

常微分不等式に対する加藤の補題の改良と 半線形波動方程式への応用

高村博之 (Hiroyuki Takamura)

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・複雑系知能学科

Department of Complex and Intelligent Systems,

Faculty of Systems Information Science, Future University Hakodate

概要

初期値問題の古典解の存在時間を下から評価することを目的とした、単独非線形波動方程式の一般論は最近になって完成した。その最適性を保証するために解析されているモデル方程式の 1 つで、未知関数自身のべき乗型非線形項をもつ方程式を考察する。劣臨界ベキに対する解の最大存在時間の上からの最適評価は、常微分不等式に対する加藤の補題と解のリスケーリングの議論を用いると、有限時間爆発の証明からただちに得られると思われてきた。そのため、特に、高次元のときのその結果に関する論文は存在しない。

しかしながら、実際に証明を詳細に行うと、カバーすべき論理の微小な飛びが見つかる。本稿ではそれを加藤の補題を改良することによって埋めることができ、しかも解のリスケーリングの議論が不要になることを報告したい。基本的に著者による最近の論文 [14] の主要部分を解説し、そこには詳細に書かなかったリスケーリングの議論にも言及する。最後にスケール不変な消散型波動方程式への応用にも触れる。

1 背景と目的

単独非線形波動方程式に対する一般論は、一般的なベキ型非線形項をもつ方程式に小さい初期値を与えた初期値問題の古典解が、その小ささに応じてどれだけ長く存在できるか、という疑問に答えるものである。その一般論の構成は 1980 年初頭に始まり 1995 年にはほとんど完成したが、その最適性を証明し終わったのは、2014 年と最近のことである。詳しくは Takamura & Wakasa [16] を参照のこと。

ここでは、その最適性を保証するために解析され続けた、次の特別なモデル方程式に対する初期値を考える。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^p & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x, 0) = \varepsilon g(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで $\varepsilon > 0$ は十分小さいパラメータ、 f, g は共に台コンパクトで滑らかな $\mathbf{R}^n$ 上の与えられた関数とする。(1.1) の解の最大存在時間、いわゆるライフスパン $T(\varepsilon)$ を次で定義する。

$$T(\varepsilon) = \sup\{t > 0 : \text{任意に固定された } (f, g) \text{ に対して、(1.1) の解 } u(x, t) \text{ が存在する}\}$$

ここで解の意味は、 $p \geq 2$ のときは古典解で、 $1 < p < 2$ のときは、(1.1) の弱解や同値な積分方程式の適切な滑らかさをもった解とする。後者は乱雑な記述であるが、その辺りの詳細な議論は、例えば、Sideris [12] や Georgiev & Takamura & Zhou [3] に見ることができる。

以下、このライフスパンに関する歴史を概観する。 $n = 1$ のときは、Kato [7] によって $p > 1$ ならば $T(\varepsilon) < \infty$ となることが示された。本稿で鍵となる加藤の補題とは、この論文に出現した命題のことである。 $n \geq 2$ のときは、Strauss [13] による、いわゆる次の Strauss 予想が与えられた。

$$\begin{aligned} p > p_0(n) \text{ かつ、} \varepsilon \text{ が十分小ならば} & \quad T(\varepsilon) = \infty \quad (\text{時間大域存在}) \\ 1 < p \leq p_0(n) \text{ かつ、ある意味で初期値が正ならば} & \quad T(\varepsilon) < \infty \quad (\text{有限時間爆発}) \end{aligned}$$

ここで $p_0(n)$ は Strauss 指数と呼ばれ、2 次方程式 $\gamma(p, n) = 0$ 、

$$\gamma(p, n) := 2 + (n+1)p - (n-1)p^2 \quad (1.2)$$

の正根で定義される数である。具体的には

$$p_0(n) = \frac{n+1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7}}{2(n-1)} \quad (1.3)$$

