

乱流における条件付平均と確率密度分布

中大理工物理 中野 徹 (Tohru Nakano)
東大理物理 高橋直也 (Naoya Takahashi)
東大理物理 神部 勉 (Tsutomu Kambe)
名工大生産システム 後藤俊幸 (Toshiyuki Gotoh)
航技研 山本稀義 (Kiyoshi Yamamoto)

乱流における条件付平均の概念は Pope [1] によりずっと以前に導入され、乱流中のスカラー場の確率密度分布に適用されてきたが [2, 3, 4]、最近特に白色速度場中でのスカラー場の構造関数との関連で注目されるようになった [5]。本講演では、実際の DNS 乱流中でのスカラー場の統計的性質を条件付平均の手法で解析し、その方法が乱流の理解に有効であることを示したい。詳細は参考文献 [6] を見て欲しい。

シミュレーションは航技研の数値風洞でなされた。シミュレーションの詳細は参考文献 [6, 7] に譲る。メッシュ数が 256^3 と 512^3 のシミュレーションを行ったが、両方の結果は同じ傾向を示すので、本講演では 512^3 のシミュレーションの結果についてだけ述べる。速度場、スカラー場ともに同じ初期スペクトルから出発し、両方の場が成熟した時点でのスカラー場の解析を行っている。その時点でのテイラーのマイクロレイノルズ数 R_λ は 120 である。

距離 r だけ離れた 2 点のスカラー場の差

$$\Theta_r(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \quad (1)$$

の統計的な性質に注目する。 $\Theta_r(\mathbf{x})$ の p 次モーメント $S_p(r)$ が構造関数であり、 $S_p(r) \sim r^{\zeta_p}$ と書いたときのスケーリング指数 ζ_p が興味のある量である。しかし構造関数よりも Θ_r の確率密度分布の方がより基本的であるので、ここでは分布関数にもっぱら焦点を当てる。分布関数の観測は沢山あるが、理論的な予測は未だないと言ってよいであろう。これから述べる条件付平均の手法は、分布関数の理論的な予測の手助けになる方法の一つになり得るであろう。

スカラー場 $T(\mathbf{x})$ を記述する方程式は

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T(\mathbf{x}) = \kappa \nabla_{\mathbf{x}}^2 T(\mathbf{x}) \quad (2)$$

であるから、 $\Theta_r(\mathbf{x})$ に対しては

$$\frac{\partial \Theta_r(\mathbf{x})}{\partial t} + Q_r(\mathbf{x}) = \kappa \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}), \quad (3)$$

ここで $Q_r(\mathbf{x})$ は

$$Q_r(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \quad (4)$$

で定義される慣性項である。 $p+1$ 次モーメントに対する式は、

$$\frac{1}{p+1} \frac{\partial \langle \Theta_r^{p+1}(\mathbf{x}) \rangle}{\partial t} + \langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) \rangle = \kappa \langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) \rangle \quad (5)$$

となり、定常状態では慣性領域での伝播を表す左辺の第2項と散逸である右辺の釣り合いから構造関数が求められる：

$$\langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) \rangle = \kappa \langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) \rangle. \quad (6)$$

速度場が時間的にデルタ関数的にしか相関しないとすれば、伝播の項は $S_{p+1}(r)$ で表される [5]。(しかし速度場が通常の乱流場であれば、伝播項が簡単な形には表せない。) 散逸場の寄与の取り扱いには条件付平均の方法が便利であり、そのために温度場のラプラシアンとの差の条件付平均

$$H(\Theta_r) = \langle \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) | \Theta_r \rangle \quad (7)$$

を導入しよう。ここで $\langle a | \Theta_r \rangle$ は Θ_r の値を固定した条件の下での a の平均値である。 $H(\Theta_r)$ の関数形が分かれば、

$$\langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) \rangle = \int \Theta_r^p H(\Theta_r) P(\Theta_r) d\Theta_r \quad (8)$$

のように確率密度分布関数 $P(\Theta_r)$ を用いて、散逸項の寄与が計算出来る。例えば、 $H(\Theta_r) = f_r \Theta_r$ のような線形関係が仮定出来れば、

$$\langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) \rangle = f_r S_{p+1}(r) \quad (9)$$

のように $S_{p+1}(r)$ で表されることになる。その場合、白色速度場では (6) は $S_{p+1}(r)$ のみの方程式になり、構造関数の指数が求められることが Kraichnan [5] により示された。

(6) の右辺で空間平均操作を実行すれば、

$$\langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) \rangle = -\kappa p \langle \Theta_r^{p-1}(\mathbf{x}) |\nabla_{\mathbf{x}} \Theta_r(\mathbf{x})|^2 \rangle \quad (10)$$

