

確率摂動を含む経済成長方程式

西岡 國雄¹

1 序論

最初に MIT, Department of Economy での講義録 [7] を引用し, 経済学で研究されている「経済成長理論」が何を目的としているかを説明する.

2000 年の経済統計から, 数カ国の “per-capita GDP”² を比較する.

USA	\$32,500	Mexico	\$9,000	China	\$4,000
India	\$2,500	Nigeria	\$1,000		

この表から判るように, per-capita GDP の高下は生活水準の貧富を意味する.

[質問] では貧しい国が高水準の生活を獲得する手段は何か?

[回答] 急速な経済成長を遂げ, 高い per-capita GDP を達成する.

実際に USA では, “1870 年には \$3,300 → 2000 年には \$32,500” との per-capita GDP の成長があった. この間, 経済成長率の平均は 1.75 % で

$$(1 + 0.0175)^{2000-1870} \times \$3,300 = \$32,500$$

と計算できる. India, Pakistan, Philippines などの成長率は 0.75 % 程度だが, もし USA の成長率もこれと同程度なら

$$(1 + 0.0075)^{2000-1870} \times \$3,300 = \$8,700 \sim \frac{1}{4} \times \$32,500$$

となり, Mexico と同水準の生活を送っていることになる.

高水準の生活を獲得するために, 次の質問が重要となる.

(1.1) 急速で安定した経済成長を引き起こす要因はなにか?

この質問 (1.1) への解答を研究する学問が「経済成長理論」である.

このノートで, 我々は, ただ 1 つの製品を生産する閉じた経済系にたいし, その per-capita capital stock³ $k(t)$ の時間発展を記述する動力学方程式 (Solow 方程式 (2.15)) を導入する. つぎに, Merton [6] に従い, その Solow 方程式 (2.15) に確率項を導入し, per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$ を SDE (3.2) の解として定式化する.

このノートの目的は, “per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$, (3.2)” 及び “その成長率の時間平均 $\rho(t, w)$, (2.4)+(3.9)” の $t \rightarrow \infty$ での挙動を報告することである.

我々は, SDE (3.2) に現れる生産関数 f が

(i) 標準的な仮定である Inada 条件 (2.12a)+(2.12b) を満たす場合 (定理 3.7),

(ii) それを改良した Kamihigashi 条件 (4.1) を満たす場合 (定理 4.3)

¹ 中央大学商学部, 〒 192-0393 八王子市東中野 742-1; nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

² 勤労者一人当たりの GDP, (2.10).

³ 勤労者一人当たりの資本量, (2.10).

について結論を得た。とくに、後者の場合には

per-capita capital stock $k(t, w)$ が確率 1 で 0 に収束する特異な事例があること、
及びそれがどのような状況で起こるか

を示した。

2 新古典派の経済成長理論

1950 年代から '60 年代にかけて Harrod, Domer, Solow らによって「新古典派の経済成長理論」が提唱され、

設備投資や物理的インフラの整備が、経済成長の重要な要因

という経済政策/主張の理論的支柱となった。現在の経済成長理論の多くは、この理論の改良版として登場している。

2.1 経済活動の設定

我々は以下の設定で「新古典派の経済成長理論」を考える：

- 仮定 2.1.** (i) 経済活動は孤立した島で行われ、この島には多数の勤労者が生活している。
(ii) ただ 1 つの製品が生産され、その生産は“資本量”と“勤労人口”の 2 要素のみに依存する。
(iii) 生産された製品はすべて、“消費”されるか“資本”として投資される。 ◇

まずこの経済活動を表す諸量を導入する：

(2.1)	$Y(t)$:	時刻 t での GDP		$K(t)$:	時刻 t での資本量
	$L(t)$:	時刻 t での勤労人口		$C(t)$:	時刻 t での消費量
	$I(t)$:	時刻 t での投資量		$S(t)$:	時刻 t での貯蓄量

これらの経済諸量間には、仮定 2.1 から、次の関係式が成立している：

仮定 2.2. (i) 経済活動は Keynes 体系である⁴, i.e.

$$(2.2) \quad Y(t) = I(t) + C(t).$$

(ii) 資本と勤労は相互に代換えでき、企業は両者の比率を自由に選択できる。つまり生産量は、資本量と勤労人口のみ依る生産関数 F により決定される：

$$(2.3) \quad Y(t) = F(K(t), L(t)).$$

⁴ Keynes の有効需要の法則とは「需要 $C(t)$ が生産量 $Y(t)$ を決定する」。すなわち (2.2) で、右辺により左辺が決定され、等式が成立する。

(iii) 資本量の増加には, 一定の摩擦 $\lambda > 0$ が存在する:

$$(2.4) \quad K'(t) = I(t) - \lambda K(t).$$

(iv) 貯蓄率 $s > 0$ は一定である⁵:

$$(2.5) \quad C(t) = (1 - s) Y(t).$$

(v) 勤労人口の増加率 $n > 0$ は一定である:

$$(2.6) \quad L'(t) = n L(t). \quad \diamond$$

上の仮定 2.2, (2.3) で導入された生産関数 F は次のようなものである.