となる。この $p_0(n)$ は空間次元 n に関して単調減少であることに注意する。Strauss 予想の部分的な証明は色々あるが、各次元によって分類されたそれぞれの部分での最終的な結果は、以下のように表にまとめることができる。

	$p < p_0(n)$	$p = p_0(n)$	$p > p_0(n)$
$n = 2$	Glassey [4]	Schaeffer [11]	Glassey [5]
$n = 3$	John [6]	Schaeffer [11]	John [6]
$n \geq 4$	Sideris [12]	Yordanov & Zhang [18] Zhou [23] (これらは独立)	Georgiev & Lindblad & Sogge [2]

有限時間爆発、つまり劣臨界ベキや臨界ベキ $1 < p \leq p_0(n)$ の場合、 $T(\varepsilon)$ の ε による詳細な評価が望まれる。以下では c や C は ε に無関係な正定数とする。 $n = 1$ のときは、Zhou [19] によって任意の $p > 1$ に対して

$$\begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-(p-1)/2} & \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0, \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

が、また、特に $p = 2$ のときは Lindblad [9] によって更に詳しく

$$\begin{cases} \exists \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{1/2} T(\varepsilon) > 0 & \text{for } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0, \\ \exists \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{2/3} T(\varepsilon) > 0 & \text{for } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

が得られている。Lindblad [9] は同時に $(n, p) = (2, 2)$ に対しても

$$\begin{cases} \exists \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} a(\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon) > 0 & \text{for } \int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx \neq 0, \\ \exists \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon T(\varepsilon) > 0 & \text{for } \int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

を得ている。ここで、 $a = a(\varepsilon)$ は次をみたす数である。

$$a^2 \varepsilon^2 \log(1 + a) = 1 \quad (1.7)$$

$1 < p < p_0(n)$ ($n \geq 3$) または $2 < p < p_0(2)$ ($n = 2$) のときには、次のような評価が予想されている。

$$c\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)} \quad (1.8)$$

ここで $\gamma(p, n)$ は (1.2) で定義されたものである。 $n = 1$ に対しても $\gamma(p, n)$ を (1.2) で定義するなら、(1.8) は (1.4) の第 2 行目と一致していることに注意する。部分的な結果を飛ばしたこの予想に関する各部分の最終結果は、以下の表のようになる。

	$T(\varepsilon)$ の下からの評価 (存在)	$T(\varepsilon)$ の上からの評価 (爆発)
$n = 2$	Zhou [21]	Zhou [21]
$n = 3$	Lindblad [9]	Lindblad [9]
$n \geq 4$	Lai & Zhou [8]	$T(\varepsilon) < \infty$ を示した Sideris [12] と 解のリスケーリングの議論

表中、 $n = 2, 3$ のときには、もっと強い結果

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{2p(p-1)/\gamma(p,n)} T(\varepsilon) > 0$$

が得られていることに注意する。次節では、 $n \geq 4$ の上から評価の証明方法とそこにある微小な論理の飛びを紹介する。解のリスケーリングの議論は、元々未出版論文 Zhou [22] で紹介されており、Georgiev & Takamura & Zhou [3] で系に、Zhou & Han [24] で初期境界値問題に拡張する際に使われている。

$p = p_0(n)$ のときには、次のような予想がある。

$$\exp\left(c\varepsilon^{-p(p-1)}\right) \leq T(\varepsilon) \leq \exp\left(C\varepsilon^{-p(p-1)}\right) \quad (1.9)$$

これに関しても、以下のような表がある。

	$T(\varepsilon)$ の下からの評価 (存在)	$T(\varepsilon)$ の上からの評価 (爆発)
$n = 2$	Zhou [21]	Zhou [21]
$n = 3$	Zhou [20]	Zhou [20]
$n \geq 4$	Lindblad & Sogge [10] : $n \leq 8$ または球対称解	Takamura & Wakasa [15]

本稿の主結果に至った動機は、20 年以上未解決だった一般論の最適性を含む表中 [15] の結果を導いたとき、臨界指数関係をもった加藤の補題を改良したことが解決のきっかけのひとつだったことにある。

