

概均質ベクトル空間の相対不変式 の Fourier 変換について

名大・理 鈴木利明

概均質ベクトル空間の相対不変式を Fourier 変換すれば、 Γ 函数と指数函数が係数につくだけで、元にもどる（

）が、その係数を具体的に求めることは一般に困難であった。1974 年春から夏にかけて、柏原正樹氏は極大過剰決定系の主要表象の理論を使って、この問題を線型代数の問題に帰着させた。

(G, V) を正則概均質ベクトル空間の実形の 1 つとする。ある条件の下で、次のような超函数を考えよう。

$$u_\nu(s) = \begin{cases} |f(x)|^s & \text{if } x \in V^{(\nu)} \\ 0 & \text{if } x \notin V^{(\nu)} \end{cases}$$

ここで、 $f(x)$ は、 (G, V) の相対不変式、 $V^{(\nu)}$ は $V - \{f(x) = 0\}$ の連結成分である。 $\nu = 1, 2, \dots, N$

$$u_\nu^*(s) = \int_{V^{(\nu)}} |f^*(y)|^{-s} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle} dY$$

ここで (G, V^*) は $\langle \rho(g)X, \rho^*(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ ($g \in G, X \in V, Y \in V^*$) なる作用をもつ概均質ベクトル空間で、 $f^*(Y)$ は、その相対不変式、 $V^{*(\vee)}$ は $V^* - \{f^*(Y) = 0\}$ の連結成分である。柏原氏の結果は次の通りである。

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_N(s) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-xs - \frac{n}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} \cdot {}^t A(s) \begin{bmatrix} u_1^*(s + \frac{n}{Y}) \\ \vdots \\ u_N^*(s + \frac{n}{Y}) \end{bmatrix}$$

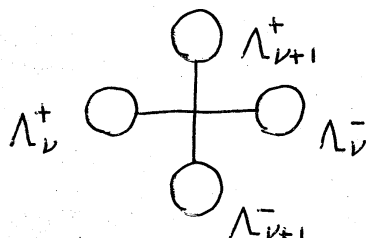
ここで、 $x = \deg f$, $n = \dim V$, $c_0 = f(x) \cdot f^*(\text{grad } \log f(x))$
 $c_1 = f^{*\frac{2n}{Y}}(y) \cdot \text{Hess } \log f^*(y)$ である。

次に行列 $A(s)$ について説明する。 $\mathcal{M}$ を極大過剰決定系

$$\mathcal{M}; \{ \langle A \cdot x, D_x \rangle - s \cdot \text{sx}(A) \} u = 0$$

$$A \in \mathcal{G}; G \text{ のリー環}, x \in V$$

とし、 W_0 を $\mathcal{M}$ の特性多様体 (Lagrangien 多様体) ($\sqrt{\text{FIT}^* V}$ すなわち $V \times V^*$ で考える) とし、 Λ_ν をその既約成分とする。いま $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ という既約成分があり、 Λ_0 が零断面 $V \times \{0\}$, Λ_n が原点の余法束 $\{0\} \times V^*$ で、 Λ_ν と $\Lambda_{\nu+1}$ は余次元 1 で繋がっているとす。各 Λ_ν を連結成分に分解して見れば、



となっている。($\Lambda_\nu^\pm$ 等は Λ_ν の

連結成分の一つ) いま交わりの生成点を (x_0, y_0) とした

とき、 Λ_ν が y_0 を含む軌道の余法束、 $\Lambda_{\nu+1}$ が x_1 を含む軌道の余法束となっており、 Λ_ν の各連結成分に同伴した数 ($C_\nu^\pm$ 等) の間の関係が次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} C_{\nu+1}^+ \\ C_{\nu+1}^- \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi\beta}{2}} & e^{\frac{\pi\beta}{2}} \\ e^{\frac{\pi\beta}{2}} & e^{-\frac{\pi\beta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\Lambda_\nu^+) - \tau(\Lambda_\nu^+ \cap \Lambda_\nu^-\)}} \\ e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\Lambda_\nu^-) - \tau(\Lambda_\nu^+ \cap \Lambda_\nu^-)\}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\nu^+ \\ C_\nu^- \end{pmatrix}$$

但し、 $\beta = \text{ord}_{\Lambda_0} f^s - \text{ord}_{\Lambda_1} f^s + \frac{1}{2}$

$$\tau(\Lambda_\nu^\pm) = \sqrt{-1} \sum_{A \in \mathcal{O}_F} \text{Aq}^m \langle A x_0^\pm, -{}^t A y_0^\pm \rangle$$

$$\tau(\Lambda_\nu^+ \cap \Lambda_\nu^-) = \sqrt{-1} \sum_{A \in \mathcal{O}_F} \text{Aq}^m \langle A x_1, -{}^t A y_0 \rangle$$

