

Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について (I)

京大 理 室政和.

§0 序

Prehomogeneous vector space (G, V, χ) を考える。
その real form $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, \chi)$ をひとつきめる。そして $|\chi|^S$
という hyperfunction の Fourier 変換を求めることを考
える。ある条件のもとで、この問題は、zero section と 原
点の conormal における、 $|\chi|^S$ の 同位数の関係を求めるこ
とであることが佐藤幹夫氏によ、指摘され、具体的にその
関係を求めるアルゴリズムが、柏原正樹氏によ、はじめ
て決定された。(柏原-三輪[1]参照)そして具体的な計
算は、鈴木[2]によ、こ、いっつかなされている。

しかしながら、常に計算が可能であったわけではない。た
とえば、 $G = GL(\underbrace{n}_{\square}, \mathbb{R}) \times SO(\underbrace{p, q}_{\square})$, p or $q < n$ の相対
不変式の Fourier 変換は、柏原-三輪[1]の方法によ、こた
けでは、不可能である。

この場合には、二次型式と言われる型の、相対不変式の、
 同伴数のつながりの公式をあてはめることにより、計算が
 できる。その公式は、相原正樹氏により、提出された。([3]
 を参照)

今日の講演では、次のことがなされた。

1) [3] においては、二次型式の局所化を行って、公式を
 導いたが、さらに一般の *prehomogeneous vector space* の
 相対不変式の局所化、およびつながりの公式の予想が提出
 され、Matrix の determinant, binary cubic forms の dis-
 criminant などにおいて実際正しいことが示された。

$$2) \text{ i) } G = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q, \mathbb{R}) \quad V = M(n, m, \mathbb{R})$$

$$f = \det X I_{p,q}^t X \quad T \in T^*L \quad X = m \times n \text{ 行列}$$

$$\text{ii) } G = GL(n, \mathbb{C}) \times SU(p, q, \mathbb{C}) \quad V = M(n, m, \mathbb{C})$$

$$f = \det X I_{p,q}^t \bar{X}$$

$$\text{iii) } G = GL(n, \mathbb{H}) \times SU(p, q, \mathbb{H}) \quad , \quad V = M(n, m, \mathbb{H})$$

$$f = \det X I_{p,q}^t \bar{X}$$

の相対不変式の Fourier 変換の計算がなされ、これによって P, q に条件のつかない公式が出た。

その後の発展、および計算などは、すべて次回の報告にゆずり、今回は、とくに計算のやり方と結果を中心にしておいて報告する。公式の並びき方の詳しいことは、[3]の前半に示してある。全体を通じて (G, V, f) は regular であることを仮定する。

文 献

- [1] 柏原-三輪 Micro-local calculus と 概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換
(数研講究録 238, p60 ~ p147)
- [2] 鈴木利明. 概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換について (修士論文)
- [3] 佐藤-柏原-三輪-屋 Imaginary Lagrangian の現われる Fourier 変換について
(数研講究録 "超函数と線型微分方程式 IV" に出版予定)

§1 計算法及び簡略化.

(G, V, f) を (Complex) prehomogeneous vector space としよう。 $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, f)$ とそのひとつの Real form とする。すると $V_{\mathbb{R}} = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_N$ と connected Component 分解をとることができる。そこで、

$$|f|_i^S = \begin{cases} |f(x)|^S & x \in V_i \\ 0 & x \notin V_i \end{cases}$$

とおいたとき、 $\sum_{i=1}^N C_i^0 |f(x)|_i^S$ の Fourier 変換を考える。

Definition (同伴数).

$\mathcal{W} \in f^S$ の H に関する Maximally over determined system とする。そして $\text{Supp}(\mathcal{W}) = \bigcup \Lambda_i \subset T^*V$ と適切に成分分解とある Λ_i が simple な Lagrange mf とするとき Λ_i を real に制限した $\Lambda_i^{\mathbb{R}} = \bigcup \Lambda_i' \subset FS^*V_{\mathbb{R}}$ の各 connected Component 上の solution の base として $|f_{\Lambda_i}|^S \sqrt{\omega_{\Lambda_i}} |dx|$ ととることができる。この Constant 係によつて $\mathcal{W}$ の solution をあらわすことができる。この Constant $C_i^0 \in \mathcal{W}$ の Λ_i の同伴数という。($|f_{\Lambda_i}|^S$, ω_{Λ_i} の定義については、柏原-三輪を参照のこと。)

さて、 Λ_i の同伴数たち (C_i^0) と Λ_i' の同伴数たち (C_i^0') の間には、線型な関係がある。これを同伴数の

間のつながりの行列という。とくに, zero section V と原点, の conormal V^* は V の support になっている。

以下, (G, V, f) は regular であることを仮定する。
すると, V_R と V_R^* の Connected Component の数は同じである。
同位数の間のつながりの行列を $A(S)$ とするとき,
Fourier 変換は次の式で与えられる。

Theorem (柏原)

$$\begin{bmatrix} |f(x)|_1^S \\ \vdots \\ |f(x)|_N^S \end{bmatrix} = \int (\mathbb{Q}\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0|^S |C_1|^S A(S) \begin{bmatrix} |f^*(y)|_1^{-S-\frac{n}{r}} \\ \vdots \\ |f^*(y)|_N^{-S-\frac{n}{r}} \end{bmatrix} \exp \langle x, y \rangle dy$$

$$\begin{cases} C_0 = f^*(y) f(\text{grad}_y \log f^*(y)) \\ C_1 = f^*(y)^{\frac{2n}{r}} \text{Hess} \log f^*(y) \end{cases} \quad \begin{aligned} r &= \deg f \\ n &= \dim V. \end{aligned}$$

ただし, $D_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ は, $-D_{y_i} \exp \langle x, y \rangle = x_i \exp \langle x, y \rangle$ とする。
ように定義して, $\text{grad}_y = (D_{y_1}, \dots, D_{y_n})$ である。そして
Hess は $d \text{grad}_y$ で与えられる。([3] 参照)

ただしこれは相対不変式が, 一個の場合である。多数の場合も, 同様の考察はできる。

さてこの定理によって, V_R と V_R^* の間の同位数のつながりの行列を求めることに問題は帰着された。柏原-三輪においては, これを求めるために, V_R と V_R^* までを余次元

1 の Lagrange mfs で、つまり、その間の同位数の関係を求め、それを総和することによって、 $V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ の間の同位数のつながりの行列を求める方法を示した。これは言わば、 $\mathcal{Q}^S$ というのも、とも基本的な Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換を何度もやったものであると思、これもよい。あるいは、 $\mathcal{F}^S$ のみならず、Maximally overdetermined system を Micro-local に、 $\mathcal{Q}^S$ のみならず、Maximally overdetermined system に直して、つながりの行列を求めたのであつた。

しかしながら、すでに、Fourier 変換のわかっている、Prehomogeneous vector space の相対不変式の Complex power が、みえ、Maximally overdetermined system が、途中に出てくれば、それとそのまま適用すれば、よいはずで、これにより、計算は簡略化されるはずである。そこで次の予想を提出する。

Conjecture

あるきやくな、相対不変式-個の regular prehomogeneous vector space $(G, V, \mathcal{F})$ において、

$$\begin{bmatrix} |\mathcal{F}|_1^s \\ \vdots \\ |\mathcal{F}|_2^s \end{bmatrix} = \int_{V^*} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0| \sqrt{|C_1|} {}^t A(S) \begin{bmatrix} |\mathcal{F}^*|_1^{-s-\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ |\mathcal{F}^*|_2^{-s-\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \exp i \langle x, y \rangle dy$$

$$C_0 = f^*(y) f(\text{grad log } f^*(y))$$

$$r = \deg f.$$

$$C_1 = f^*(y)^{\frac{2n}{r}} \text{Hess. log } f^*(y)$$

$$n = \dim V$$

が成立してゐるとする。そしてさらに別の Prehomogeneous vector space (G', V', f') があって、その相対不変式 f' の complex power f'^s のみならず Maximally overdetermined system $\mathcal{H}\mathcal{Z}_{f'^s}$ の局所化 (すなわち f'^s ののみならず $\mathcal{H}\mathcal{Z}_{f'^s} \in \text{Micro-local}$ に quantized contact transformation で変換すること) によつて f' ののみならず Maximally overdetermined system $\mathcal{H}\mathcal{Z}_{f'}$ がでてきたとする。このとき f' のの原点の conormal, zero section に対応する $\mathcal{H}\mathcal{Z}_{f'^s}$ の support $\in \Lambda' \cap \Lambda$ とするとき、 $\Lambda^{\mathbb{R}}, \Lambda'^{\mathbb{R}}$ の同位数のつながり行列は、次のようにあらわされる。

$$A(\lambda) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda \wedge \Lambda')) \\ \vdots \\ \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_\ell) - \tau(\Lambda \wedge \Lambda')) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \Lambda_i \quad \Lambda'^{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \Lambda'_i$$

$$\text{そして } \tau(\Lambda_i) = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{A \in \mathcal{O}_f} \langle Ax_i, -^t Ay_i \rangle$$

$$\tau(\Lambda \wedge \Lambda') = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{A \in \mathcal{O}_f} \langle Ax, -^t Ay \rangle$$

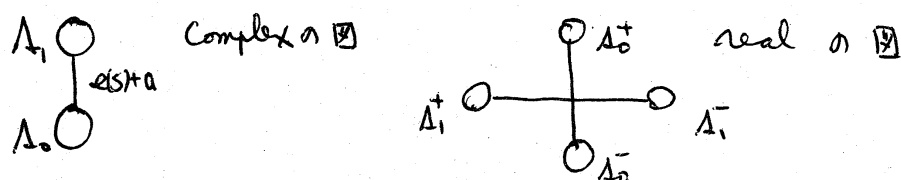
(x_i, y_i) は Λ_i の generic point. (x, y) は $\Lambda^{\mathbb{R}} \cap \Lambda'^{\mathbb{R}}$ の generic pt.