2 加藤の補題とリスケーリングの議論

まず、Kato [7] にある加藤の補題を、半線形波動方程式に適用できるように改良した Sideris [12] による変形版を紹介する。これは Glassey [4] で使われた議論の指数を一般化したものである。

補題 2.1 (Lemma 4 in Sideris [12]) 各指数 $p > 1, a \geq 1, q > 0$ は次の関係をみたすとする。

$$M := \frac{p-1}{2}a - \frac{q}{2} + 1 > 0 \quad (2.1)$$

また、 $F \in C^2([S, T))$ は $S \leq t < T$ に対して

$$F(t) \geq A(t+R)^a, \quad (2.2)$$

$$F''(t) \geq B(t+R)^{-q}|F(t)|^p \quad (2.3)$$

をみたすとする。ここで、各 A, B, R は正定数である。このとき、 $T < \infty$ である。

注意 2.1 Kato [7] における元々の加藤の補題は、 $S = 0$ として、(2.2) の代わりに $F'(0) > 0$ としたものである。その場合は、 $F''(t) \geq 0$ によって、 t を十分大きくすると $F(t) \geq At$ が得られる。つまり、(2.1) で $a = 1$ としたものしか使えないため、(2.3) は常に $q = n(p-1)$ として適用するから、 $n = 1$ の場合にのみしか最適な結果が得られていなかった。そこを Glassey [4] は波動方程式の解の評価を用いて、 a を 1 より真に大きくして最適な結果を得ている。

さて、この補題の証明は原論文 [12] を参照することとして、まずは目標の定理を先に述べる。

定理 1 $1 < p < p_0(n)$, $n \geq 4$ とする。 $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$ と $g(\neq 0) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ は共に非負値で、それらの台はコンパクトとする。更に、(1.1) が

$$\text{supp}(u, u_t) \subset \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty) : |x| \leq t + R\}. \quad (2.4)$$

をみたすような解 $(u, u_t) \in C([0, T(\varepsilon)), H^1(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n))$ をもつとする。このとき、正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, n, p, R)$ が存在して、解のライフスパン $T(\varepsilon)$ は次の不等式をみたす。

$$T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)} \quad \text{for } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (2.5)$$

ここで C は ε に無関係な正定数である。

証明 まず

$$F(t) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x, t) dx$$

とおくと、初期値の仮定から直ちに

$$F(0) = \varepsilon \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \geq 0, \quad F'(0) = \varepsilon \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx > 0 \quad (2.6)$$

が得られる。また、解の仮定から、Sideris [12] の (13)-(15) にある議論そのもので

$$F''(t) = \int_{\mathbf{R}^n} |u(x, t)|^p dx \geq \frac{|F(t)|^p}{\left(\int_{|x| \leq t+R} 1 dx \right)^{p-1}}$$

となる。従って、(2.3) は

$$B = \left(\int_{|x| \leq 1} dx \right)^{1-p} > 0, \quad q = n(p-1) > 0 \quad (2.7)$$

として、すべての $t \geq 0$ に対して成立していることがわかる。

鍵となる不等式 (2.2) を得るため、次の命題を援用する。

命題 2.1 定理 1 の仮定がすべて満たされているとする。このとき、次の不等式が成立するような正定数 $C_1 = C_1(f, g, n, p, R)$ が存在する。

$$F''(t) \geq C_1 \varepsilon^p t^{(n-1)(1-p/2)} \quad \text{for } t \geq R \quad (2.8)$$

注意 2.2 この命題は Yordanov and Zhang [18] における (2.5') を僅かに変えただけである。ここでは、 $f(x) \equiv 0$ のとき $C_1 = 0$ となってしまうが、これを以下のように回避することができる。

命題 2.1 の証明 [18] の Lemma 2.2 によって

$$F_1(t) \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2R}) \int_{\mathbf{R}^n} \{\varepsilon f(x) + \varepsilon g(x)\} \phi_1(x) dx \quad \text{for } t \geq R$$