ここで、 $(x_0^\pm, y_0^\pm)$ は $\Lambda_0^\pm$ の生成元である。

このとき行列 $A(s)$ は

$$\begin{pmatrix} c_n^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(n)} \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

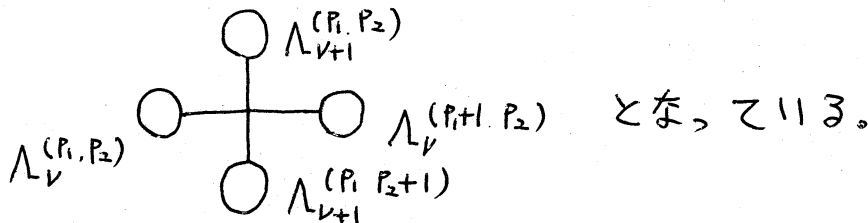
で与えられる。

例 1. V を複素エルミット行列全体のなす空間とし、 G を $GL(n, \mathbb{C})$ とし、その作用を $X \mapsto gXg^{-1}$ ($g \in G, X \in V$) とすれば、相対不変式が $\det X$ なる概均質ベクトル空間となる。この場合の Λ_ν は $\{(X, Y); \text{rank } X \leq n-\nu, \text{rank } Y \leq \nu, XY=0\}$

で、それは次のような連結成分に分かれる。

$$\Lambda_{\nu}^{(P_1, P_2)} = \{ (X, Y) \in \Lambda_{\nu} ; \text{Aqm} X = (P_1, n - \nu - P_1), \text{Aqm} Y = (P_2, \nu - P_2) \}$$

交わり方は



同伴数の間の関係は、($\frac{\Gamma(P)}{\sqrt{2\pi}}$ を省略して)

$$\begin{bmatrix} C_{\nu+1}^{(P_1, P_2)} \\ C_{\nu+1}^{(P_1, P_2+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu-P_2} e^{-\frac{\pi F}{2}(s+1)} & (-1)^{\nu-P_2} e^{\frac{\pi F}{2}(s+1)} \\ (-1)^{P_2} e^{\frac{\pi F}{2}(s+1)} & (-1)^{P_2} e^{-\frac{\pi F}{2}(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\nu}^{(P_1, P_2)} \\ C_{\nu}^{(P_1+1, P_2)} \end{bmatrix}$$

となる。ここで、 $C_{0,0}^{(P_1, 0)} = t^{P_1}$ とおけば

$$\begin{aligned} C_n^{(0, j)} &= (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} k + \sum_{i=1}^{n-j-1} k} (e^{\frac{\pi F}{2}(s+1)} + e^{-\frac{\pi F}{2}(s+1)} t^j (e^{-\frac{\pi F}{2}(s+1)} \\ &\quad + e^{\frac{\pi F}{2}(s+1)})^{n-j} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{\frac{j^2 + (n-j)^2 - n}{2}} \sum_{k=\text{Max}(0, i+j-n)}^{\text{Min}(i, j)} \binom{j}{k} \binom{n-j}{i-k} e^{\frac{\pi F}{2}(s+1)(2j+2i-4k-n)} t^i \end{aligned}$$

だから、 $tA(s) = (a_{ij}(s))$ とすれば

$$a_{ij}(s) = (-1)^{\frac{j^2 + (n-j)^2 - n}{2}} \sum_{k=\text{Max}(0, i+j-n)}^{\text{Min}(i, j)} \binom{j}{k} \binom{n-j}{i-k} e^{\frac{\pi F}{2}(s+1)(2j+2i-4k-n)}$$

となり、結局

$$|\det X|_z^s = (2\pi)^{-ns} \pi^{-\frac{n(n+1)}{2}} 2^{-n} \Gamma(s+1) \Gamma(s+2) \cdots \Gamma(s+n)$$

$$\sum_{j=0}^n a_{ij}(s) \int_{V_j} |\det Y|^{-s-n} e^{2\pi i \text{Tr} XY} dY$$

となる。ここで、 $V_i = \{ X \in V ; \operatorname{sgn} X = (i, n-i) \}$

$$|\det X|_i^s = \begin{cases} |\det X|^s & \text{if } X \in V_i \\ 0 & \text{if } X \notin V_i \end{cases}$$

$$dY = \prod_{i=1}^n d\gamma_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d\operatorname{Re} \gamma_{ij} d\operatorname{Im} \gamma_{ij}, \quad Y = (\gamma_{ij})$$

例2 $V = \{ X ; m \text{ 行 } n \text{ 列実数行列} \}$

$$V_i = \{ X ; \operatorname{sgn} {}^t X H X = (i, n-i) \} \quad 0 \leq i \leq n$$

$$|\det {}^t X H X|_i^s = \begin{cases} |\det {}^t X H X|^s & \text{if } X \in V_i \\ 0 & \text{if } X \notin V_i \end{cases}$$

$$dX = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} dx_{ij}, \quad X = (x_{ij}), \quad H = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$$