となるので、もう一つの条件付平均

$$G(\Theta_r) = \langle |\nabla_{\mathbf{x}} \Theta_r(\mathbf{x})|^2 | \Theta_r \rangle. \quad (11)$$

を導入すれば、

$$\begin{aligned} \langle \Theta_r^p(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) \rangle &= \kappa \int \Theta_r^p H(\Theta_r) P(\Theta_r) d\Theta_r \\ &= -\kappa p \int \Theta_r^{p-1}(\mathbf{x}) G(\Theta_r) P(\Theta_r) d\Theta_r \end{aligned} \quad (12)$$

の表現が可能である。当然な疑問はどちらの条件付き平均を用いるのがより適切かということである。(10)では右辺に因子 p がついているので、指数の決定には大きな影響を与えるはずである。

実は両方の表現が同等であることから確率密度分布関数が導かれる。(12)の右辺の二つの項から、

$$\int u^p \left[H(u)P(u) - \frac{\partial}{\partial u} G(u)P(u) \right] du = 0 \quad (13)$$

が導かれるが、任意の p に対して成り立つから、

$$H(u)P(u) - \frac{\partial}{\partial u} G(u)P(u) = 0 \quad (14)$$

となり、それから

$$P(\Theta_r)G(\Theta_r) = N \exp \left[\int_0^{\Theta_r} \frac{H(u)}{G(u)} du \right] \quad (15)$$

が導かれる。ここで N は規格化定数である。この関係を導くにあたっては、平均を空間平均で置き換えているから、統計的に空間的一様な系で成り立たなければならない。我々のシミュレーションでは周期境界条件を用いているからこの条件を満たしていることになる。実際シミュレーションの結果はこの式を完全に満足している。

$H(\Theta_r)$, $G(\Theta_r)$ の解析的な表現が得られれば、分布関数が計算される。そこまでもなくとも、分布関数が H と G のどのような振舞いで決まるかが理解できる。 H と G が物理的にどのような性質を持っているかを調べよう。そのために(3)式に $\Theta_r(\mathbf{x})$ を掛けて、その式の Θ_r の条件付平均をとる。定常状態では時間微分の項は無視できるから、

$$\langle \Theta_r(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) | \Theta_r \rangle = \kappa \Theta_r H(\Theta_r) \quad (16)$$

となり、

$$H(\Theta_r) = \frac{\langle \Theta_r(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) | \Theta_r \rangle}{\kappa \Theta_r}. \quad (17)$$

すなわち $H(\Theta_r)$ は Θ_r^2 の伝播率の条件付期待値に関係する。一方 $G(\Theta_r)$ は次のように解釈される。やはり(6)に $\Theta_r(\mathbf{x})$ を掛けて平均をとる。定常状態では

$$\langle \Theta_r(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) \rangle = \kappa \langle \Theta_r(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) \rangle = -\kappa \langle |\nabla_{\mathbf{x}} \Theta_r(\mathbf{x})|^2 \rangle. \quad (18)$$

これを上の式を条件付平均で書き換えれば、

$$\int \langle \Theta_r(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) | \Theta_r \rangle P(\Theta_r) d\Theta_r = -\kappa \int G(\Theta_r) P(\Theta_r) d\Theta_r \quad (19)$$

となるから、 $G(\Theta_r)$ は条件付の散逸の大きさと解釈出来る。

シミュレーションで H, G がどのようなになるかを示す前に、簡単な場合を考えよう。(16)の左辺は Θ_r を固定した下での Θ_r^2 の伝達率であるから、

$$\langle \Theta_r(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) | \Theta_r \rangle \sim \frac{\Theta_r^2}{\tau_r} \quad (20)$$

と書けるであろう。ここで τ_r は緩和時間であり、それは速度場による convection で決定される。(上の表現に対する誤解をさけるために、次のことを記しておく。(20)の条件付平均を単なる平均で置き換えれば、縦速度場の差に対して Karman-Howarth によって導かれた項のスカラー版である

$$\langle \Theta_r(\mathbf{x}) Q_r(\mathbf{x}) \rangle \sim \frac{\langle \Theta_r^2 U_r \rangle}{r}$$