が従う。ここで、

$$\phi_1(x) = \int_{S^{n-1}} e^{x \cdot \omega} d\omega \quad \text{and} \quad F_1(t) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x, t) \phi_1(x) e^{-t} dx.$$

である。この不等式と [18] にある (2.4) を組み合わせると、容易に (2.8) が従う。 $\square$

定理 1 の証明の続き (2.8) を区間 $[R, t]$ で積分すると、

$$1 < p < p_0(n) < \frac{2n}{n-1}$$

が成立しているから、

$$F'(t) \geq \frac{C_1}{n - (n-1)p/2} \varepsilon^p \left(t^{n-(n-1)p/2} - R^{n-(n-1)p/2} \right) + F'(R) \quad \text{for } t \geq R$$

が得られる。先に示した (2.3) から、 $t \geq 0$ に対し $F''(t) \geq 0$ であることと初期値の仮定による $F'(0) > 0$ を合わせると、 $F'(R) > 0$ が従うことに注意する。以上により

$$F'(t) > \frac{C_1 (1 - 2^{-n+(n-1)p/2})}{n - (n-1)p/2} \varepsilon^p t^{n-(n-1)p/2} \quad \text{for } t \geq 2R \quad (2.9)$$

を得る。これを区間 $[2R, t]$ で積分し、初期値の仮定によるもう 1 つの事実 $F(0) \geq 0$ を用いると

$$F(t) > C_2 \varepsilon^p (t + R)^{n+1-(n-1)p/2} \quad \text{for } t \geq 4R \quad (2.10)$$

が得られる。ここで

$$C_2 := \frac{C_1 (1 - 2^{-n+(n-1)p/2}) (1 - 2^{-n-1+(n-1)p/2})}{2^{n+1-(n-1)p/2} \{n - (n-1)p/2\} \{n+1 - (n-1)/2\}} > 0$$

とした。これで (2.7) に加え

$$a = n + 1 - \frac{n-1}{2}p > 1, \quad A = C_2 \varepsilon^p$$

として補題 2.1 を使う準備が出来た。

リスケーリングの議論とその不足部分 ここで $\tau = t \varepsilon^{2p(p-1)/(4M)}$ なる変数変換を考え

$$G(\tau) := \varepsilon^{2p(q-2)/(4M)} F(\varepsilon^{-2p(p-1)/(4M)} \tau)$$

で新たな関数 G を定義する。また、(1.2) より

$$4M = 2(p-1) \left(n+1 - \frac{n-1}{2}p \right) - 2n(p-1) + 4 = \gamma(p, n) > 0$$

であることに注意する。このとき、 $G(\tau)$ は次の不等式をみたす。

$$\begin{aligned} G(\tau) &\geq C_2 (\tau + \varepsilon^{2p(p-1)/(4M)} R)^a && \text{for } \tau \geq 4R\varepsilon^{2p(p-1)/(4M)}, \\ G''(\tau) &\geq B(\tau + \varepsilon^{2p(p-1)/(4M)} R)^{-q} |G(\tau)|^p && \text{for } \tau \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、一般性を失うことなく $0 < \varepsilon \leq 1$ と仮定して良いから、

$$\begin{aligned} G(\tau) &\geq 2^{-a} C_2 (\tau + R)^a && \text{for } \tau \geq 4R, \\ G''(\tau) &\geq B(\tau + R)^{-q} |G(\tau)|^p && \text{for } \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

が得られることがわかる。従って、補題 2.1 によって、ある正定数 T が存在して $\tau \leq T < \infty$ となる。つまり、 $t \leq T\varepsilon^{-2p(p-1)/(4M)}$ となって定理の証明が終わるかのようと思われる。