そして λ は, (G, V, f) の f^S の原点の conormal の order が, $\Re s + a$ のとき, $\text{ord}_\lambda f^S - \text{ord}_{\Lambda_1} f^S = \Re \lambda + a$ になり, 2 になる。

もしこの Conjecture が正しいとすれば, 次の定理は, その系として出る。

Theorem

i) 交わりの局所化が, α^S のとき, つなぐりの行列は



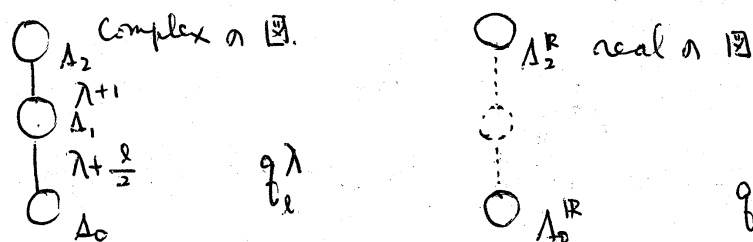
$C_0^\pm \in \Lambda_0^\pm$ の同伴数, $C_1^\pm \in \Lambda_1^\pm$ の同伴数.

$$\begin{bmatrix} C_0^+ \\ C_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\alpha(s)+a)) & \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\alpha(s)+a)) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\alpha(s)+a)) & \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\alpha(s)+a)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(\Lambda_1^+) - \tau(\Lambda_1 \cap \Lambda_0) \\ \tau(\Lambda_1^-) - \tau(\Lambda_1 \cap \Lambda_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_0^+ \\ C_1^- \end{bmatrix} = z^\alpha, \quad \alpha(s) + a = \text{ord}_{\Lambda_1} f^S - \text{ord}_{\Lambda_0} f^S + \frac{1}{2}.$$

(柏原 - 三輪 P.84)

ii) つなぐりが, 二次型式に局所化されるとき, するなり



$g_{\ell}^1 = \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i^2 \right)^{\lambda}$ の H^k は
Maximally overdetermined system.

このとき、 $C_0 = C_2 \left(-\frac{\lambda \ln \pi \lambda}{\pi} \right) \Gamma(\lambda+1) \Gamma(\lambda+\frac{\ell}{2}) \exp \frac{\pi}{4} (I(\Lambda_2) - I(\Lambda_2 \cap \Lambda_0))$

そしてここで

$$\lambda+1 = \text{ord}_{\Lambda_1} f^S - \text{ord}_{\Lambda_1} f^S + \frac{1}{2}$$

$$\lambda+\frac{\ell}{2} = \text{ord}_{\Lambda_1} f^S - \text{ord}_{\Lambda_0} f^S + \frac{1}{2}$$

そして実際に、この Conjecture は、相対不変式がわかっている場合、(たとえば symmetric matrix の determinant, 通常の matrix の determinant, binary cubic form の discriminant など……) については成立することが、たしかめられている。(証明は次回の報告を見ていただく。)。

§2 具体的な Fourier 変換の計算.

この節では Fourier 変換のための、同位数のつなかりを示す行列を求めることを目的とする。i) ii) iii) で、各々の

場合 $G = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q)$

$$G = GL(n, \mathbb{C}) \times SU(p, q)$$

$$G = GL(n, \mathbb{H}) \times Sp(p, q)$$

を示しているとする。

まず、相対不変式や内積を書きおこう。

以下 相対不変式、内積、表現と反傾表現、反傾表現による相対不変式、 $|C_0|, |C_1|$ の定数項、相対不変式の degree、変数の数、の順に書き並べてゆく。

$$i) \quad f(X) = \det(X I_{p,q} {}^t X) \quad \langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(X I_{p,q} {}^t Y)$$

ただし X は $n \times m$ 行列で

$$X \mapsto g X h$$

$$Y \mapsto {}^t g^{-1} Y h \quad (g, h) \in G$$

$$f^*(Y) = \det(Y I_{p,q} {}^t Y)$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{mn} \quad \deg f = 2n \quad \dim X = nm.$$

そして f, f^* の character は $\chi = (\det g)^2 \quad \chi^* = (\det g)^{-2}$ である。

$$ii) \quad f(X) = \det(X I_{p,q} {}^t \bar{X}) \quad \langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(X I_{p,q} {}^t Y)$$

ただし X は $n \times m$ (complex) 行列で

$$X \mapsto g X h$$

$$Y \mapsto {}^t g^{-1} Y h \quad (g, h) \in G$$

$$f^*(Y) = \det(Y I_{p,q} {}^t \bar{Y})$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 4^{mn} \quad \deg f = 2n \quad \dim X = 2nm.$$

そして f, f^* の character は $\chi = (\det g)^2 \quad \chi^* = (\det g)^{-2}$ である。

iii) まず, $L: Z = x + \sqrt{-1}y \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & x \end{pmatrix}$ という

H の $GL(2, \mathbb{C})$ への埋め込みを定義する。したがって自然に $n \times m$ H 行列を $2n \times 2m$ $\mathbb{C}$ 行列へ埋め込むことが、できる。

$$f(X) = \det L(X I_p {}^t \bar{X}) \quad \langle X, Y \rangle_{\text{Re } T_n} L(X I_p {}^t \bar{Y})$$

$E \in L$ X は $n \times m$ (quaternion) 行列で、

$$X \mapsto g X h$$

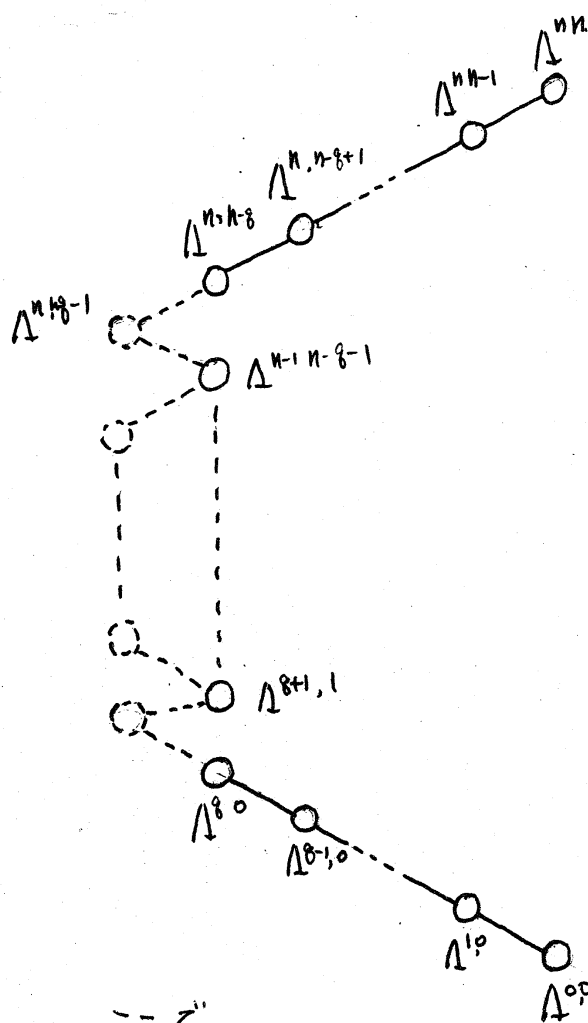
$$Y \mapsto {}^t g^{-1} Y h \quad (g, h) \in G.$$

$$f^*(Y) = \det L(Y I_p {}^t \bar{Y})$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 4^{2nm} \quad \deg f = 2n \quad \dim X = 4nm.$$

そして f, f^* の character は $\chi = (\det L(g))^2 \quad \chi^* = (\det L(g))^{-2}$ である。

