上の様な対称性を持つとする。このとき α に対応する ℓ -進表現

$$\rho(\alpha) : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\xi)) \rightarrow \text{Aut}(H^2_\ell(\alpha))$$

は1次元の部分表現の直和に分解する。特にこれはabelianな ℓ -進表現である。つまり $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)^{ab}/\mathbb{Q}(\xi))$ を通して $\rho(\alpha)$ は分解する。

注意1。対称で generic な α に対応する Hodge 構造は Selberg 積分 (cf [S]) で記述できるはずであるが、まだはっきりしない部分があるのでべつに論ずる。

注意2。対称で generic な α の個数を求めることもできるが省略する。

§6. 例

$n=2$ のとき、 X_2 は K3 曲面で, singular、つまり代数 cycles が 20 次元有る。generic な指標 α は 1 個しかなく、これは対称である。

$n=3$ のとき、generic な α は 12 個で symmetric なものなし。 $H_2(\alpha)$ の Hodge-type は全て $(1,0,1)$ である。

$n=4$ のとき、generic な α は全部で 93 個ある。Hodge type をみると、 $(1,0,1)$ 型が 73 個、 $(0,1,1)$ と $(1,1,0)$ 型がそれぞれ 10 ずつある。 $(0,1,1)$ 型と $(1,1,0)$ 型は全て対称である。

$n=5$ のとき。[Y-Y] と関連するので、別の機会に論じたい。

上の例からみれば、 $H^2(\alpha)$ には α が generic なとき、代数サイクルはないように思われる。

文献表。

- [H] Hirzebruch, F: Arrangements of lines and algebraic surfaces
Progress in math. 36, Arithmetic and Geometry. 1983.
- [I] 石田正典: The irregularities of Hirzebruch's examples of surfaces
of general type with $c_1^2=3c_2$. Math. Ann. 262, 407-420 (1983)
- [K] 河野俊丈: Homology of a local system on the complement of
hyperplanes. Preprint, 1986.
- [Sa] 斉藤秀司: General fixed point formula for an algebraic surface and
the theory of Swan representations for two-dimensional local rings
- [Sh] 塩田徹治: Fermat hypersurfaces に関する一連の論文。
Math. Annalen 等を見よ。
- [S] Selberg, A: Bemerkninger om et multipelt integral.
Norsk Mat. Tidsskr., 26, 71-78 (1944)
- [T-K] 土屋昭博、蟹江 穠: Fock space representation of the Virasoro algebra
-Intertwining operators. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22, 259-327 (1986)
- [Y-Y] 山崎正, 吉田正章: On Hirzebruch's examples of surfaces with $c_1^2=3c_2$.
Math. Ann. 226, 421-431 (1984).
- [W] 若林功: $P^2 - \{\text{curves}\}$ の automorphism group