の項が得られる [8]。ここで U_r は縦速度差である。この表現を条件付期待値に拡張し、 r/U_r を τ_r とおいている。) K41によれば、 $\tau_r \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$ であるから、この場合には (16) より

$$H(\Theta_r) = a\Theta_r \quad (21)$$

ということになる。

次に $G(\Theta_r)$ を考えよう。理想的な場合には散逸は空間的に一様に起こるであろうから、

$$G(\Theta_r) = b \quad (22)$$

となる。それでは係数 a, b を決定しよう。散逸率を χ とすれば、

$$\frac{\chi}{\kappa} = \langle |\nabla \mathbf{x} \Theta_r(\mathbf{x})|^2 \rangle = \int G(u) P(u) du = b \int P(u) du = b. \quad (23)$$

散逸率のもう一つの決定方法によると、

$$\frac{\chi}{\kappa} = -\langle \Theta_r(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Theta_r(\mathbf{x}) \rangle = -\int u H(u) P(u) du = -a \int u^2 P(u) du = -a \langle \Theta_r^2 \rangle. \quad (24)$$

以上の結果を (15) に代入すると、

$$P(\Theta_r) = N \exp \left[-\frac{\Theta_r^2}{2\langle \Theta_r^2 \rangle} \right] \quad (25)$$

となり、ガウス分布に到達する。 H が線形で、 G が定数の場合はガウシアンになる。 H の線形性からのずれと G の定数からのずれが分布関数のガウシアンからのずれの原因になっていると言ってよからう。

それではシミュレーションの結果を示そう。これからの表示を透明にするために、種々の量を無次元化しよう。

$$\theta_r = \frac{1}{\sqrt{S_2(r)}} \Theta_r, \quad (26)$$

$$h(\theta_r) = -\frac{\kappa \sqrt{S_2(r)}}{J_2(r)} H(\Theta_r), \quad (27)$$

$$g(\theta_r) = \frac{\kappa}{J_2(r)} G(\Theta_r). \quad (28)$$

ここで $J_2(r)$ は散逸率であり、

$$J_2(r) = \kappa \langle |\nabla \mathbf{x} \Theta_r(\mathbf{x})|^2 \rangle \quad (29)$$

と定義される。この時 (15) の関係式は

$$P(\theta_r)g(\theta_r) = N \exp \left[- \int_0^{\theta_r} \frac{h(u)}{g(u)} du \right] \quad (30)$$

となる。ここで $P(\theta_r)$ は規格化されている。

(1) $h(\theta)$

以後 r はコルモゴロフ長さ η で測る。現シミュレーションでは $14 \leq r/\eta \leq 51$ が慣性領域である。それでは r/η の種々の値に対する $h(\theta)$ を調べよう。慣性領域での $h(\theta) - \theta$ は殆ど r によらないのに対して、散逸領域のものは少し異なる。図 1 には $r/\eta = 5, 20, 30$ のカーブが描かれている。当然ながら、 $h(\theta)$ は反対称である。点線は線形関係 $h(\theta) = \theta$ を示す。 $h(\theta)$ の定義より

$$\int_0^\infty (h(\theta) - \theta) \theta P(\theta) d\theta = 0 \quad (31)$$

の関係が満たされなければならない。慣性領域の $h(\theta)$ は、大きな θ では線形関係より小さめになっているのに対して、小さな値では上に出ていて、関係 (31) が満たされている。

(2) $g(\theta)$

$g(\theta)$ の特徴は、それが r に大きく依存することであり、 $h(\theta)$ と対照をなす。図 2 には $r/\eta = 5, 20, 30$ のカーブが掲げている。全ての r で一定値から始まるが、 $g(\theta = 0)$ は r が小さい方が小さい。一方 $g(\theta)$ の θ による増加の割合は、 r と共に減少する。したがって大きな r では、 $g(\theta = 0)$ は大きく、 θ の増加と共によりフラットになる。すなわち分布はガウシアンにより近くなることが推察される。一方、 r が小さいと、指数関数の中の非積分関数 $h(u)/g(u)$ はよりフラットになり、ガウス分布からのずれが顕著になる。

(3) $q(\theta)$

得られた二つの条件付期待値を用いて、指数関数に現れる関数

$$q(u) = \frac{h(u)}{g(u)} \quad (32)$$

の振舞いを調べることは面白い。図 3 が $r/\eta = 5, 20, 30$ に対する $q(\theta)$ のグラフである。散逸領域の $r/\eta = 5$ では $\tanh(u)$ の形をしている。確率分布は大きな θ では因子 $1/g(\theta)$ を除けば、指数分布であることを示す。 r が増加するに連れ、 $q(\theta)$ は漸近的に一定値に近づくことはなく、確率分布が指数分布からずれてくる。

(4) $P(\theta)g(\theta)$

最後に $r/\eta = 5, 20, 30$ に対する $P(\theta)g(\theta)$ のグラフを図 4 に示す。点線は $g(\theta) = 1$ としたガウシアン分布である。これは因子 $g(\theta)$ だけ確率密度分布関数とは違っている