仮定 2.3. $F: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ は次の条件 (i)~(iii) を満たす関数である.

(i) F は C^2 -級で $F(0, L) = 0 = F(K, 0)$ ⁶ かつ strictly concave, i.e.

$$(2.7) \quad \partial_K F(K, L), \partial_L F(K, L) > 0 \quad \text{and} \quad \partial_K^2 F(K, L), \partial_L^2 F(K, L) < 0.$$

(ii) Inada 条件をみたす: i.e.

$$(2.8a) \quad \lim_{K \rightarrow 0} \partial_K F(K, L) = \infty, \quad \lim_{L \rightarrow 0} \partial_L F(K, L) = \infty,$$

$$(2.8b) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \partial_K F(K, L) = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \partial_L F(K, L) = 0.$$

(iii) CRS 条件⁷を満たす:

$$(2.9) \quad \text{任意定数 } a > 0 \text{ にたいし } F(aK, aL) = a F(K, L). \quad \diamond$$

例 2.4 (Cobb-Douglas 型生産関数). 定数 $0 < \alpha < 1$ にたいし

$$F(K, L) \equiv K^\alpha L^{1-\alpha}$$

で与えられる関数 F は 仮定 2.3 をみたす生産関数の典型例であり, Cobb-Douglas 型の生産関数と呼ばれる. $\diamond$

2.2 経済成長の動力学

ここで, (2.1) の経済諸量の代わりに “勤労者一人当たりの経済諸量”⁸ を導入する.

$$(2.10) \quad \begin{array}{ll} y(t) \equiv Y(t)/L(t): & \text{勤労者一人当たりの GDP, per-capita GDP} \\ k(t) \equiv K(t)/L(t): & \text{勤労者一人当たりの資本量, per-capita capital stock} \\ i(t) \equiv I(t)/L(t): & \text{勤労者一人当たりの投資量, per-capita investment} \\ c(t) \equiv C(t)/L(t): & \text{勤労者一人当たりの消費量, per-capita consumption} \end{array}$$

⁵ $S(t) = s Y(t)$ を仮定する. すると 仮定 2.1 (iii) より $S(t) = I(t)$ となるので, (2.2) より (2.5) が導かれる.

⁶ これは Inada 条件 (2.8b) より導びかれる.

⁷ Constant Return to Scale; 線形同次 linearly homogeneity とも言われる.

⁸ per-capita measurements

生産関数 F は CRS 条件 (2.9) を満たすから, $y(t)$ にたいしては 1 変数 $k(t)$ にのみ依存する新たな生産関数 f を考えれば良いことになる. 実際,

$$(2.11) \quad y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) \equiv f(k(t))$$

ここで

$$f(k) \equiv F(k, 1) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

だから, この f がどんな関数であるかを 仮定 2.3 より導びく.

命題 2.5. $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ は C^2 -級で, つぎの条件を満たしている.

$$(2.12a) \quad f(0) = 0 \text{ で strictly concave,}$$

$$(2.12b) \quad (\text{Inada 条件}) \quad \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0. \quad \diamond$$

証明 (2.12a) は (2.7) よりあきらか. CRS 条件 (2.9) を考慮すると

$$(2.13) \quad \begin{aligned} f'(k) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left(F\left(\frac{K}{L} + \delta, 1\right) - F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \right) \\ &= \lim_{\delta} \frac{1}{L\delta} \left(F(K + L\delta, L) - F(K, L) \right) = \partial_K F(K, L) \end{aligned}$$

となるので, Inada 条件 (2.8a)+(2.8b) より (2.12b) も示される. $\square$

いよいよ, per-capita capital stock $k(t)$ の時間発展を調べる.

$$(2.14) \quad k'(t) = \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)' = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \cdot \frac{L'(t)}{L(t)}$$

ここで, (2.2)~(2.5) より

$$K'(t) = Y(t) - C(t) - \lambda \cdot K(t) = s \cdot Y(t) - \lambda \cdot K(t) = s \cdot F(K(t), L(t)) - \lambda \cdot K(t)$$

だから,

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = s \cdot f(k(t)) - \lambda \cdot k(t).$$

一方 (2.6) より

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n$$

となる. これらを (2.14) に代入して,

$$(2.15) \quad (\text{Solow Equation}) \quad k'(t) = s \cdot f(k(t)) - (\lambda + n) \cdot k(t)$$

の動力学方程式を得る.