ところが、

$$\begin{aligned} G(0) &= \varepsilon^{2p(q-2)/(4M)} F(0) = \varepsilon^{2p(q-2)/(4M)+1} \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}, \\ G'(0) &= \varepsilon^{2p(q-p-1)/(4M)} F'(0) = \varepsilon^{2p(q-p-1)/(4M)+1} \|g\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

であるから、補題 2.1 の結論にある T が、 ε に関して一様な有界性を持ってはいくなくてはならない。それは、補題 2.1 において元々の加藤の補題のように $S=0$ かつ $F'(0) > 0$ と更に仮定してから、丁寧にその証明を追えば容易に埋めることができる。しかし、次節で示すように、その際には T の (2.2) における A とそれが成立する最低時刻に対する依存度が精密にわかり、結果として上に記した解のリスケーリングの議論は不要になる。

3 改良型加藤の補題とライフスパンの評価

今度は補題 2.1 の代わりに次の補題を用いる。

補題 3.1 $p > 1, a > 0, q > 0$ は (2.1) をみたすものとする。更に $F \in C^2([0, T))$ が

$$F(t) \geq At^a \quad \text{for } t \geq T_0, \quad (3.1)$$

$$F''(t) \geq B(t+R)^{-q} |F(t)|^p \quad \text{for } t \geq 0, \quad (3.2)$$

$$F(0) \geq 0, F'(0) > 0, \quad (3.3)$$

をみたしているとする。ここで A, B, R, T_0 はすべて正定数である。このとき、ある正定数 $C_0 = C_0(p, a, q, B)$ が存在して、

$$T_1 := \max \left\{ T_0, \frac{F(0)}{F'(0)}, R \right\} \geq C_0 A^{-(p-1)/(2M)}. \quad (3.4)$$

である限りは次の評価が成立する。

$$T < 2^{2/M} T_1 \quad (3.5)$$

証明 (3.2) と (3.3) によって $F'(t) \geq F'(0) > 0$ であるから、

$$F(t) \geq F'(0)t + F(0) \geq F(0) \geq 0 \quad \text{for } t \geq 0 \quad (3.6)$$

が従う。このとき、(3.2) の両辺に $F'(t) > 0$ を掛けると

$$\left(\frac{1}{2} F'(t)^2 \right)' \geq B(t+R)^{-q} F(t)^p F'(t) \quad \text{for } t \geq 0.$$

が得られる。これと (3.6) によって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F'(t)^2 &\geq \frac{1}{2} F'(0)^2 + B(t+R)^{-q} \int_0^t F(s)^p F'(s) ds \\ &> \frac{B}{p+1} (t+R)^{-q} \{F(t)^{p+1} - F(0)^{p+1}\} \\ &\geq \frac{B}{p+1} (t+R)^{-q} F(t)^p \{F(t) - F(0)\} \end{aligned}$$

がすべての $t \geq 0$ に対して成立することがわかる。

もし $F(0) > 0$ ならば、 $t \geq F(0)/F'(0)$ と仮定する。これは $F(t) \geq 2F(0)$ を意味するから

$$F'(t) > \sqrt{\frac{B}{p+1}} (t+R)^{-q/2} F(t)^{(p+1)/2} \quad \text{for } t \geq \frac{F(0)}{F'(0)}$$

が得られる。これは $F(0) = 0$ の場合にも成立していることは自明である。

以下、 $t \geq T_1$ と仮定する。このとき、(3.1) を以下のように使う。 δ を $0 < \delta < (p-1)/2$ となるように取ると

$$\begin{aligned} \frac{F'(t)}{F(t)^{1+\delta}} &> 2^{-q/2} \sqrt{\frac{B}{p+1}} t^{-q/2} F(t)^{(p-1)/2-\delta} \\ &> 2^{-q/2} \sqrt{\frac{B}{p+1}} A^{(p-1)/2-\delta} t^{M-1-\delta a} \end{aligned}$$