次に complex 領域 T^*V 上での極大過剰^決決定系 W_C を定義し、その holonomy diagram を書く。この W_C の real pure imaginal tangent bundle $\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}$ への制限が、ちょうど B^S のみならず 極大過剰決定系と等しいのである。たゞしここでは、同伴数のつながり)と求めるのに必要な Lagrangian $\mathcal{M}_f$ のみを書く。以下は $P > n$ を仮定する。



$= z''$

$$E_r' = \begin{bmatrix} I_{r'} \\ \vdots \\ I_{r''} \end{bmatrix}$$

$$p > n$$

$$\Lambda^{n-i, n-g-i}_{(r')} \quad (l_i = n-g-i)$$

$$= \begin{bmatrix} I_{l_i} & & \\ & & \\ & & I_g \quad I_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \\ & I_{l_i} & \\ & & E_g^{r'} \quad E_g^{r'} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{n-k, n-g-k}_{(l_1, l_2, r')} \quad (k=r)$$

$$= \begin{bmatrix} I_{l_1} & & \\ & & \\ & & I_{l_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & E_r^{r'} \quad E_r^{r'} \end{bmatrix}$$

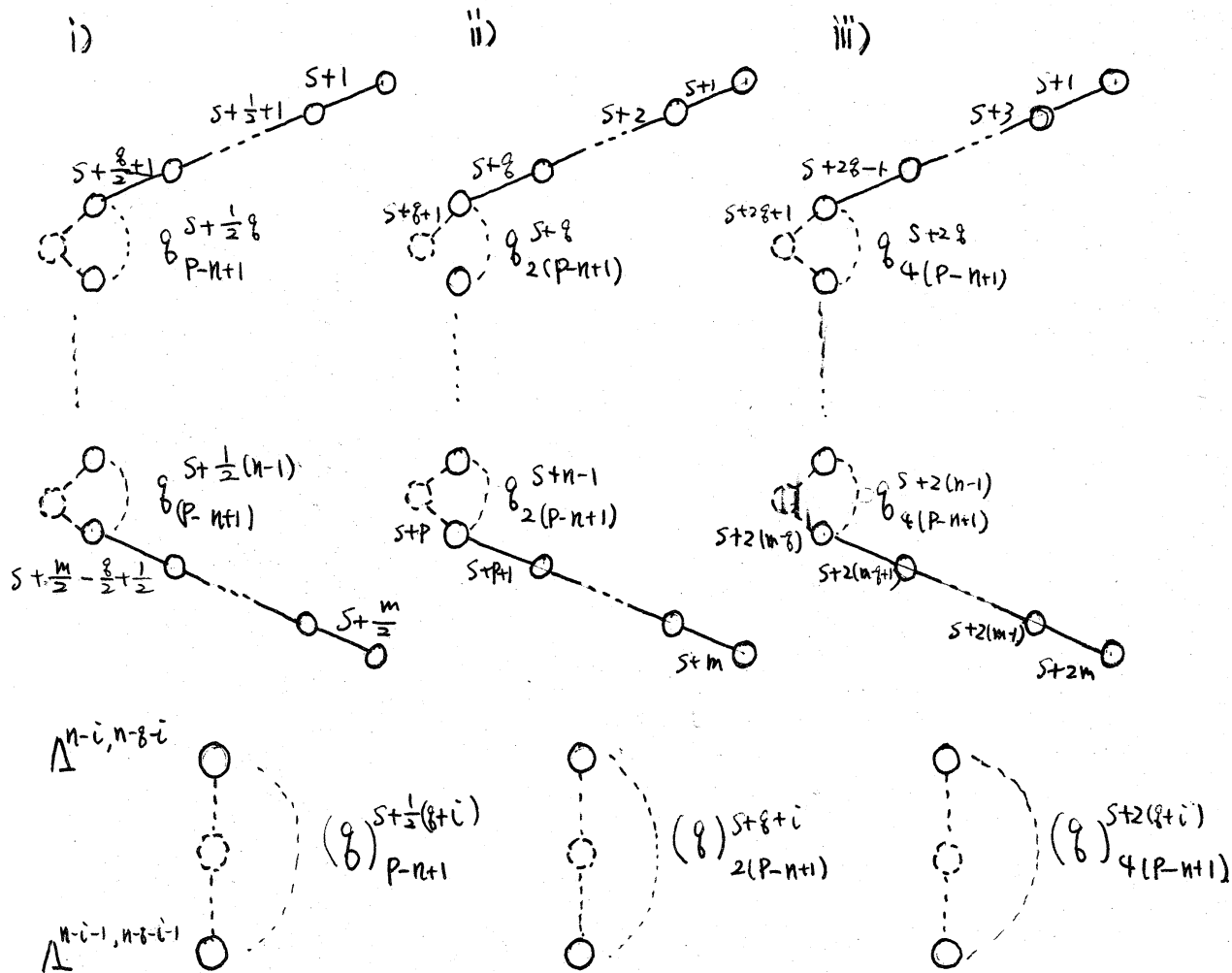
$$\Lambda^{n-k, n-g-k}_{(l_1, l_2, r')} \quad (k=r)$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & I_{l_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & I_{l_2} \end{bmatrix}$$

$\leftarrow p \quad * \quad g \rightarrow$

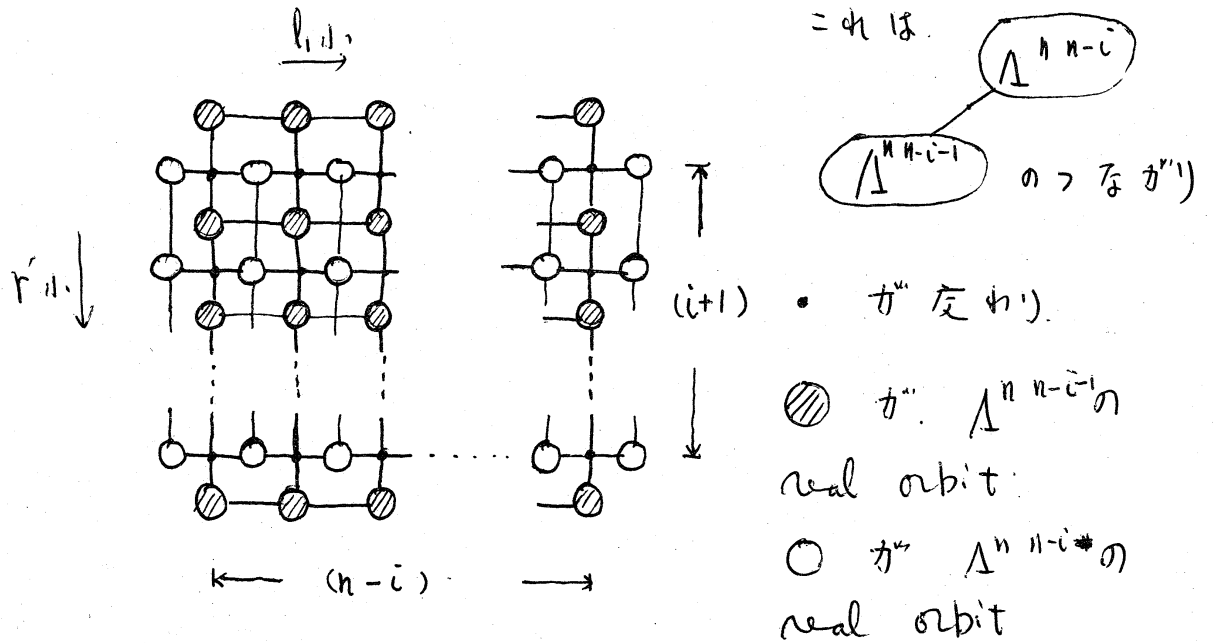
() 内は complex では同一 orbit (Lagrangian) としても real に制限すると、いくつかに分かれるため、それらを区別するため導入した index である。

次につるがりの様子を書き入れよう。ここで、 $(S+i)$ と、書いたのは、余次元 1 の good intersection ([1]) であ

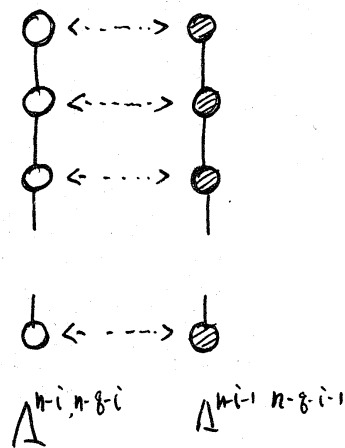


i), order 差 $+\frac{1}{2}$ が, $(S+i)$ であることを示している。また $q_{\ell}^{\dagger}$ と書いたのは, その極大過剰決定系は Micro-local に $(\sum_{i=1}^p x_i^2)^{\dagger}$ のみならず, 極大過剰決定系と同型であることを言っている。