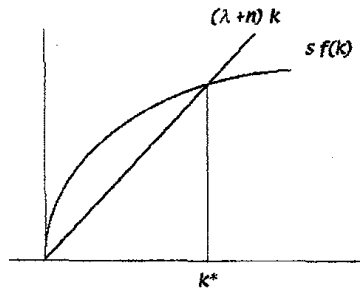
さて f は (2.12a)+(2.12b) を満たしているので,

$$(2.16) \quad s \cdot f(k) = (\lambda + n) \cdot k, \quad k > 0$$

となる唯一の点 $k^* > 0$ が存在する. そして

$$k(t) < k^* \text{ なら } k'(t) > 0, \quad k(t) > k^* \text{ なら } k'(t) < 0$$

となるので, この k^* は Solow 方程式 (2.15) の安定不動点である. 従って, つぎの結論は自明である.



定理 2.6. (i) Per-capita capital stock $k(t)$ は Solow 方程式 (2.15) に従って, 時間発展する.

(ii) Solow 方程式 (2.15) には唯一の安定不動点 $k^* > 0$ が存在し, $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k^*$.

(iii) Per-capita capital stock $k(t)$ の成長率 $\rho(t)$ は

$$\rho(t) \equiv \frac{k'(t)}{k(t)} = s \cdot \frac{f(k(t))}{k(t)} - (\lambda + n)$$

で与えられ, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$. ◇

3 Solow 方程式の randomization

Solow 方程式 (2.15) の解 $k(t)$ は単調に k^* に収束する. ところが, 現実の経済活動では per-capita capital stock は単調な挙動をとっておらず, ランダムに変動している. そのため, Solow 方程式をランダム化する提案された.

とくに Merton は Solow 方程式を確率微分方程式化し, per-capita capital stock $k(t, w)$ を拡散過程に定式化する提案をおこなった.

3.1 Random Solow 方程式

Merton [6] は勤労人口の推移が, 常微分方程式 (2.6) ではなく, 次の線形確率微分方程式に従うとした: $\{B(t, w)\}$ を 1 次元 Brown 運動, $n, \sigma > 0$ を定数として,

$$(3.1) \quad dL(t, w) = n L(t, w) dt + \sigma L(t, w) dB(t, w).$$

すると Ito の公式より

$$dk(t, w) = d\left(\frac{K(t)}{L(t, w)}\right) = \frac{K'(t)}{L(t, w)} dt - \frac{K(t)}{L^2(t, w)} dL(t, w) - \frac{2K(t)}{2L^3(t, w)} \cdot \sigma^2 L^2(t, w) dt$$

となるから, per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$ を記述する SDE (Random Solow Equation) が得られた.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \text{(Random Solow Equation)} \\ dk(t, w) &= \left(s f(k(t, w)) - (\lambda + n - \sigma^2) k(t, w) \right) dt - \sigma k(t, w) dB(t, w). \end{aligned}$$

注意 3.1 (Chang-Malliari の指摘). SDE (3.2) の係数は Lipschitz 条件を満たしていない。そのため、“(3.2) の解の一意存在は自明ではない”との指摘が Chang-Malliari [1] によってなされた。そして、彼らは別個に解の一意性を証明した⁹。◇

一次元拡散過程が境界点の近傍でどう振る舞うかは、Feller, Itô-McKean [2] によって研究され、

a regular boundary, an exit boundary, an entrance boundary, an infinite natural boundary, a finite natural boundary,

の 5 つに分類できることが示された¹⁰。

さて SDE (3.2) の係数は $k > 0$ で Lipschitz 条件をみたしているので、境界点 0 に到達しない範囲では the pathwise unique solution $\{k(t, w)\}$ が存在する。そこで、境界点 0 は $\{k(t, w)\}$ が有限時間で到達出来ない an infinite natural boundary であることを確かめる。

補題 3.2. 生産関数 f が (2.12a)+(2.12b) を満たすとき、境界点 0 は拡散過程 $\{k(t, w)\}$ の an infinite natural boundary である。◇

証明 まず、付録 A.1 の (A.1) で定義された φ の 0 近傍での挙動を調べる。

$$(3.3) \quad \beta \equiv 2\left(\frac{\lambda+n}{\sigma^2} - 1\right)$$

とおくと、

$$(3.4) \quad \varphi(y) = \left(\frac{y}{k_0}\right)^\beta \exp\left\{\frac{2s}{\sigma^2} \int_y^{k_0} \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi\right\}.$$

任意の $M > 0$ にたいし、 k_0 を十分小さくとると、(2.12a)+(2.12b) より、

$$f(\xi) > M\xi \quad \text{for } 0 < \xi < k_0$$

となる。この評価を (3.4) に適用し

$$\varphi(y) > \left(\frac{y}{k_0}\right)^\beta \cdot \left(\frac{k_0}{y}\right)^{2sM/\sigma^2} \rightarrow \infty \quad \text{as } y \rightarrow 0.$$

となる。ここで M は任意に大きいので、 φ は $k = 0$ 近傍で可積分ではなく、 $\lim_{k \rightarrow 0} |S(k)| = \infty$ となる。あとは、付録 A.1 で述べる量を計算すれば、補題の結論が得られる。□

命題 3.3. 生産関数 f が (2.12a)+(2.12b) を満たす。このとき SDE (3.2) には the pathwise unique solution $\{k(t, w)\}$ が存在する。◇