が、大きな振幅では確率分布とほぼ同じであると考えてよい。散逸領域では、大きな振幅では指数分布であるが、慣性領域でサイズが大きくなるにつれて指数分布からずれて、ガウシアンに近づく。

条件付平均の方法を用いれば、分布関数がどのように決定されるかについての理解が得られることが分かった。次の目標は、 $h(\theta)$ と $g(\theta)$ の表現を理論的に求めて、それより確率密度分布関数を導き出すことである。この目標は数理研の研究会の段階では実現されていなかったが、そののち縦速度差に応用され、その目標はかなり達成されたと思う。詳細は [9] を見て欲しい。

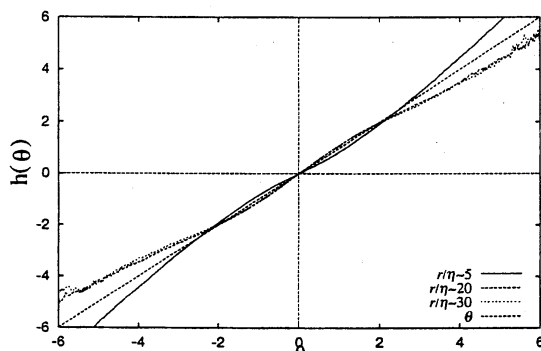


Fig. 1

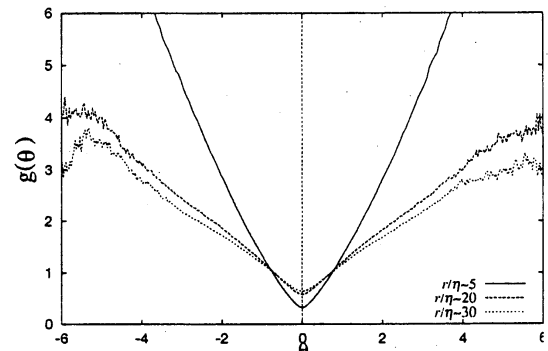


Fig. 2

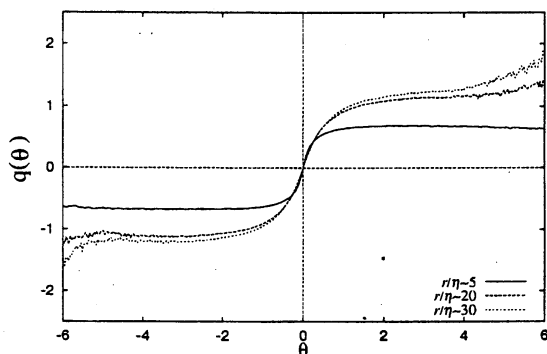


Fig. 3

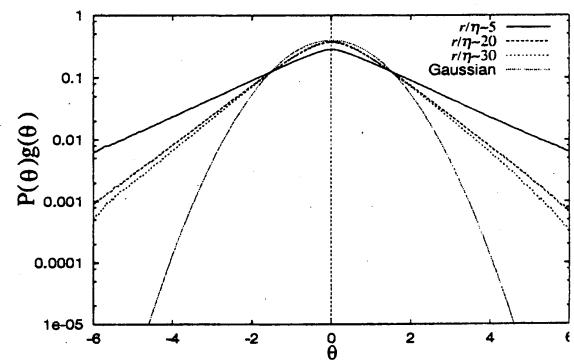


Fig. 4

References

- [1] S. Pope, Combust. Flame **27** (1976), 299 .
- [2] Ya.G. Sinai and V. Yakhot: Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1962.
- [3] V. Yakhot: Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1965.
- [4] E. Ching and R.H. Kraichnan: preprint (1997).
- [5] R. H. Kraichnan: Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 1016.
- [6] N. Takahashi, T. Kambe, T. Nakano, T. Gotoh, and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan **67** (1998) 833.
- [7] K. Yamamoto: *Parallel Computational Fluid Dynamics: New Algorithms and Applications, Proceedings of the Parallel CFD '94 Conference* ed. N.Satofuka, J.Periaux and A. Ecer (North-Holland, 1995) p13; S. Oide, I. Hosokawa and K. Yamamoto, Journal of Japan Society of Fluid Mechanics (Nagare) **16** (1997) 259 (In Japanese).
- [8] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, vol.2 (MIT Press, Cambridge, 1975).
- [9] N. Takahashi, T. Kambe, T. Nakano, T. Gotoh, and K. Yamamoto: preprint, chao-dyn/9803010 (1998).