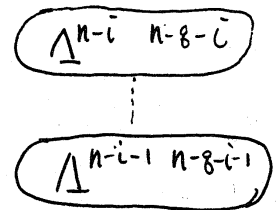
次に Real での orbit (Lagrangian) の Connected component 分解を示し, あわせて, つながりの状態 (まじわり方) を書く。



$\Lambda^{n, n-i}$ において いちばん左上が $\Lambda_{(n-i, 0, i)}^{n, n-i}$ で
 下に進みにして r' が小さくなり、右へ進めば
 l_1 が小さくなり、とゆく。 $\Lambda^{n, n-i-1}$ も同様。



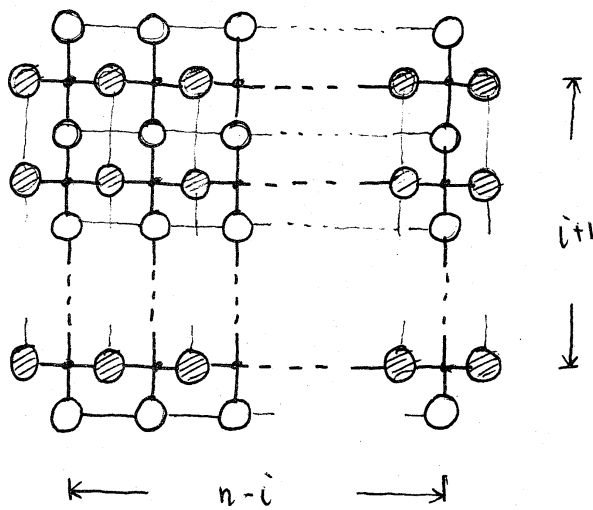
これは



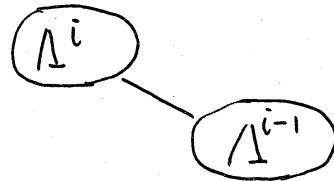
の間につながり。

右々いちばん上の ○ が $\Lambda_{(8)}^{n-i, n-8-i}$
 $\Lambda_{(8)}^{n-i-1, n-8-i-1}$ をあらわしてゐる。

下へいくにしたがって r' が小さくなり、とゆく。



これは



のつながり。

• が交わり。

● が Λ^{i-1} の real orbit

○ が Λ^{n-i} の real orbit

Λ^i においては いちばん左上が $\Lambda^i_{(n-i,0,i)}$ をあらわし、
右に進むにしたがって r' が小さくなる、つまり、下へ進めば
 l_1 が小さくなる、つまり、 Λ^{i-1} も同様。

次に Maslov index による修正の項を書いておこう。

$$\begin{array}{ccc}
 & + \Lambda^{n, n-k-1}_{(l_1-1, l_2, r'+1)} & \\
 + \Lambda^{n, n-k}_{(l_1, l_2, r)} & \text{---} & \Lambda^{n, n-k}_{(l_1-1, l_2+1, r')} \\
 & \Lambda^{n, n-k-1}_{(l_1-1, l_2, r')} &
 \end{array}$$

によるものは、

$$i) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{4} \sqrt{1} (k-2r') \\ \exp -\frac{\pi}{4} \sqrt{1} (k-2r') \end{bmatrix}$$

$$ii) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{2} \sqrt{1} (k-2r') \\ \exp -\frac{\pi}{2} \sqrt{1} (k-2r') \end{bmatrix}$$

$$iii) \begin{bmatrix} \exp \sqrt{1} (k-2r') \\ \exp -\sqrt{1} (k-2r') \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \Lambda_{(r')}^{n-j, n-g-j} \\ | \\ \Lambda_{(r')}^{n-j-1, n-g-j-1} \end{array}$$

の間 においては.

$$i) \exp \frac{\pi}{4} \sqrt{1} (g-2(g-r'))$$

$$ii) \exp \frac{\pi}{2} \sqrt{1} (g-2(g-r'))$$

$$r' = g, g-1, \dots, 0$$

$$iii) \exp \pi \sqrt{1} (g-2(g-r'))$$

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda_{(l_1, l_2, r')}^{r, 0} & \\ & | & \\ \Lambda_{(l_1+1, l_2, r'-1)}^{r-1, 0} & & \Lambda_{(l_1, l_2+1, r'-1)}^{r-1, 0} \\ & | & \\ & \Lambda_{(l_1, l_2, r'-1)}^{r, 0} & \end{array}$$

によるものは.

$$i) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{4} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \\ \exp -\frac{\pi}{4} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

$$ii) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{2} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \\ \exp -\frac{\pi}{2} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

$$iii) \begin{bmatrix} \exp \pi \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \\ \exp -\pi \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

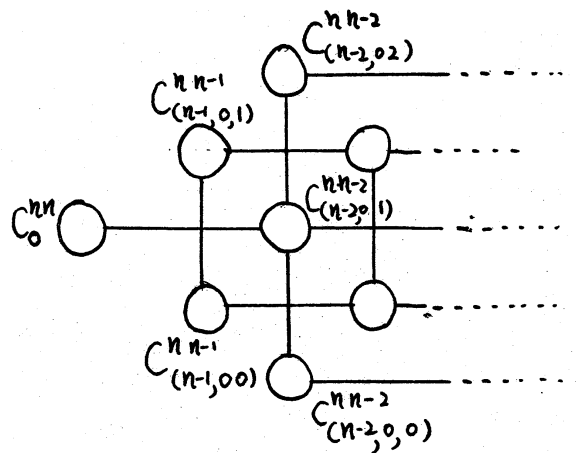
∇ 人上によ、この計算に必要な資料は、すべてそろった。あとは、これによ、この計算をすればよい。しかし、最初と最後（すなわち、zero section と、原点の conormal）の間の、同伴数の関係を求めるためには、少々工夫を要する。ここでは、多項式の係数が、同伴数をあらわすように、多項式をつくら、て、それとうまく、計算して求めてゆく方法を示そう。

例として iii) の場合をとってみる。

まず、 Λ^{nn} から $\Lambda^{n, n-g}$ までの同伴数のつながりを記述する行列を求めてみよう。 Λ^{nn} は、 $r=0$ であるから、 $(g+1)$ 個の連結成分、 $\Lambda_{(n-i, i, 0)}^{nn}$ $i=0 \cdots g$ と分かれる。

各々の同伴数を C_i^{nn} ($i=0 \cdots g$) と書く。

また Δ^{nn-g} もやはり $\Delta_{(n-g, c, r')}^{nn-g}$ ($r'=0, \dots, g$) と g 個の連結成分に分かれる。各々の同伴数は $C_{r'}^{nn-g}$ ($r'=0 \cdots g$) とあらわすものとする。



同伴数の関係を $\frac{\Gamma(\dots)}{\sqrt{2\pi}}$ の定数倍の part を除いて計算してみよう。まず C_0^{nn} と関係のある同伴数としてみる。

$$\begin{bmatrix} C_{(n-1, 0, 1)}^{nn-1} \\ C_{(n-1, 0, 0)}^{nn-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+1) \\ \exp \frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+1) \end{bmatrix} [C_0^{nn}]$$

$$\begin{bmatrix} C_{(n-2, 0, 2)}^{nn-2} \\ 2 C_{(n-2, 0, 1)}^{nn-2} \\ C_{(n-2, 0, 0)}^{nn-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3)+\pi\sqrt{t}(-1) \\ \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3)+\pi\sqrt{t}(-1), \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3)+\pi\sqrt{t} \\ \exp \frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3)+\pi\sqrt{t} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} C_{(n-1,0,1)}^{n,n-1} \\ \vdots \\ C_{(n-1,0,0)}^{n,n-1} \end{bmatrix}$$

などとする、てゆく。その他の同位数 $C_i^{n,n}$ に対して 同い
 ふうに見てゆくと、結局次のように計算すればよいことが
 分かる。

$$\begin{bmatrix} C_0^{n,n} \\ C_1^{n,n} \\ \vdots \\ C_g^{n,n} \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} C_\varepsilon^{n,n-g} \\ \vdots \\ C_0^{n,n-g} \end{bmatrix} \text{ の つながり と あらわす 行列 を 求 } \\ \text{ め よう。}$$

$$\varphi_1 = t a^{-1} - a \quad a = \exp\left(\frac{\pi \sqrt{1}}{2} S\right) \quad \text{と する。}$$

$$\varphi_2 = -t a + a^{-1}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} \varphi_1 & & & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & & \\ & \varphi_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \varphi_1 \\ & & & \varphi_2 \end{bmatrix} \times (-\sqrt{t})$$