3.2 経済諸量の漸近挙動

1975 年に Merton [6] は、per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$ にたいし次の結論を導いた：

f が (2.12a)+(2.12b) をみたし、さらに

$$(3.5) \quad \lambda + n - \sigma^2 > 0$$

⁹ このノートでは、付録 A.1 で述べる境界点の分類を利用し、解の一意存在を確かめる。

¹⁰ 付録 A.1 にその結果を要約する。

とする。このとき, (A.3) で定義される $\mu(k) dk$ が per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$ の an invariant probability measure である。◇

ところが, この (3.5) を仮定することの必然性は不明確である¹¹。そこで, 我々は, (3.5) を仮定しないで $\{k(t, w)\}$ の漸近挙動を考えよう。

補題 3.4. f が (2.12a)+(2.12b) を満たしている。このとき (3.3) の β にたいし

$$(3.6) \quad \varphi(y) \simeq y^\beta \quad \text{for large } y. \quad \diamond$$

証明 Inada 条件 (2.12b) より $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ となるので,

$$s f(k) - (\lambda + n - \sigma^2) k \simeq -(\lambda + n - \sigma^2) k \quad \text{for large } k$$

となる。あとは簡単な計算で, 補題の結論が得られる。□

これより, Merton の仮定 (3.6) を外し (2.12a)+(2.12b) のみを仮定した場合に, 境界点 0 と ∞ は付録 A.1 に従って以下の通り分類できる:

(3.7)	$\lambda + n - \sigma^2/2$	< 0	≥ 0
	$k = 0$	an infinite natural	
	$k = \infty$	a finite natural	an infinite natural

つぎに 付録 A.2 で述べた既知の結果を参照すると, Merton の結論を拡張した結論が簡単に得られる:

命題 3.5. 生産関数 f は (2.12a)+(2.12b) を満たしている。

このとき, 係数 $0 < \lambda < 1$, $n > 1$, $\sigma > 0$ ¹² の大小関係により per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$ の漸近挙動は以下の通りになる。

- (i) $\lambda + n - \sigma^2/2 < 0$ のとき, 確率 1 で $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t, w) = \infty$.
- (ii) $\lambda + n - \sigma^2/2 \geq 0$ のとき, $\{k(t, w)\}$ は $(0, \infty)$ 上で recurrent であり, (A.3) で与えられる an invariant measure $\mu(k) dk$ にたいし (A.5) が成立。ただし等号が成立した場合, $\mu(k) dk$ は有限な測度ではない。◇

注意 3.6. 勤労人口 $\{L(t, w)\}$ の明示的な解は簡単に得られる:

$$L(t, w) = L(0) \exp\left\{\left(n - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t, w)\right\}$$

これより

- (i) $n \neq \sigma^2/2$ のとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t, w) = \begin{cases} 0 & n < \sigma^2/2 \\ \infty & n > \sigma^2/2, \end{cases} \quad a.s..$$

¹¹ (3.5) は, an invariant measure が存在するための十分条件ではあるが必要条件ではない, (3.10).

¹² 順に (2.4) の資本増加の摩擦係数, 勤労人口を表す SDE (3.1) の増加率, 確率振動の大きさ。

(ii) $n = \sigma^2/2$ のとき, $\{L(t, w)\}$ は $(0, \infty)$ 上で recurrent である, つまり

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} L(t, w) = \infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} L(t, w) = 0 \quad a.s. \quad \diamond$$

つぎに per-capita capital stock の成長率を調べてみよう. 確率項のない 定理 2.6 では, per-capita capital stock の成長率は

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = s \cdot \frac{f(k(t))}{k(t)} - (\lambda + n)$$

となるので, その時間平均は

$$\begin{aligned} \frac{\log k(t) - \log k(0)}{T} &= \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} dt = \frac{s}{T} \int_0^T \frac{f(k(t))}{k(t)} dt - (\lambda + n) \\ &\rightarrow s \cdot \frac{f(k^*)}{k^*} - (\lambda + n) = 0 \quad \text{as } T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

である.

一方 Random Solow Equation (3.2) でも, deterministic case と同様に

$$d(\log k(t, w))$$

を per-capita capital stock の成長率と定義する. すると Ito の公式から

$$(3.8) \quad \frac{\log k(T, w) - \log k(0)}{T} = \frac{s}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt - (\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma}{T} B(T, w)$$

となり, その時間平均の漸近挙動も調べることが出来る.

以上の結果をまとめる.