がすべての $t \geq T_1$ に対して成立する。これを区間 $[T_1, t]$ で積分すると、

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{F(T_1)^\delta} - \frac{1}{F(t)^\delta} \right) > 2^{-q/2} \sqrt{\frac{B}{p+1}} A^{(p-1)/2-\delta} \int_{T_1}^t s^{M-1-\delta a} ds$$

が得られる。ここで左辺の第二項を取って、 δ を更に

$$0 < \delta < \min \left(\frac{p-1}{2}, \frac{M}{2a} \right)$$

をみたすように取り直すと、

$$\frac{1}{\delta F(T_1)^\delta} > 2^{-q/2} \sqrt{\frac{B}{p+1}} A^{(p-1)/2-\delta} \frac{t^{M-\delta a} - T_1^{M-\delta a}}{M-\delta a}$$

がすべての $t \geq T_1$ に対して成立することがわかる。このとき、(3.1) で $t = T_1$ としたものを用いると

$$\frac{1}{T_1^{\delta a}} \left(\frac{2^{-q/2}}{M-\delta a} \sqrt{\frac{B}{p+1}} A^{(p-1)/2} T_1^M + \frac{1}{\delta} \right) > \frac{2^{-q/2}}{M-\delta a} \sqrt{\frac{B}{p+1}} A^{(p-1)/2} t^{M-\delta a}$$

がすべての $t \geq T_1$ に対して成立することがわかる。もし、更に

$$\frac{2^{-q/2}}{M - \delta a} \sqrt{\frac{B}{p+1}} A^{(p-1)/2} T_1^M \geq \frac{1}{\delta}$$

つまり、

$$C_0 := \left(\frac{2^{-q/2} \delta}{M - \delta a} \sqrt{\frac{B}{p+1}} \right)^{-1/M} > 0$$

とおくと、(3.4) は常にみたされ、結論の $2T_1^{M-\delta a} > t^{M-\delta a}$ 、従って

$$2^{2/M} T_1 > 2^{1/(M-\delta a)} T_1 > t$$

を得る。 $\square$

定理 1 の再証明 まず、前節で証明した (2.6)、(2.7)、(2.10) はすべてそのまま使えることに注意する。つまり、補題 3.1 の仮定を

$$A = C_2 \varepsilon^p, \quad B = \left(\int_{|x| \leq 1} dx \right)^{1-p}, \quad a = n+1 - \frac{n-1}{2}p, \quad q = n(p-1)$$

としてみたしており、再び (2.1) によって

$$M = \frac{p-1}{2}a - \frac{q}{2} + 1 = \frac{\gamma(p, n)}{4} > 0$$

であることに注意する。一番重要な T_0 の決め方は

$$T_0 = C_0 A^{-(p-1)/(2M)} = C_0 C_2^{-2(p-1)/\gamma(p, n)} \varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p, n)} \quad (3.7)$$

とおけばよい。なぜなら、このとき、正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, n, p, R) > 0$ が存在して

$$T_0 \geq \max \left\{ \frac{F(0)}{F'(0)}, 4R \right\} \quad \text{for } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

となるからである。これは、 $F(0)/F'(0)$ が ε に依存していないことから可能である。従って、(3.4) で $T_1 = T_0$ となり、補題 3.1 の結論から、 $F(t)$ の最大存在時間 T は

$$T(\varepsilon) \leq T \leq C_3 \varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p, n)} \quad \text{for } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

をみtas。ここで

$$C_3 := 2^{8/\gamma(p, n)} C_0 C_2^{-2(p-1)/\gamma(p, n)} > 0$$

とした。 $\square$

注意 3.1 前節の最後で不明だった補題 2.1 と解のリスケーリングの議論を用いるときに必要な T の ε に関する一様有界性は、補題 3.1 と (2.12) から次のようにしてわかる。 $0 < \varepsilon \leq 1$ のとき

$$\frac{G(0)}{G'(0)} = \varepsilon^{2p(p-1)/(4M)} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}}{\|g\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}} \leq \frac{\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}}{\|g\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}}$$

