

乱流速度場における大スケール揺らぎの統計熱力学形式による記述*

気象研究所 毛利英明 (Hideaki Mouri)
Meteorological Research Institute

1. はじめに

乱流では、外力が供給した運動エネルギーが、スケール間の相互作用を介して小スケール側に輸送され、最小スケールである Kolmogorov 長 η で粘性のため熱として散逸している [図 1]。外力が作用するスケール L 近傍の運動は、外力に依存し多様な振舞を示すが、この依存性はエネルギー輸送の過程で消失し、小スケール運動は普遍的な統計則に従う。よって小スケール運動は注目を集め、過去数十年間の研究から詳細な知見が得られてきた。

相互作用は全スケール間で存在するから [1], 外力が供給した運動エネルギーは大スケール側にも輸送され運動あるいは揺らぎを引き起こす [図 1]。エネルギー輸送の過程で外力依存性が消失するから、大スケール揺らぎは普遍性を持つ。定常乱流中では、大スケール側に平均エネルギー輸送が存在しないから、大スケール揺らぎは平衡状態にある。空間相関が無視し得るから加法的でもあり、非平衡で非加法な小スケール運動とは著しく異なる。つまり大スケール揺らぎは平衡系の統計熱力学で良く知られた熱的揺らぎ [2, 3] と類似の現象である。

大スケール揺らぎに関しては Landau が始めて指摘して以来 [4], 議論が続いてきたが、詳細は未解明である。実験や観測でも数値計算でも大スケール揺らぎを詳細に研究するには長大なデータが必要だが、こうしたデータの取得が最近まで困難だった。しかし測定技術が高度化した結果、実験から大スケール揺らぎを研究する機運が高まりつつある [5, 6]。本研究では、大スケール揺らぎ

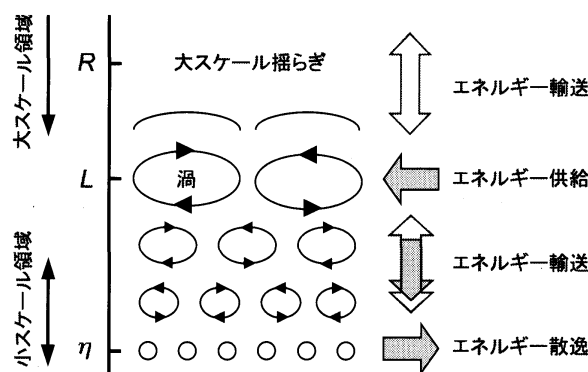


図 1: 定常な 3 次元乱流の大スケール運動と小スケール運動。

*Résumé of our manuscript available at <http://arxiv.org/abs/1010.5368>.

の統計則を統計熱力学形式 — 平衡系の統計熱力学と同じ数学的構造を持つ形式 [7, 8, 9, 10] — で記述し, 風洞実験データ [6] を用いて検証を行う.

2. 流れ場の設定と粗視化

定常な 3 次元乱流における 1 次元測線 x 上で, 或る速度成分の瞬時値 $v(x)$ を考える. 測線上で $v(x)$ は一様と仮定し, 空間平均 $\langle v \rangle$ は 0 とする. エネルギー供給の特徴的なスケール L として v^2 の相関長を用いる:

$$L = \frac{\langle (v^2 - \langle v^2 \rangle)^2 \rangle}{2\langle v^2 \rangle^2} \bar{L} \quad \text{with} \quad \bar{L} = \frac{\int_0^\infty \langle [v^2(x+r) - \langle v^2 \rangle][v^2(x) - \langle v^2 \rangle] \rangle dr}{\langle (v^2 - \langle v^2 \rangle)^2 \rangle}. \quad (1)$$

速度 v が正規分布に従う $\langle v^4 \rangle = 3\langle v^2 \rangle^2$ の場合, L と $\bar{L}$ の値は一致する. 相関長 L より十分に大きなスケール r で $v^2(x+r)$ と $v^2(x)$ は統計的に独立である.