定理 3.7. 生産関数 f は (2.12a) と Inada 条件 (2.12b) をみたしている. このとき

- Per-capita capital stock $k(t, w)$,
- Per-capita capital stock の成長率の時間平均¹³

$$(3.9) \quad \rho(t, w) \equiv \frac{\log k(t, w) - \log k(0)}{t},$$

- 勤労人口 $L(t, w)$,

という三つの経済量の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動は以下の通り:

(3.10)	$\lambda + n - \sigma^2/2$	< 0	$= 0$	> 0
	$n - \sigma^2/2$	< 0		$= 0$
	$k(t, w)$	$\infty \quad a.s.$	recurrent [†]	recurrent [‡]
	$\rho(t, w)$	$r_1 \quad a.s.$	$0 \quad a.s.$	
	$L(t, w)$	$0 \quad a.s.$		recurrent ^b $\infty \quad a.s.$

¹³ $t \rightarrow \infty$ で, 拡散過程 $\{k(t, w)\}$ の Lyapunov index となる.

ここで “recurrent[†]” とは, $\{k(t, w)\}$ は $(0, \infty)$ 上で recurrent であるが (A.3) の an invariant measure $\mu(k) dk$ が有限でなく, その Cézaro 極限も

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T k(t, w) dt = \infty \quad a.s.$$

となることである. 一方 “recurrent[#]” では an invariant measure $\mu(k) dk$ が確率測度である. また r_1 は有限な定数で,

$$r_1 \equiv -(\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) > 0,$$

である. さらに “recurrent^b” とは, $\{L(t, w)\}$ が $(0, \infty)$ 上で recurrent であり, その invariant measure は $\exp\{x\} dx$ となることである. $\diamond$

証明 $k(t, w)$ 及び $L(t, w)$ の挙動は, 命題 3.5 と注意 3.6 で既に調べている. そこで, $\rho(t, w)$ の挙動を調べる.

まず $\lambda + n - \sigma^2/2 > 0$ の場合を扱うが, この場合は an invariant measure $\mu(k) dk$ は確率測度である. 重複対数の法則より,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} B(T, w) = 0 \quad a.s.$$

である. すると (3.8), (3.9), Ergodic Theorem (A.5) より

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho(T, w) = s \int_0^\infty \frac{f(y)}{y} \mu(y) dy - (\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) \quad a.s.$$

となる. この右辺を第 1 項を実際に計算しよう. (3.3) の β と (A.3)+(A.4) から

$$\begin{aligned} s \int_0^\infty \frac{f(y)}{y} \mu(y) dy &= s \int_0^\infty dy \frac{f(y)}{y} \frac{C}{\sigma^2 y^{2+\beta}} \exp\left\{-\frac{2s}{\sigma^2} \int_y^{k_0} \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi\right\} \\ &= \frac{s C \sigma^2}{2s} \int_0^\infty dy \frac{1}{\sigma^2 y^{1+\beta}} \left(\frac{2s}{\sigma^2} \frac{f(y)}{y^2} \exp\left\{-\frac{2s}{\sigma^2} \int_y^{k_0} \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi\right\}\right) \\ &= \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{y^{1+\beta}} \exp\left\{\frac{2s}{\sigma^2} \int_y^{k_0} \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi\right\} \Big|_{y=0}^\infty \\ &\quad + \frac{\sigma^2 C}{2} (1+\beta) \int_0^\infty dy \frac{1}{\sigma^2 y^{2+\beta}} \exp\left\{\frac{2s}{\sigma^2} \int_y^{k_0} \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi\right\} \\ &= \frac{\sigma^2 C}{2} (1+\beta) \frac{1}{C} = \lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

これより $\lim_{T \rightarrow \infty} \rho(T, w) = 0$ が導かれ, recurrent^b の場合の結論が示された.

つぎに, $\lambda + n - \sigma^2/2 = 0$ の場合, an invariant measure は $\int_0^\infty \mu(y) dy = \infty$ だが, 関数 $f(y)/y$ は $\mu(y) dy$ 可積分である. 任意の $M > 0$ にたいし

$$T \geq \int_0^T I_{(0, M)}(k(t, w)) dt$$

となるから, Ergodic Theorem (A.5) より

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt}{\int_0^T I_{(0, M)}(k(t, w)) dt} = \frac{\int_0^\infty \frac{f(y)}{y} \mu(y) dy}{\int_0^M \mu(y) dy} \quad a.s.$$

となる. ここで $M \rightarrow \infty$ とすると, $\int_0^\infty \mu(y) dy = \infty$ だから

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt = 0 \quad a.s.$$

となる. あとは前と同じ議論により, “recurrent[†]” の場合に $\rho(t, w) \rightarrow 0$ a.s. との結論が得られる.

残された $\lambda + n - \sigma^2/2 < 0$ の場合は, 証明が簡単なので割愛する. $\square$

4 Inada 条件の妥当性

我々は, 生産関数 $F(K, L)$ にたいして, Inada 条件 (2.8a)+(2.8b) を仮定した. しかし近年, 0 近傍での Inada 条件 (2.8a) は妥当ではないとの意見が提出されている, Kamihigashi [4].