$p, q > n$

このとき、

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} |\det {}^t X H X|^{s-\frac{m}{2}} e^{2\pi i \operatorname{Tr} {}^t X H Y} dX \\ &= \pi^{-2ns + \frac{mn}{2} - n} \Gamma(s) \Gamma(s - \frac{1}{2}) \cdots \Gamma(s - \frac{n-1}{2}) \\ & \quad \Gamma(s + \frac{n+1-m}{2}) \Gamma(s + \frac{n-m}{2}) \cdots \Gamma(s - \frac{m-2}{2}) \sum_{j=0}^n C_{ij}(s) |\det {}^t Y H Y|_j^{-s} \end{aligned}$$

となる。ただし

$$C_{ii}(s) = \begin{cases} P_i \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 & \text{if } i, n-i \text{ even} \\ (-1)^{\frac{i}{2}} P_i \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 & \text{if } i: \text{even} \\ & \text{if } n-i: \text{odd} \\ (-1)^{\frac{n-i}{2}} P_i \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 & \text{if } i: \text{odd} \\ & \text{if } n-i: \text{even} \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}} P_i \cdots P_2 Q_{n-i} \cdots Q_2 (P_1 Q_0 + \tilde{P}_1 \tilde{Q}_0) & \text{if } i, n-i: \text{odd} \end{cases}$$

210

$$C_{2i+1}(s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-i-1}{2}} P_{i+1} \cdots P_2 \tilde{Q}_3 Q_{n-i-1} \cdots Q_1 & \text{if } i: \text{even } n: \text{odd} \\ P_{i+1} \cdots P_2 \tilde{Q}_{-n} Q_{n-i-1} \cdots Q_1 & \text{if } i, n-i: \text{even} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$$C_{2i-1}(s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{i-1}{2}} P_{i-1} \cdots P_1 Q_{n-i+1} \cdots Q_2 \tilde{P}_3 & \text{if } i: \text{even } n-i: \text{odd} \\ (-1)^{\frac{i}{2}} P_{i-1} \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 \tilde{P}_0 & \text{if } i, n-i: \text{even} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

その他 0

$$P_\ell = \cos \frac{\pi}{2} (2s - p + \ell) \quad \tilde{P}_\ell = \cos \frac{\pi}{2} (p + \ell)$$

$$Q_\ell = \cos \frac{\pi}{2} (2s - q + \ell) \quad \tilde{Q}_\ell = \cos \frac{\pi}{2} (q + \ell)$$

例3 $V = \{ X = (x_{ij}) ; 1 \leq i, j, k \leq 6 \quad (x_{ij}) ; \text{反対称テンソル} \}$
 $;$ $\mathbb{R}$ 上の 6 元 3 次反対称空間 ($GL(6)$ が目で作用
 してゐる.)

$$f(X) = x_0 \det((x'_{ij})) + x'_0 \det((x_{ij})) + \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \det X_{ij} \cdot \det X'_{ij} \\ - \frac{1}{4} (x_0 x'_0 - \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_{ij} x'_{ij})^2$$

$$\text{そこで } x_{123} = -x_0 \quad x_{456} = -x'_0$$

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{423} & x_{143} & x_{124} \\ x_{523} & x_{153} & x_{125} \\ x_{623} & x_{163} & x_{126} \end{pmatrix} \quad (x'_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{156} & x_{416} & x_{451} \\ x_{256} & x_{426} & x_{452} \\ x_{356} & x_{436} & x_{453} \end{pmatrix}$$

$X_{ij}, X'_{ij} ; (x_{ij}), (x'_{ij})$ から i 行 j 列を除いた行列

$$V_{\pm} = \{ X ; f(X) \geq 0 \}$$

$$|f(X)|_{\pm}^s = \begin{cases} |f(X)|^s & \text{if } X \in V_{\pm} \\ 0 & \text{if } X \notin V_{\pm} \end{cases}$$

$$dX = \prod_{1 \leq i < j < k \leq 6} dx_{ijk}$$

$$\int_{V_+} |f(X)|^{s-5} \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} y_{ijk}) dX$$

$$= (2\pi)^{-4s+8} \Gamma(s) \Gamma(s-\frac{3}{2}) \Gamma(s-\frac{5}{2}) \Gamma(s-4)$$

$$\{ -2 \sin 2\pi s \} |f(Y)|_+^{-s}$$

$$\int_{V_-} |f(X)|^{s-5} \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} y_{ijk}) dX$$

$$= (2\pi)^{-4s+8} \Gamma(s) \Gamma(s-\frac{3}{2}) \Gamma(s-\frac{5}{2}) \Gamma(s-4)$$

$$\{ 2 \sin 2\pi s \} |f(Y)|_-^{-s}$$