大スケール揺らぎを表現するため, 測線 x を長さ R の区間に分割し, 各区間で運動エネルギー v^2 を粗視化する:

$$v_R^2(x_c) = \frac{1}{R} \int_{x_c-R/2}^{x_c+R/2} v^2(x) dx. \quad (2)$$

ここで区間の中心座標を x_c とした. 平均値 $\langle v_R^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$ のまわりで v_R^2 の分散は [11]

$$\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R (R-r) \langle [v^2(x+r) - \langle v^2 \rangle][v^2(x) - \langle v^2 \rangle] \rangle dr. \quad (3a)$$

スケール r が相関長 L に比べて十分に大きい場合, 相関 $\langle [v^2(x+r) - \langle v^2 \rangle][v^2(x) - \langle v^2 \rangle] \rangle$ は無視できる. 従って式 (1) と式 (3a) から

$$\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{4L}{R} \langle v^2 \rangle^2 \quad \text{if} \quad R \gg L. \quad (3b)$$

区間長 R が相関長 L に比べて十分に大きい場合 Rv_R^2 が加法的 [3] であることが解る. つまり或る区間における Rv_R^2 の値は, 統計的に独立な部分区間における値の和である.

3. 統計熱力学形式の構成

前節の関係式 (3b) に対応する統計熱力学の関係式として, 温度 T と系の大きさ R を変数とする正準分布においてエネルギー E の熱的揺らぎの分散を与える表式があげられる [2]:

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = C_R T^2 \quad \text{with} \quad C_R = \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_R. \quad (4)$$

式 (3b) と式 (4) を比較する. エネルギー E が加法的であることに注目すれば, 対応関係は

$$T = \frac{\langle v^2 \rangle}{\sqrt{\zeta}} \quad \text{and} \quad E = N \left[v_R^2 - (1 - \sqrt{\zeta}) \langle v^2 \rangle \right] \quad \text{with} \quad N = \frac{R}{4L} \gg 1. \quad (5a)$$

任意定数 ζ の値は後で定める [式 (9)]. 平均が $\langle v_R^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = \sqrt{\zeta}T$ となるから

$$\langle E \rangle = \zeta NT \quad \text{and} \quad C_R = \zeta N. \quad (5b)$$

長さ R の各区間は, 長さ $4L$ で平均エネルギー $\sqrt{\zeta}\langle v^2 \rangle$ そして総数 $N = R/4L$ の統計的に独立な部分区間から構成されていることが解る. 周囲の乱流場は温度 $T = \langle v^2 \rangle / \sqrt{\zeta}$ の熱浴と看做せる.

正準分布ではエネルギー E の分布 $P(E)$ を熱容量 C_R の表式から導出できる [2]. 熱容量 C_R とエントロピー $\langle S \rangle$ との関係 $C_R = T(\partial_T \langle S \rangle)_R$ を用いて式 (5b) の $C_R = \zeta N$ を積分すると

$$\langle S \rangle = \zeta N \left[\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + 1 \right]. \quad (6a)$$

ここで $\zeta N(1 - \ln T_0)$ は積分定数. Helmholtz の自由エネルギー $\langle F \rangle = \langle E \rangle - T\langle S \rangle$ は

$$\langle F \rangle = -\zeta NT \ln \left(\frac{T}{T_0} \right). \quad (6b)$$

分配関数 $Z = \exp(-\langle F \rangle/T)$ は

$$Z = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\zeta N}. \quad (6c)$$

状態密度 Ω は分配関数 Z から Laplace 変換 $Z(T) = \int_0^\infty \Omega(E) \exp(-E/T) dE$ の逆変換を用いて得られる:

$$\Omega(E) = \frac{E^{\zeta N-1}}{\Gamma(\zeta N) T_0^{\zeta N}}. \quad (6d)$$

ここで Γ は Gamma 関数. こうしてエネルギー分布 $P(E) = \Omega(E) \exp(-E/T)/Z(T)$ は積分定数 T_0 と無関係に

$$P(E) = \frac{E^{\zeta N-1} \exp(-E/T)}{\Gamma(\zeta N) T^{\zeta N}}. \quad (7)$$

最大値は $E = (\zeta N - 1)T$ で実現する. また極限 $N \rightarrow \infty$ で $P(E)$ は正規分布となる.