(k+1) × k 行列

とおいて $A_0 \cdots A_1$ を求めると、これは $(g+1)$ 次元の
 縦ベクトルを係数とする g 次の t についての多項式となる。

これを $A(t)$ とする。この多項式の i 次の係数を、行列の
 第 $(g-i+1)$ 列 $(i=0 \cdots g)$ とみてできる $(g+1) \times (g+1)$ 行列を

$$A' \text{ と する。 } \widehat{A} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_g \end{bmatrix}^{-1} A' \quad \text{が、} \frac{\Gamma(\cdots)}{\sqrt{2\pi}} \text{ の 定数倍 の}$$

項を除いた同僚数の関係をあらわしている。

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} c_0 & & & \\ & c_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_g \end{bmatrix}^{-1} \quad A(t) = (-1)^g \begin{bmatrix} \varphi_1^g \\ \varphi_1^{g-1} \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_2^g \end{bmatrix}$$

次に $\Lambda^{n, n-g}$ と $\Lambda^{g, 0}$ の間の同僚数の関係を求めよう。
この間にでてくる Orbit (Lagrangian) はすべて $(g+1)$ 個の連結成分に分かれる。そしてこの場合の Maslov index による修正は、どの2つの間も $(-1)^g$ であるので、この間の変化は、ただ、定数倍になる、つまり、それは、

$$\begin{aligned} & (-1)^{g(n-g)} \prod_{i=1}^{n-g} \frac{-\sin \pi(S+2(g+i))}{\pi} \Gamma(S+2(g+i)+1) \Gamma(S+2(g+i)+2(p-g+1)) \\ &= \left(-\frac{\sin \pi S}{\pi} \right)^{n-g} \prod_{i=1}^{n-g} \Gamma(S+2(g+i)+1) \Gamma(S+(p+i)2+1) \times (-1)^{g(n-g)} \end{aligned}$$

である。

$\Lambda^{g, 0}$ の連結成分は $\Lambda_{(n-g, 0, r')}^{g, 0}$ $r'=0, \dots, g$ の $(g+1)$ 個の連結成分に分かれ、その同僚数 $C_{r'}^{g, 0}$ と書くと $C_{r'}^{n, n-g}$ と $C_{r'}^{g, 0}$ の間が上の定数倍で関係づけられる。

次に Λ^{g0} と Λ^{00} の連結成分の同位数の関係を求めよう。 $\Lambda_{(n-i, i; 0)}^{00}$ ($i=0, \dots, g$) と Λ^{00} は分かれる。各々の同位数を C_i^{00} と書く。これは最初や、たのと同様の方法で求まる。

$\begin{bmatrix} C_0^{g0} \\ \vdots \\ C_g^{g0} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} C_0^{00} \\ \vdots \\ C_g^{00} \end{bmatrix}$ の間の関係は、 $\frac{\Gamma(\dots)}{\sqrt{2\pi}}$ の定数倍を除いて次のようにして求まる。

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= at + a, & \text{とし} & B(t) = (-1)^{g(n-1)} \begin{bmatrix} \varphi_1^g \\ C_1 \varphi_1^{g-1} \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_2^g \end{bmatrix} \text{とおく。} \\ \varphi_2 &= at + a^{-1} \end{aligned}$$

この $B(t)$ の t の係数ベクトルを $(g+1)$ 列として得られる行列 $((g+1) \times (g+1))$ 行列である。これを B' としよう。

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} C_0 & & \\ & \ddots & \\ & & C_g \end{bmatrix}^{-1} B' \quad \text{とあるとき、これが求める行列}$$

である。

あとは、 $\widehat{B}$ と $\widehat{A}$ をかけあわせなければならないが、ここで次の trick を使う。

$B(t)$ の第 i 成分を $B_i(t)$ として、次の多項式を考える。

$$\sum_{i=1}^g \cancel{B_{i+1}(t)} s'^{g-i} = \sum_{i=0}^g {}_g C_i \widehat{y}_1^{g-i} \widehat{y}_2^i s'^{g-i}$$

$$= (\widehat{y}_1 s' + \widehat{y}_2)^g = ((a^{-1}t+a)s' + (at+a^{-1}))^g$$

$$= (t(a^{-1}s'+a) + (as'+a^{-1}))^g = \sum_{i=0}^g {}_g C_i (a^{-1}s'+a)^{g-i} (as'+a^{-1})^i t^{g-i}$$

すなわち、 B' は、 $B'(s) = [{}_g C_0 (a^{-1}s'+a)^g, {}_g C_1 (a^{-1}s'+a)^{g-1} (as'+a^{-1}),$
 $\dots, {}_g C_g (as'+a^{-1})^g]$ という $(g+1)$ 次元横ベクトルを

係数とする s の多項式で、 s^{g-i+1} の係数が、第 i 行目をあらわしている。

$$\text{すると } B'(s) \cdot \widehat{A}(t) = \sum_{i=1}^g {}_g C_i (a^{-1}s'+a)^{g-i} (as'+a^{-1})^i y_1^{g-i} y_2^i$$

の $s'^j t^i$ の係数が、第 $(g-j+1)(g-i+1)$ 成分をあらわす行列が、ちょうど、 $B' \widehat{A}$ をあらわしていることがわかる。

$$B'(s) \cdot \widehat{A}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^g (a^{-1}s'+a)^{g-j} (as'+a^{-1})^j y_1^{g-j} y_2^j {}_g C_j$$

$$= \sum_{j=0}^g {}_g C_j \{(a^{-1}s'+a)(ta^{-1}a)\}^{g-j} \{(as'+a^{-1})(-ta+a^{-1})\}^j$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\{ (a^{-1}s+a)(-a^{-1}-a) \} + \{ (as+a^{-1})(-a+a^{-1}) \} \right]^g \\
&= \left[(a^{-2}-a^2)st + (a^{-2}-a^2) \right]^g = \sum_{j=0}^g C_{\frac{g}{j}} (st)^j (-1)^g (2\sqrt{-1}\pi s)
\end{aligned}$$

したがって、この変換の行列は、

$$\begin{aligned}
A(s) &= (-1)^{g(n-g)} \left(-\frac{2\sqrt{-1}\pi s}{\pi} \right)^{n-g} \prod_{i=1}^g \Gamma(s+2(g+i)+1) \Gamma(s+(n+i)+1) \\
&\quad \prod_{j=0}^{g-1} \Gamma(s+2j+1) \Gamma(s+2n-2j) \quad (2\pi)^{-g} (-1)^{g(n+1)} (-\sqrt{-1})^g \\
&\quad \left[\begin{array}{c} (-2\sqrt{-1}\pi s)^g \\ (-2\sqrt{-1}\pi s)^g \\ \vdots \\ (-2\sqrt{-1}\pi s)^g \end{array} \right]_0.
\end{aligned}$$

これが、 $\begin{bmatrix} C_{00}^{nn} \\ \vdots \\ C_{gg}^{nn} \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} C_{00}^{oo} \\ \vdots \\ C_{gg}^{oo} \end{bmatrix}$ の同位数の変換をあらわしている。

公式の形で、さらにと述べよう。

$$|f|_s^s(x) = \begin{cases} |f(x)|^s & x \in \Delta_{(n-i, i, 0)}^{nn} \\ 0 & x \notin \Delta_{(n-i, i, 0)}^{nn} \end{cases}$$

$$|f|_i^s(y) = \begin{cases} |f|_i^s(y) & y \in \Lambda_{(n-i, i, 0)}^{00} \\ 0 & y \notin \Lambda_{(n-i, i, 0)}^{00} \end{cases} \quad \text{と 17}$$

$$|f|_i^s(x) = \int 4^{ns} (\pi)^{(2m-1)n} (-\det \pi S)^n \gamma(s) |f|_i^{-s-2m}(y) \\ \times \exp \sqrt{T} \langle x, y \rangle dy$$

$$\gamma(s) = \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(s+2j+1) \Gamma(s+2m-2j)$$

$P > n$ の仮定のもとに (ii) iii) の場合は $P \geq n$ の仮定のもとに) 全く同じような (多少めんどうにはなるものの) trick で. i) ii) iii) の場合もできる。以下それと結果だけ示そう。 $P \leq n$ の場合は、図式、orbit 分解が異ってくるので、それは次に解説あることにする。

ii) $P > n$ $q < n$ を仮定して

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_q^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{2nm}{2}} |C_0|^s \sqrt{|C_1|} (\det \pi S)^n \pi^n \gamma(s) A \begin{bmatrix} |f|_0^{-s-m}(y) \\ \vdots \\ |f|_q^{-s-m}(y) \end{bmatrix} \exp \sqrt{T} \langle x, y \rangle dy$$

$$T = T^* L, \quad C_0 = 4^n, \quad C_1 = 4^{mn}.$$

$$A = \begin{cases} \begin{pmatrix} (\sqrt{t})^{(n-q)^2} & (\sqrt{t})^{n-1} \\ & (-1)^{p+1} \\ & & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & (-1)^{p+1} \end{pmatrix} & q = \text{odd} \\ \begin{pmatrix} (\sqrt{t})^{(n-q)^2} & (\sqrt{t})^n \\ & (-1)^p \\ & & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & (-1)^p \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & q = \text{even} \end{cases}$$

i) $p > n$ $q < n$ 仮定して

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_q^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} |C_0|^s |C_1|^{\frac{1}{2}} t A(s) \begin{bmatrix} |f^*|_0^{-s-\frac{m}{2}}(y) \\ \vdots \\ |f^*|_q^{-s-\frac{m}{2}}(y) \end{bmatrix} \exp \sqrt{t} \langle x, y \rangle dy.$$

$$A(s) = \frac{\gamma(s)}{(2\pi)^q} \prod_{i=0}^{n-q-1} \left(\frac{\sin(-\pi(s + \frac{1}{2}(q+i)))}{\pi} \right) \widetilde{A}(s) \quad \text{と} \quad \widetilde{A}(s) \text{ は}$$