が成立するので、(2.11) と (3.4) を見ると

$$T_0 = \max \left\{ \frac{\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}}{\|g\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}}, 4R, C_0 (2^{-a} C_2)^{-(p-1)/(2M)} \right\}$$

とすれば $T < 2^{2/M} T_0$ が従う。

注意 3.2 定理 1 は、その証明を追うと $1 < p < p_0(n)$ かつ $n = 2, 3$ でも成立していることがわかる。ただし、(1.6) と比較すると、 $n = 2$ のときは $p = 2$ で最適でなく、また $1 < p < 2$ のときの最適性は不明である。この部分は、原論文 Takamura [14] で解析されており、(2.8) より良い評価を示すことによって、 $p = 2$ のときの最適性が示され、 $1 < p < 2$ のときの最適評価の予想が与えられている。更に [14] では、 $n = 1$ のときにも (1.4) と同じライフスパンの上からの評価を容易に導けることを、少し特別な初期値に対して示している。

また、 $n = 1, 2$ のときは、(1.4) や (1.6) と比較すると、 $f(x) \geq 0 (\neq 0)$ かつ $g(x) \equiv 0$ の場合にも定理 1 と同じ結論を得る必要があるが、それは $F(0) > 0$ かつ $F'(0) = 0$ に対して改良型加藤の補題を作れば解消できる。ただし、その場合、ある $t_0 > 0$ が存在して、 $F(t_0) \geq 2F(0)$ となっていることを余計に仮定する必要が出てくる。詳しくは [14] を参照のこと。

4 スケール不変な消散型波動方程式への応用

(1.1) の他に改良型加藤の補題を適用できる次の消散型波動方程式の例を紹介する。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \frac{\mu u t}{1+t} = |u|^p & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x, 0) = \varepsilon g(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで μ は正定数である。スケール不変という名称は、スケール変換 $\tilde{u}(x, t) := u(\lambda x, (\lambda(1+t) - 1))$ に対して、方程式の線形部分が不変であることが由来である。(4.1) は、Wakasugi [17] に良くまとめられているように、消散項の時間減衰 $1/(1+t)$ は、消散項が効く効かない、つまり解が熱方程式のそれか波動方程式のそれかに似た振る舞いする、を分ける臨界減衰になっている。更にそのとき、係数 μ が 1 を境にしても状況が分かると予想されている。

D'Abbico & Lucente & Reissig [1] では、 $\mu = 2$ のとき、(1.1) と同様に解の時間大域存在と有限時間爆発を分ける臨界ベキが存在して、それは $n \geq 2$ のとき $p_0(n+2)$ になるという事実を証明している。これは、 $v(x, t) := (1+t)u(x, t)$ という簡単な変数変換によって、(4.1) が

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = \frac{1}{(1+t)^{p-1}} |v|^p & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ v(x, 0) = \varepsilon f(x), \quad v_t(x, 0) = \varepsilon \{f(x) + g(x)\} \end{cases} \quad (4.2)$$

という時間変数係数を半線形項にもつ波動方程式になることを用いて、従来の解析方法が適用できることに強く依存した結果である。ここでも、改良型加藤の補題を用いると、解のライフスパンの上からの評価が得られる。

それは

$$H(t) := \int_{\mathbf{R}^n} v(x, t) dx$$

とおくと、(1.1) のときと同様に解の台のコンパクト性から得られる

$$H''(t) \geq B(t+R)^{-(n+1)(p-1)} |H(t)|^p \quad \text{for } t \geq 0$$

と、初期値のひとつ $g(x)$ に対する仮定を $f(x) + g(x)$ に置き換えた仮定から、

$$H(t) \geq C\varepsilon^p t^{n+2-(n+1)p/2} \quad \text{for } t \geq 4R$$

が容易に導かれることによってわかる。後は補題の証明に沿って、 $\gamma(p, n)$ にある p の各次数における係数がどのように変化するか追えば良い。結果、 $\gamma(p, n)$ に該当する量は $\gamma(p, n+2)$ となることが直ちにわかり、(4.2) の解のライフスパンの評価は、定理 1 の結果で n を $n+2$ に置き換