すなわち, 生産関数 $f(k)$ の性質 (2.12b, 第 1 式) は, (2.8a) から導かれる. ところが平均値の定理を使うと,

$$\begin{aligned} F(K+1, L) - F(K, L) &= L \left(F\left(\frac{K+1}{L}, 1\right) - F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \right) = L \left(f\left(\frac{K+1}{L}\right) - f\left(\frac{K}{L}\right) \right) \\ &= L f'(y) \frac{1}{L} = f'(y), \quad y \in \left(\frac{K}{L}, \frac{K+1}{L}\right) \end{aligned}$$

となる. ここで L が十分大きいとき, $y \simeq 0$ となり, (2.12b, 第 1 式) から $f'(y) \simeq \infty$ となる. すなわち,

勤労人口が十分大きいとき, 資本を 1 単位増やすだけで, 生産量が極端に増加する

との奇妙な結論が導かれる.

そこで Kamihigashi は 生産関数 $f(k)$ にたいし, 次を仮定することを提案した:

仮定 4.1 (Kamihigashi [4]). $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ は C^2 -級の関数で, 以下を満たす.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &f(0) = 0 \text{ で strictly concave,} \\ &(\text{Kawahigashi 条件}) \quad 0 < \exists \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) \equiv \eta < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

注意 4.2. Kamihigashi 条件 (4.1) を仮定した場合, SDE (3.2) の係数は $[0, \infty)$ 上で Lipschitz 条件を満たしている. そのため, Inada 条件 (2.12b) を仮定した場合と異なり, pathwise unique な解の存在には何らの困難も生じない. $\diamond$

本節では, 0 近傍での Inada 条件 (2.12b, 第 1 式) に代えて Kawahigashi 条件 (4.1) を仮定し, per-capita capital stock $\{k(t, w)\}$ の $t \rightarrow \infty$ での挙動を調べる.

平均値の定理より

$$f(\xi) \simeq \eta \xi \quad \text{for small } \xi$$

となるので,

$$(4.2) \quad \varphi(y) \simeq y^\beta \exp\left\{-\frac{2s}{\sigma^2} \log y\right\} = y^{2(\lambda+n-\sigma^2-s\eta)/\sigma^2} \quad \text{for small } y.$$

これより 付録 A.1 に従うと, $\{k(t, w)\}$ の境界点 0 および ∞ は次のように分類される: $\lambda + n - \sigma^2/2 \equiv \theta$ とおく.

		$\theta < 0$	$0 \leq \theta \leq s\eta$	$s\eta < \theta$
(4.3)	$k = 0$	an infinite natural	an infinite natural	a finite natural
	$k = \infty$	a finite natural	an infinite natural	an infinite natural

この分類を 付録 A.2 で再録した結果に当てはめれば、次の結論が容易に得られる。

定理 4.3. 生産関数 f は Kamihigashi 条件 (4.1) をみたしている。このとき

- Per-capita capital stock $k(t, w)$,
- Per-capita capital stock の成長率の時間平均

$$\rho(t, w) \equiv \frac{\log k(t, w) - \log k(0)}{t},$$

諸量の $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動は以下の通り: $\lambda + n - \sigma^2/2 \equiv \theta$ とおく。

θ	$\theta < 0$	$\theta = 0$	$0 < \theta < s\eta$	$\theta = s\eta$	$\theta > s\eta$
(4.4)	$k(t, w)$	∞ a.s.	recurrent [†]	recurrent [‡]	recurrent [‡]
	$\rho(t, w)$	r_1 a.s.	0 a.s.		r_3 a.s.

ここで “recurrent[†]” あるいは “recurrent[‡]” とは、 $\{k(t, w)\}$ は $(0, \infty)$ 上で recurrent であるが (A.3) の an invariant measure $\mu(k) dk$ が有限でなく、その Cézaro 極限も

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T k(t, w) dt = \begin{cases} \infty & \text{a.s.} & \text{recurrent}^{\dagger} \\ 0 & \text{a.s.} & \text{recurrent}^{\ddagger} \end{cases}$$

となる意味である。一方 “recurrent[‡]” では an invariant measure $\mu(k) dk$ が確率測度である。

また r_1, r_3 は有限な定数で、

$$r_1 \equiv -(\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) > 0, \quad r_3 \equiv s\eta - (\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) < 0,$$

である。◇

注意 4.4. (i) 勤労人口 $\{L(t, w)\}$ は生産関数 f に無関係である。従って、定理 3.7 の結果

$$(4.5) \quad L(t, w) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{a.s.} & n - \sigma^2/2 < 0 \\ \text{recurrent} & n - \sigma^2/2 = 0 \\ \infty & \text{a.s.} & n - \sigma^2/2 > 0 \end{cases}$$

がそのまま成立している。

(ii) Inada 条件を仮定した 定理 3.7 と比較すると、(4.4) では、新たに per-capita capital stock $k(t, w)$ が確率 1 で 0 に収束する場合 ($\theta > s\eta$ の場合) が出現している。この場合でも $s\eta, \lambda$ の値が適切な範囲にあれば、勤労人口 $L(t, w)$ に関しては (4.5, 右辺) のどの事例も起こりえる。◇

定理 4.3 の証明 $k(t, w)$ の挙動は (4.3) と 付録 A.2 より明らかである. $\rho(t, w)$ の挙動を調べる.