次のように定まる。 $\alpha = \exp(\frac{\pi}{2} \sqrt{t} s)$ とあらわして置く。

1) $g = 4\tilde{g} + 1$ とおくと

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2) & , & -1 + (-1)^n \\ (\sqrt{t})^{p+1} (1 - (-1)^{p+1+n}) & , & -(\sqrt{t})^{p+1} (a^2 + (-1)^{p+1} a^{-2}) \end{bmatrix} \text{ とおくと}$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{g}} (\sqrt{t})^{1-n} (-2\sqrt{t} \sin 2\pi s)^{\tilde{g}}$$

$$\times \begin{bmatrix} \star & & & \\ & (-1)^{p+1} \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{p+1} \tilde{g} \star \end{bmatrix} \quad (4\tilde{g}+2) \times (4\tilde{g}+2) \text{ 行列}$$

2) $g = 4\tilde{g} + 2$ とおくと

$$\star = \begin{bmatrix} \sqrt{t} (-1)^{n+1} (a^4 - a^{-4}) & , & 0 & , & 0 \\ (a^{-2} + (-1)^{p+1} a^2) ((-1)^{p+1} \sqrt{t}) + (-\sqrt{t})^{p+1} & , & -(\sqrt{t})^{p+1} (a^2 + (-1)^{p+1} a^{-2}) (a^2 + a^{-2}) & , & (\sqrt{t})^{p+1} ((-1)^n + 1) (a^2 + (-1)^{p+1} a^{-2}) \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{g}} (-2\sqrt{t} \sin 2\pi s)^{\tilde{g}}$$

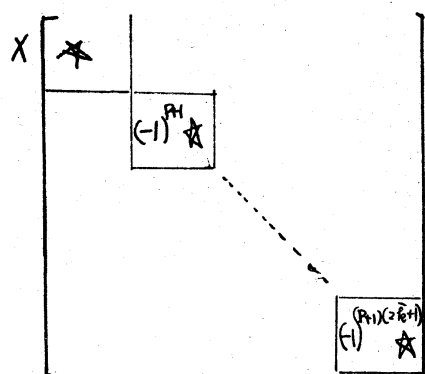
$$\times \begin{bmatrix} \star & & & \\ & (-1)^p \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{p+2\tilde{g}} \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \quad \star' = (-1)^{p+n+1} \sqrt{t} (a^4 - a^{-4})$$

= 418. $(4\tilde{g}+3) \times (4\tilde{g}+3)$ 行列

3) $g = 4\tilde{g} + 3$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2), & -(1 + (-1)^{n+1}) \\ -(\sqrt{-1})^{p+1} (1 + (-1)^{n+p}), & (\sqrt{-1})^{p+1} (a + (-1)^{n+p} a^{-2}) \end{bmatrix} \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}.$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{g}+1} (-\sqrt{-1})^n (-2\sqrt{-1} \sin \pi s)^{2\tilde{g}+1}.$$

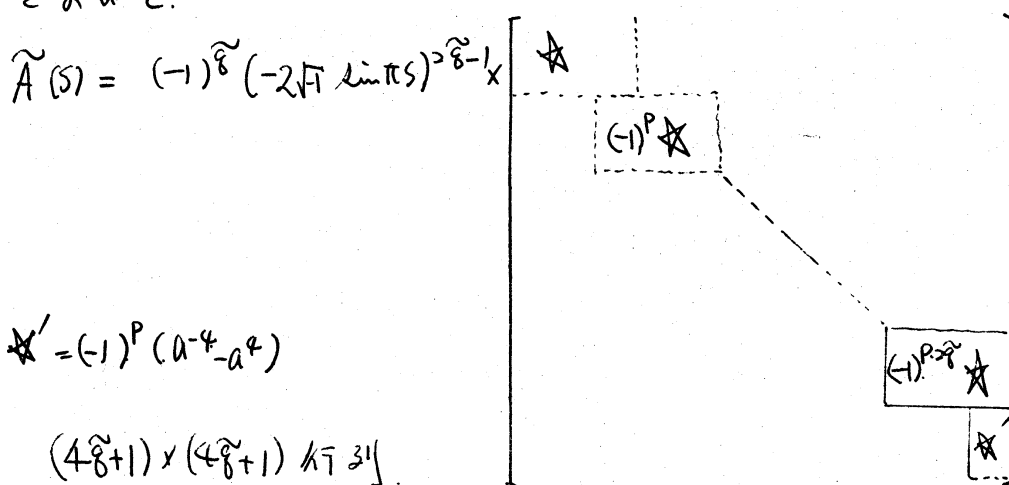


$$(4\tilde{g}+4) \times (4\tilde{g}+4) \text{ 行列}$$

4) $g = 4\tilde{g}$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-4} - a^4) & 0 & 0 \\ (\sqrt{-1})^p (1 + (-1)^{n+p}) (a^{-2} + (-1)^{n+p} a^2) & (\sqrt{-1})^p (-1)^n (-1)^{p+1} a^{-2} + a^{-4} (a^2 + a^{-2}) & (\sqrt{-1})^p (-1) a^2 + (-1)^p a^{-2} (-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

$\in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}.$



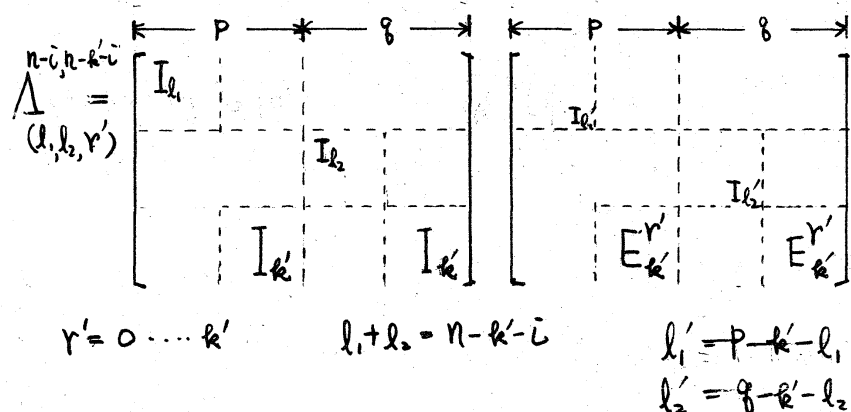
$$\star' = (-1)^p (a^{-4} - a^4)$$

$$(4\tilde{g}+1) \times (4\tilde{g}+1) \text{ 行列}$$

そこで、 $P < n$, $q < n$ の場合を考察しよう。

Complex X における 必要なる Lagrangian mf のみを書き入れた holonomy diagram は、 $P \parallel$ にあるものと同じであって、 q のかわりに $k' = (n - n)$ とおけば、(図にあらわれる部分は) 同じである。

各 orbit (Lagrangian) の Real へ制限したときの分解を書いておこう。 $\Delta^{n-n-k} \Delta^{k,0}$ ($0 \leq k \leq k'$) については、同じである。したがって書かない。



さて、交わり方の問題である。

$P \parallel$ の図式で、上と下の余次元 1 で、交わっている。その交わり方をこめて、 $P > n$ の場合と同じになる。問題は、たこの ---- でつながったところであるが、これは、i) の場合には、余次元 1 での交わりで下までつながるが、こゆく。この場合は特別であるので、我々は先に、ii) iii) の場合を考えることにしよう。

これを使, 計算してもよいのであるが, じつは, も, とうまくやれる。 $\Lambda^{n, n-k}$, と $\Lambda^{k, 0}$ の間を同所化して, あらわれる。極大過剰決定系を調べ, 直接その間の, 同位数の関係を出してしまうことである。(P.S. の conjecture の特別な場合への, 適用である。この場合 conjecture は, 正しい。)