えた形で成立することが得られる。臨界ベキの場合には、Takamura & Wakasa [15] にある臨界指数に対する改良型加藤の補題を用いれば所望の結果が得られる。これらはライフスパンの下からの評価と合わせて、何れ誰かによってもたらされるであろう。

【謝辞】 本研究は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C) 研究課題「高次元非線形波動方程式の臨界状態の解析とその応用」(課題番号：24540183、研究代表者：高村博之) の助成を受けて行われたものです。また、本稿の大元となる論文 [14] 執筆のきっかけとなった RIMS 研究集会“実領域における常微分方程式の安定性理論とその応用”(於：京都大学数理解析研究所、2014 年 11 月 4～6 日) に、講演者として招聘してくださいました宇佐美広介先生(岐阜大)と山岡直人先生(大阪府立大)に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] M.D'Abbico, S.Lucente and M.Reissig, *From $p_0(n)$ to $p_0(n+2)$* , arXiv:1407.3449.
- [2] V.Georgiev, H.Lindblad and C.D.Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119**(1997), 1291-1319.
- [3] V.Georgiev, H.Takamura and Y.Zhou, *The lifespan of solutions to nonlinear systems of a high-dimensional wave equation*, Nonlinear Anal., **64**(2006), 2215-2250.
- [4] R.Glassey, *Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations*, Math. Z., **177**(1981), 323-340.
- [5] R.Glassey, *Existence in the large for $\square u = f(u)$ in two space dimensions*, Math. Z., **178**(1981), 233-261.
- [6] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math., **28**(1979), 235-268.
- [7] T.Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **33**(1980), 501-505.
- [8] N.-A.Lai and Y.Zhou, *An elementary proof of Strauss conjecture*, J. Functional Analysis., **267**(2014), 1364-1381.
- [9] H.Lindblad, *Blow-up for solutions of $\square u = |u|^p$ with small initial data*, Comm. Partial Differential Equations, **15**(6)(1990), 757-821.
- [10] H.Lindblad and C.D.Sogge, *Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **118**(1996), 1047-1135.
- [11] J.Schaeffer, *The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **101A**(1985), 31-44.
- [12] T.C.Sideris, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **52**(1984), 378-406.
- [13] W.A.Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal., **41**(1981), 110-133.
- [14] H.Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equation*, arXiv 1412.2550, to appear in Nonlinear Analysis, TMA.
- [15] H.Takamura and K.Wakasa, *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations **251** (2011), 1157-1171.

- [16] H.Takamura and K.Wakasa, *Almost global solutions of semilinear wave equations with the critical exponent in high dimensions*, Nonlinear Analysis, TMA, **109** (2014), 187-229.
- [17] Y.Wakasugi, *Critical exponent for the semilinear wave equation with scale invariant damping*, Fourier Analysis (M.Ruzhansky and V.Turunen eds.), Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2014, 375-390.
- [18] B.Yordanov and Q.S.Zhang, *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal., **231**(2006), 361-374.
- [19] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$* , Chin. Ann. Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243.
- [20] Y.Zhou, *Blow up of classical solutions to $\square u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions*, J. Partial Differential Equations, **5**(1992), 21-32.
- [21] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to $\square u = |u|^p$ in two space dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **14**(1993), 225-236.
- [22] Y.Zhou, *The global existence and the life span for the classical solutions of fully nonlinear wave equations*, preprint, 1996.
- [23] Y.Zhou, *Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **28**(2007), 205-212.
- [24] Y.Zhou and W.Han, *Blow-up of solutions to semilinear wave equations with variable coefficients and boundary*, J. Math. Anal. Appl., **374**(2011), 585-601.

高村博之

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 複雑系知能学科

〒041-8655 北海道函館市亀田中野町 116-2

e-mail : takamura@fun.ac.jp