まず $\theta = s\eta$ の場合を扱う. このとき 仮定 4.1 より

$$\varphi(y) \simeq y^{-1} \quad \text{for small } y, \quad \varphi(y) \simeq y^{-1+(2s\eta)/\sigma^2} \quad \text{for large } y$$

となり, (4.3) と 付録 A.2 より, $\{k(t, w)\}$ は recurrent だが, その an invariant measure $\mu(k) dk$ は

$$\mu(k) dk \simeq \frac{1}{\sigma^2 k} dk \quad \text{for small } k, \quad \mu(k) dk \simeq \frac{1}{\sigma^2 k^{1+(2s\eta)/\sigma^2}} dk \quad \text{for large } k$$

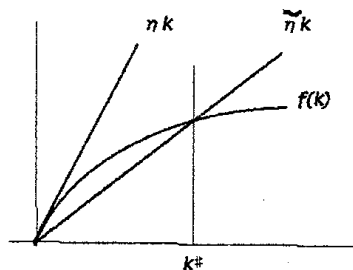
で有限な測度ではない. そこで

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt$$

を計算しよう.

仮定 4.1 より $0 \leq f(k)/k \leq \eta$ となるので,

$$(4.6) \quad 0 \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta dt = \eta.$$



つぎに, $0 < \tilde{\eta} < \eta$ なる定数 $\tilde{\eta}$ を任意に選ぶ. f は 仮定 4.1 を満たしているので,

$$f(k) = \tilde{\eta}k, \quad k > 0$$

を満たす唯 1 つの点 $k^\# > 0$ が存在する. ここで新しく 2 つの関数

$$h(k) \equiv \tilde{\eta}k, \quad \tilde{f}(k) \equiv \begin{cases} \tilde{\eta}k & 0 \leq k < k^\# \\ f(k) & k^\# \leq k \end{cases}$$

を定義する. さらに

$$g(k) \equiv h(k) - \tilde{f}(k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq k < k^\# \\ \tilde{\eta}k - f(k) & k^\# \leq k \end{cases}$$

とおくと, $g(k)/k$ は $\mu(k) dk$ 可積分関数となる.

さて任意の $\varepsilon > 0$ にたいし $\int_{\varepsilon}^{\infty} \mu(k) dk < \infty$ となるから, Ergodic Theorem (A.5) より

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{g(k(t, w))}{k(t, w)} dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \frac{g(k(t, w))}{k(t, w)} dt}{\int_0^T I_{(\varepsilon, \infty)}(k(t, w)) dt} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{g(y)}{y} \mu(y) dy}{\int_{\varepsilon}^{\infty} \mu(y) dy} \quad a.s.$$

となる. ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, 上式右辺は 0 に収束する. つまり

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h(k(t, w)) - \tilde{f}(k(t, w))}{k(t, w)} dt = 0 \quad a.s.$$

である. 一方

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h(k(t, w))}{k(t, w)} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\eta} dt = \bar{\eta}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\tilde{f}(k(t, w))}{k(t, w)} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\tilde{f}(k(t, w)) - h(k(t, w))}{k(t, w)} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h(k(t, w))}{k(t, w)} dt = \bar{\eta} \quad a.s. \end{aligned}$$

となる.

つぎに, 関数 $\tilde{f}$ の定義より $\tilde{f} \leq f$ となっているので,

$$(4.7) \quad \bar{\eta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\tilde{f}(k(t, w))}{k(t, w)} dt \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt \quad a.s..$$

ここで $\bar{\eta}$ は任意なので, $\bar{\eta} \uparrow \eta$ とすれば, (4.7) と (4.6) と併せて,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t, w))}{k(t, w)} dt = \eta \quad a.s.$$

が得られた. あとは定理 3.7 の証明と同じ議論により, $\theta = s\eta$ の場合に, $\rho(t, w) \rightarrow 0$ a.s. となることが示される.

また θ が他の場合は, 定理 3.7 と同様の方法で, 定理の結論は簡単に証明できる. $\square$

A 付録

A.1 1次元拡散過程の境界点

区間 $(0, \infty)$ 上の拡散過程 $\{k(t, w)\}$ が境界点 $0, \infty$ に到達できるかどうかは, canonical scale function $S(k)$ と speed measure $m(k) dk$ を調べることにより判定できる, Itô-McKean [2].