$\Lambda^{n, n-k}$, $\Lambda^{k, 0}$ は ii), iii) の場合 $(k+1)$ 個の連結成分に分かれる。 $\Lambda_{(r')}^{n, n-k} = \Lambda_{(p-k, q-k, r')}^{n, n-k}$ $\Lambda_{(r')}^{k, 0} = \Lambda_{(p-k, q-k, r')}^{k, 0}$ とおく。 $r' = k, k-1, \dots, 0$ である。

$\Lambda_{(r')}^{n, k-k}$ と $\Lambda_{(r')}^{k, 0}$ の間の極大過剰決定系は 群の作用を調べることにより, 2つわがり。

$$\text{ii) } \underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{C})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k)}$$

$$\text{iii) } \underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{H})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k, \mathbb{H})}$$

の相対不変式である。

(より正確な表現をすれば, $\Lambda_{(r')}^{(n, n-k)}$ $\Lambda_{(r')}^{(k, 0)}$ は, 交わり, その交わりの generic pt. での極大過剰決定系は $\underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{C})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k, \mathbb{C})}$ (あるいは $\underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{H})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k, \mathbb{H})}$) の相対不変式 $h(\alpha)$ の complex power $h(\alpha)^\lambda$ $\delta(\alpha')$ の $\mu \neq 0$ 極大過剰決定系に同型 ということである。

その間の同僚数の変化は.

$$ii) \prod_{i=1}^{n-k} \left(- \frac{\sin(s+(k+i)-1)}{\pi} \right) \Gamma(s+k+i)^2 \\ \left(\exp - \frac{\pi \sqrt{t}}{2} (2r'-k) \right)^{p-q}.$$

$$iii) \prod_{i=0}^{n-k-1} - \frac{\sin(s+2(k+i))}{\pi} \Gamma(s+2(k+i)+1) \Gamma(s+2(k+i)+2) \\ \left(\exp \cdot \pi \sqrt{t} k \right)^{n-k}.$$

であることは、公式にあてはめてみれば、わかる。

あとは同じ方法 ($p > n$) で計算すればよろし。結果だけ書く。

ii) $p \leq n$ $q \leq n$ の場合.

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_k^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} |c_0| \sqrt{|k|} (\sin \pi s) \frac{n \gamma(s)}{\pi^n} A(s) \begin{bmatrix} |f|_0^{*-s-m}(y) \\ \vdots \\ |f|_k^{*-s-m}(y) \end{bmatrix}$$

$$\times \exp \sqrt{t} \langle x, y \rangle dy.$$

と $k < 0$ のとき、

$k = m - n$ が odd ならば

$$A(s) = (\sqrt{t})^{(m+1)(p-q)} (-1)^{q+n+1} (\sqrt{t})^{p+1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & (-1)^{m+1} & \\ & & \ddots \\ & & & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

$k = m - n$ が even ならば

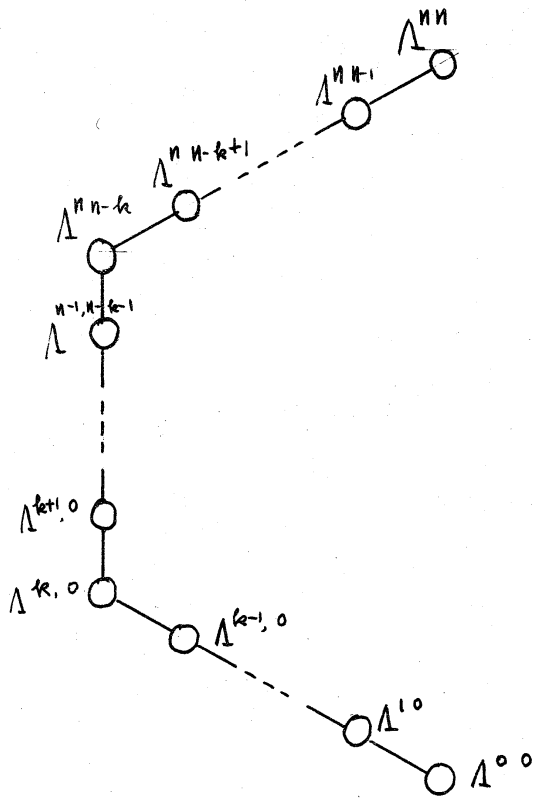
$$A(s) = (\sqrt{t})^{(m+1)(p-q)} (\sqrt{t})^p \begin{bmatrix} 1 & & \\ & (-1)^n & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

いふが、 $(p+1) \times (p+1)$ 行列、 $|f|_i^s$ 等の意味は $P > n$ のときと同じである。 C_0, C_1 も最初に書いたとおり。

ii) $p \leq n, q \leq n$ のとき、

$$|f|_i^s(x) = \int 4^{ns} (\pi)^{(2m-1)n} (-\sin \pi s)^n \chi(s) |f|_i^{-s-2m}(y) \exp \sqrt{t} \langle x, y \rangle dy$$

最後に、i) の $p \leq n, q < n$ の場合である。 $p = n$ の場合は少し、orbit に変化が起るが、それを無視して結果を書く。 $p < n, q < n$ として説明をすすめる。



Complex の 必要な holonomy diagram の Lagrangian 付けをきくと左のようになる。

$$\Lambda^{n, n-i} \quad \Lambda^{i, 0} \quad 0 \leq i < k$$

の real orbit 分解 (connected component 分解) は $p > n$ の場合と全く同じである。

ただし $\Lambda^{n, n-k}$ は様子が異なる。

可なり右のようになる。

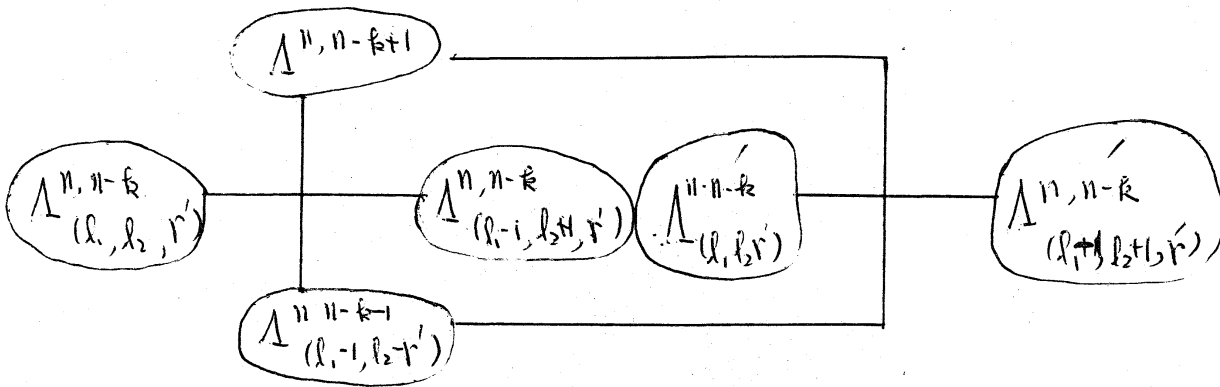
$$l_1 = p - k, \quad l_2 = q - k$$

$$I'_{l_2} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad r' = 0 \cdots k$$

$$\Lambda_{(r')}^{n, n-k} = \left[\begin{array}{c|c} I_{l_1} & \\ \hline & I_{l_2} \\ & I_{l_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline E_{l_2}^{r'} & E_{l_2}^{r'} \end{array} \right]$$

$$\Lambda_{(r')}^{n, n-k'} = \left[\begin{array}{c|c} I_{l_1} & \\ \hline & I'_{l_2} \\ & I_{l_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline E_{l_2}^{r'} & E_{l_2}^{r'} \end{array} \right]$$

← P ← i *



$\Lambda^{k,0}$ と $\Lambda^{k+1,0}$ の関係もこれとみればわかる。すなわち
 $\Lambda^{n, n-k} \in \Lambda^{k,0}$, $\Lambda^{n, n-k+1} \in \Lambda^{k+1,0}$ にとりかえれば同じ
 である。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{(r')}^{n, n-k} & \longrightarrow & \Lambda_{(r')}^{n, n-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{(r')}^{k,0} & \longrightarrow & \Lambda_{(r')}^{k,0} \end{array}$$

左のようなところで、直
 接に同僚数のつるがり？
 がある。

[2] を見ながら、定数項
 の修正と Maslov index の
 修正を考えればよい。

$$\frac{\Gamma(\lambda+1) \cdots \Gamma(\lambda+(2n-m))}{(\sqrt{2\pi})^{2n-m}} \left\{ \begin{array}{l} \left[(2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right. \\ \left. (2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\hat{r}}{2}} \right] \quad \tilde{r} \text{ even} \\ (-2 \sin \pi \lambda)^{\frac{r'-1}{2}} \left[\begin{array}{cc} \exp \frac{-\pi \sqrt{1}}{2} (Q+1) & \exp \frac{\pi \sqrt{1}}{2} (Q+1) \\ \exp \frac{\pi \sqrt{1}}{2} (Q+1) & \exp \frac{-\pi \sqrt{1}}{2} (Q+1) \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \tilde{r} \text{ odd} \end{array}$$

ここに $\tilde{\lambda} = 2S + (m-n)$ $\tilde{r} = 2n-m$ とおいて Maslov index に よる 修正は.

$$\left[\exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}\right)(q-p)(n-m+2r') \right. \\ \left. \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}\right)(q-p)(n-m+2r') \right]$$

$r' = 0, 1, \dots, r-1, r$ とする。

あとは全く同じようにして、同様して計算すればよい。結果は $\tilde{r}$ だけ異なると次のようになる。

i) $p < n$, $q < n$ の場合.