4. 風洞実験による検証

前節で得られた理論式 (7) から v_R^2 の分布が予言できる. この理論的予言を格子乱流・境界層乱流・噴流の実験データ [6] を用いて検証する.

実験には気象研究所の大型風洞を用いた. 流れ方向を x , 水平方向を y とする. 対応する流速成分は $U + u$ と v . ここで U は平均, u と v は変動である. 格子乱流の実験では, 風洞測定部の風上端に角材で作った格子を設置した. 格子間隔は 20 cm. 平均流速を 12 ms^{-1} に設定した. 風洞中心軸上の乱流が十分に発達した場所で, 熱線流速計を用いて流速 $U + u$ と v を測定した. 境界層乱流の実験では, 粗度として多数の煉瓦を風洞測定部の床面に設置した. 煉瓦の間隔は $\delta x = \delta y = 0.50 \text{ m}$. 風洞測定部の風上端における平均流速を 16 ms^{-1} に設定した. 境界層が十分に発達した場所の対数則層内で測定を行った. 噴流の実験では, 風洞内にノズルを設置した. ノズルの出口は長方形で水平方向に 2.1 m, 鉛直方向に 1.4 m. 出口における平均流速を 16 ms^{-1} に設定し, 流れが十分に乱

表 1: 格子乱流・境界層乱流・噴流の実験条件と乱流統計量 [6]: 動粘性係数 ν , 平均エネルギー散逸率 $\langle \varepsilon \rangle = 15\nu\langle(\partial_x v)^2\rangle/2$, Kolmogorov 速度 $u_K = (\nu\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}$, 横速度変動の標準偏差 $\langle v^2 \rangle^{1/2}$, 扁平度 $\langle v^4 \rangle / \langle v^2 \rangle^2$, Kolmogorov 長 $\eta = (\nu^3 / \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$, Taylor 長 $\lambda = [2\langle v^2 \rangle / \langle (\partial_x v)^2 \rangle]^{1/2}$, 相関長 L [式 (1)], Reynolds 数 $Re_\lambda = \langle v^2 \rangle^{1/2} \lambda / \nu$.

	ν $\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$	$\langle \varepsilon \rangle$ $\text{m}^2 \text{ s}^{-3}$	u_K m s^{-1}	$\langle v^2 \rangle^{1/2}$ m s^{-1}	$\langle v^4 \rangle / \langle v^2 \rangle^2$	η cm	λ cm	L cm	Re_λ
格子乱流	0.143	2.81	0.0796	0.683	2.98	0.0180	0.597	2.35	285
境界層乱流	0.143	12.6	0.116	1.96	3.05	0.0123	0.806	7.34	1103
噴流	0.139	2.60	0.0776	1.36	3.05	0.0179	1.21	12.9	1183

れた場所で測定を行った。時刻 t での流速 $u(t)$ と $v(t)$ を, Taylor 仮説 $x = -Ut$ を用い, 座標 x での流速 $u(x)$ と $v(x)$ に変換した。得られたデータは全長 80–130 km と非常に長い。実験条件と乱流統計量を表 1 にまとめる。

時間変動 $u(t)$ と $v(t)$ が定常だから空間変動 $u(x)$ と $v(x)$ は一様である。現実の乱流は風洞内の流れ方向 x に一様でない。しかし部分区間のスケール $4L$ 程度で $u(x)$ と $v(x)$ は風洞内に現実に存在した定常な空間変動と対応しており, こうした空間変動を連続的に結合することにより, 定常で一様な乱流の空間変動に対応する任意の長さ R の区間が得られるのである。本研究では $4L$ の値が相対的に小さく統計の精度が高い横速度 v に注目し, $N = R/4L$ の様々な値について v_R^2 を計算した [式 (2)]。

図 2 に $N = R/4L = 10, 30, 100$ における $v_R^2 / \langle v_R^2 \rangle$ の分布を示す。実線と点線は $\zeta = 1/2$ および 1 に対する理論曲線で N の値だけに依存する。 N が大きくなると分布が狭くなるが, $N = 100$ でも顕著な変動が存在することが解る [5, 6, 12, 13]。格子乱流・境界層乱流・噴流の実験結果は互いに良く一致し, $\zeta = 1/2$ に対する理論曲線とも一致している。