I. $k_0 \in (0, \infty)$ を任意に固定し,

$$(A.1) \quad \varphi(y) \equiv \exp\left\{-2 \int_{k_0}^y \frac{sf(\xi) - (\lambda + n - \sigma^2)\xi}{\sigma^2 \xi^2} d\xi\right\}, \quad y \in (0, \infty)$$

とおく. この φ にたいし

$$(A.2) \quad \begin{aligned} & \text{(scale function)} \quad S(k) \equiv \int_{k_0}^k \varphi(y) dy, \quad k \in (0, \infty) \\ & \text{(speed measure の密度関数)} \quad m(k) \equiv \frac{1}{\sigma^2 k^2 \cdot \varphi(k)}, \quad k \in (0, \infty), \end{aligned}$$

と定義する. Feller および Ito-McKean は, この S と m の挙動と $\{k(t, w)\}$ の挙動との関係をしらべ, 境界点を分類した. まず

$$A(k) \equiv \int_{k_0}^k dy \varphi(y) \int_{k_0}^y d\xi m(\xi), \quad B(k) \equiv \int_{k_0}^k dy m(y) \int_{k_0}^y d\xi \varphi(\xi)$$

とおき,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} A(k) &\equiv A_0, & \lim_{k \rightarrow 0} B(k) &\equiv B_0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} A(k) &\equiv A_\infty, & \lim_{k \rightarrow \infty} B(k) &\equiv B_\infty \end{aligned}$$

とする. これらの値に従って, 境界点 0 は以下のように分類される:

	a regular boundary	an exit boundary	an entrance boundary	a finite natural boundary	an infinite natural boundary
$ A_0 $	$< \infty$	$< \infty$	$= \infty$	$= \infty$	$= \infty$
$ B_0 $	$< \infty$	$= \infty$	$< \infty$	$= \infty$	$= \infty$
$ S(0) $	$< \infty$	$< \infty$	$= \infty$	$< \infty$	$= \infty$

(境界点 ∞ の分類も, $A_0, B_0, S(0)$ をそれぞれ $A_\infty, B_\infty, S(\infty)$ に置き換えれば同じである.)

II. 境界点が an entrance boundary, a finite natural, an infinite natural の場合, 拡散過程 $\{k(t, w)\}$ が有限時間でそこに到達する確率は 0 である. 一方, a regular boundary, an exit の場合には, 有限時間で到達する確率は 0 ではない.

また, 境界点が an exit boundary, a finite natural, an infinite natural の場合, そこから出発した $\{k(t, w)\}$ が内部に入る確率は 0 である. 一方, an entrance boundary の場合にはその確率は 1 となる. さらに a regular boundary の場合にはその確率は正だが 1 ではない.

A.2 1次元拡散過程の漸近挙動

左右の境界点が共に natural boundaries である 1次元拡散過程の漸近挙動も既に研究されている. その結果を再録する, Nishioka [8].

I. 境界点 0 および ∞ が infinite natural boundaries なら, $\{k(t, w)\}$ は $(0, \infty)$ 上で recurrent となり

$$(A.3) \quad \mu(k) \equiv \frac{m(k)}{C} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\sigma^2 k^2 \varphi(k)}$$

が an invariant measure の密度関数となる. ただし 定数 C は

$$(A.4) \quad C \equiv \begin{cases} \int_0^\infty m(k) dk & \text{if the integral is finite} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である.

さらに, 次の Ergodic Theorem が成立する:

Ergodic Theorem (Maruyama-Tanaka [5]) $\mu(y) dy$ -可積分である関数 g, h について

$$(A.5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T g(k(u, w)) du}{\int_0^T h(k(u, w)) du} = \frac{\int_0^\infty g(y) \mu(y) dy}{\int_0^\infty h(y) \mu(y) dy} \quad a.s..$$

ただし, 右辺の分母は 0 ではない. $\diamond$

II. 境界点の片側が a finite natural boundary, 他の片側が an infinite natural の場合は,

(i) $\{k(t, w)\}$ が有限時間で境界点に到達する確率は 0 である,

(ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t, w) = \begin{cases} 0 & a.s. \quad \text{if } 0 \text{ is a finite natural boundary} \\ & \text{and } \infty \text{ is an infinite natural} \\ \infty & a.s. \quad \text{if } 0 \text{ is an infinite natural boundary} \\ & \text{and } \infty \text{ is a finite natural.} \end{cases}$$

参考文献

- [1] Chang, F. and Malliaris, A. G., Asymptotic growth under uncertainty: Existence and uniqueness, Rev. Economics Studies, 59 (1987), 169-174.
- [2] Itô, K. and McKean, JR., H. P., Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, 1965.
- [3] Jensen, B. S. and Wang, C., Basic stochastic dynamic system of growth and trade, Rev. International Economics, 7 (1999), 378-402.
- [4] Kamihigashi, T., Almost sure convergence to zero in stochastic growth models, 11 pages, 2003, preprint.
- [5] Maruyama, G. and Tanaka, H., Some properties of one-dimensional diffusion processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, Math., 11 (1957), 117-141.
- [6] Merton, R., An asymptotic theory of growth under uncertainty, Rev. Economic Studies, 42 (1975), 375-393.
- [7] MIT Open Course Ware, Economic growth, 14.451 Lecture Notes, 2003, <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Economics/index.htm>
- [8] Nishioka, K., On the stability of two-dimensional linear stochastic systems, Kōdai Math. Sem. Rep., 27 (1976), 211-230.