図 3 に $n = 2, 3, 4$ における $\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^n \rangle / \langle v_R^2 \rangle^n$ の値を $N = R/4L$ の関数として示す。また歪度 $\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^3 \rangle / \langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^2 \rangle^{3/2}$ と尖度 $\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^4 \rangle / \langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^2 \rangle^2 - 3$ の値も示す。理論的には式 (3b) と式 (5) から

$$\langle E \rangle = \zeta NT \quad \text{and} \quad \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \zeta NT^2. \quad (8a)$$

また式 (7) から

$$\langle (E - \langle E \rangle)^3 \rangle = 2\zeta NT^3 \quad \text{and} \quad \langle (E - \langle E \rangle)^4 \rangle = (3\zeta^2 N^2 + 6\zeta N) T^4. \quad (8b)$$

関係式 (8) から得られる v_R^2 の関係は N の値だけに依存する。格子乱流・境界層乱流・噴流の実験結果は互いに良く一致し, $N \gtrsim 10^1$ では $\zeta = 1/2$ に対する理論曲線とも一致している。

以上の議論から, 風洞実験で得た v_R^2 の分布を統計熱力学形式の理論式 (7) を用いて再現するには

$$\zeta = \frac{1}{2} \quad (9)$$

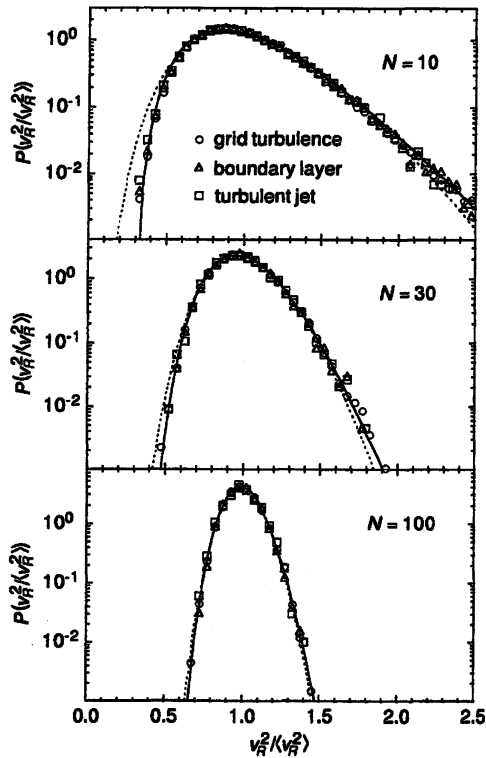


図 2: $N = R/4L = 10, 30, 100$ における $v_R^2 / \langle v_R^2 \rangle$ の確率密度分布。○ は格子乱流。△ は境界層乱流。□ は噴流。実線と点線は $\zeta = 1/2$ および 1 に対する理論曲線。

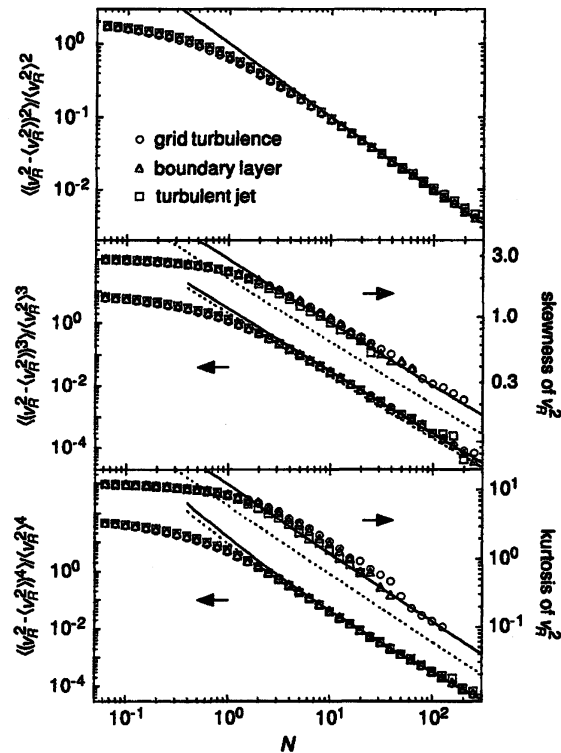


図 3: $\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^n / \langle v_R^2 \rangle^n \rangle$ を $N = R/4L$ の関数として示す ($n = 2, 3, 4$). 歪度 $\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^3 \rangle / \langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^2 \rangle^{3/2}$ と尖度 $\langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^4 \rangle / \langle (v_R^2 - \langle v_R^2 \rangle)^2 \rangle^2 - 3$ も示す。記号は図 2 と同じ。実線と点線は $n = 2$ において一致。

が必要と解る。すると関係式 (5b) から $\langle E \rangle = NT/2$ が得られるが、古典統計力学で成立するエネルギー等分配則に他ならない [2, 3]。乱流の大スケール変動を古典統計力学の形式に書き換えて $\zeta = 1/2$ を説明することが可能なのかもしれない。

5. まとめ

乱流の大スケール揺らぎを統計熱力学形式で記述することを試みた。乱流エネルギー v_R^2 の揺らぎは、流れ場に依存しない普遍性を持つ [図 2 と図 3]。揺らぎの分布を、正準分布におけるエネルギー E の熱的揺らぎとの類似性に着目して、統計熱力学形式 [式 (6)] を構成して再現した。乱流は大スケール揺らぎを通して統計力学と関連づけることが可能なのである。

統計熱力学形式による記述は Onsager [7] が 2 次元乱流について提案したものが良く知られている。同様の記述が定常で一様な 3 次元乱流の大スケールにおいても存在し得るのである。

大スケール揺らぎを統計熱力学形式を用いて記述することは v_R^2 以外の物理量についても可能である。揺らぎが定常かつ一様で関係式 (1) のように相関長が定義できるなら、大スケールでの分散

は式 (3b) の形式に書かれる。分散の表式を熱的揺らぎの表式 (4) と比較すれば、式 (5a) のような対応関係ひいては式 (6) のような統計熱力学形式が得られる。本研究で調べた 1 次元測線上での揺らぎだけでなく、2 次元や 3 次元空間における揺らぎについても同様である。乱流以外の様々な系の大スケール揺らぎについても、統計熱力学形式が存在すると期待される。

謝辞

研究会で有益な議論やコメントをいただいた皆様に感謝いたします。本研究は科研費 22540402 の助成を受けました。

参考文献

- [1] J. A. Domaradzki and R. S. Rogallo, *Phys. Fluids A* **2**, 413 (1990).
- [2] 久保亮五・市村浩・碓井恒丸・橋爪夏樹, 大学演習 熱学・統計力学 (裳華房, 1961).
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, 3rd ed. (Pergamon, 1980), Part 1. 和訳はランダウ・リフシッツ, 統計物理学 第 3 版 (岩波書店, 1980).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, 1959). 和訳はランダウ・リフシッツ, 流体力学 (東京図書, 1970).
- [5] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima, *Phys. Fluids* **18**, 015103 (2006).
- [6] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka, *Phys. Fluids* **21**, 065107 (2009). データ G1, B2, J1 を本研究で用いた.
- [7] L. Onsager, *Nuovo Cimento, Suppl.* **6**, 279 (1949).
- [8] Ya. G. Sinai, *Russ. Math. Surv.* **27**, 21 (1972).
- [9] 藤坂博一, 非平衡系の統計力学 (産業図書, 1998).
- [10] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2004).
- [11] S. O. Rice, in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, edited by N. Wax (Dover, 1954), p. 133.
- [12] A. Praskovsky and S. Oncley, *Fluid Dyn. Res.* **21**, 331 (1997).
- [13] J. Cleve, M. Greiner, and K. R. Sreenivasan, *Europhys. Lett.* **61**, 756 (2003).