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_k^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma(s)}{(2\pi)^k} c(\lambda) A(s) \begin{bmatrix} |f|_0^{-s-\frac{m}{2}} \\ \vdots \\ |f|_k^{-s-\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \exp H(x, y) dy.$$

$$=: \tilde{c}. \quad \gamma(s) = \prod_{i=1}^k \Gamma(s + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(s + \frac{m}{2} - \frac{i}{2}) \quad k = m-n.$$

$$\tilde{\lambda} = 2S + (m-n) \quad \tilde{r} = 2n-m. \quad \text{とおいて} \tilde{r} \geq 0.$$

$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1) \cdots \Gamma(\lambda+(2n-m))}{(\sqrt{2\pi})^{2n-m}} \times \begin{cases} (-2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}-1}{2}} (2 \cos(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)))_{\tilde{r} \text{ odd}} \\ (2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}}{2}} & \tilde{r} \text{ even.} \end{cases}$$

そして $A(s)$ は次に書くとおりである。 $a = \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} s)$ であるとは例のとおりである。

1) $k = 4\tilde{k} + 1$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1}a^2), & (-1)^n - 1 \\ 2(\sqrt{-1})^{n+1}, & -(\sqrt{-1})^{n+1}(a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2}) \end{bmatrix} \quad \text{と置く.}$$

$$A(s) = (\sqrt{-1})^{1-P}(-1)^{\tilde{k}}(a^{-4}a^4)^{2\tilde{k}} \begin{bmatrix} \star & & \\ & (-1)^{n+1}\star & \\ & & \ddots \\ & & & (-1)^{2\tilde{k}(n+1)}\star \end{bmatrix}$$

$(k+1) \times (k+1)$ 行列

2) $k = 4\tilde{k} + 2$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (-1)^n(a^4 - a^{-4}) & 0 & 0 \\ (a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2})(-\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^{P_0}, & -(\sqrt{-1})^{P_0}(a^2 + a^{-2})(a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2}), & (a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2})(-\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^{P_0} \end{bmatrix}$$

と置く

$$A(s) = (-1)^{\tilde{k}+n-P+1}(\sqrt{-1})(a^4 - a^{-4})^{2\tilde{k}}$$

$$\star \begin{bmatrix} \star & & \\ & \star \times (-1)^n & \\ & & \ddots \\ & & & \star (-1)^{2\tilde{k}n} \\ & & & & \star' \end{bmatrix}$$

$(k+1) \times (k+1)$ 行列

$\star' = (a^4 - a^{-4})$

3) $k = 4\tilde{k} + 3$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{p+1} a^2) & - (1 + (-1)^{p+1}) \\ (-\sqrt{t})^{n+1} ((-1)^p + (-1)^n) & (\sqrt{t})^{n+1} (a^2 + (-1)^{p+n} a^{-2}) \end{bmatrix} \quad \text{とある.}$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (\sqrt{t})^p (a^{-2} - a^2)^{2\tilde{k}+1} \begin{bmatrix} \star & & \\ & (-1)^n \star & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{(n+1)(\tilde{k}+1)} \star \end{bmatrix}$$

4) $k = 4\tilde{k}$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} a^4 - a^{-4} & 0 & 0 \\ (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) ((-1)^n + (-1)^p) & (-1)^{p+1} (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (a^2 + a^{-2}) & (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (\sqrt{t})^n ((-1)^p + 1) \end{bmatrix}$$

とある.

$$A(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}-1} \begin{bmatrix} \star & & \\ & \star (-1)^n & \\ & & \ddots & \\ & & & \star (-1)^{(2\tilde{k}-1)n} & \\ & & & & \star' \end{bmatrix}$$

$$\star' = (a^4 - a^{-4})$$

すなわち
 $(k+1) \times (k+1)$ 行列.

今度は $P = n$ $q < n$ の場合である。

i) $P = n$ $q < n$ の場合。

Complex holonomy diagram は P 32 にあるのと同じである。しかし real の Connected Components (orbit) 分解は異なる。すなわち。

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{n, n-i} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq r' \leq i \\ 0 < l_2 \leq n-n-i}} \Lambda_{(l, l_2, r')}^{n, n-i} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \bigsqcup_{0 < l_2 \leq n-n-i} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i}$$

ただし

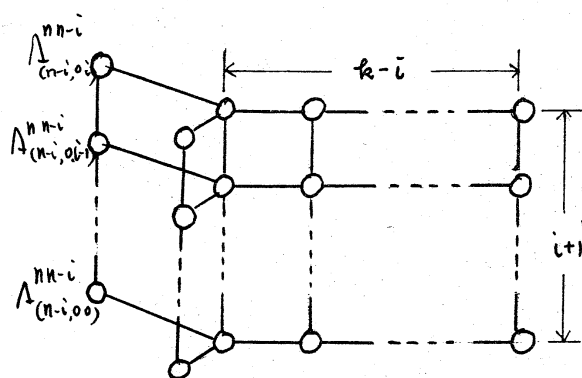
$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline & E_i^{r'} & E_i^{r'} \\ \hline \end{array} \right)$$

$\xleftarrow{P} \quad \xrightarrow{q}$

$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i} = \left(\begin{array}{c|c|c} I'_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline & E_i^{r'} & E_i^{r'} \\ \hline \end{array} \right)$$

そして $I'_{n-i} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ の $(n-i) \times (n-i)$ 行列である。

$\Lambda_{(l, l_2, r')}^{n, n-i}$ の $l_2 \geq 0$ とする。Lagrangian には $\cup$ しては。すなわち P // に書いた a と同じものである。(P 39 へ。つづく。)



→ l. j.

$\Lambda^{n, n-i}$ の real にあける.

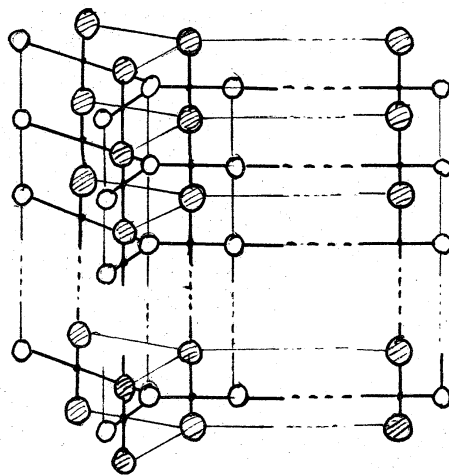
orbit 分解

($\Lambda^{i, 0}$ の real にあける
orbit 分解もあらわして
る).

$\Lambda^{n, n-i}$ と $\Lambda^{n, n-i+1}$ を
● と ○ で

示して 交わり方を図示
したものを。

($\Lambda^{i, 0}$ を ● , $\Lambda^{i+1, 0}$ を ○ と
して のつながりも表している)



$\Lambda^{n, n-k}$ と $\Lambda^{n, n-k+1}$ の間の
つながりを ● と ○ で示している。
($\Lambda^{k, 0}$ を ● , $\Lambda^{k-1, 0}$ を ○ とし
て のつながりもあらわしている)

いずれの図の場合も、右に書かれた
ものが、 l の値が小さく、下に書かれ
たものが、 r' の値が小さい。ゆえに、

右に書かれたところは、左上が / のついているものをあらわす。

また

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{i,0} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq r' \leq i \\ 0 < l_2 \leq m-n-i}} \Lambda_{(l_1, l_2, r')}^{i,0} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0}$$

また

$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & E_{i'}^{r'} & E_{i'}^{r'} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c|c} I_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & E_{i'}^{r'} & E_{i'}^{r'} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c|c} I'_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \right)$$

いずれも $0 \leq i \leq m-n$. つるがり方は P39 のようになる。

さて、問題は、例によつて $\Lambda^{n-k,0}$ と $\Lambda^{k,0}$ の間のつるがりであるが、これは、 $GL(n-k, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ (real form は $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$ に変えたもの) の相対不変式のみを、極大過剰決定系と同型であり、これは $p < n$ の場合と変えられない。したがって、あとは同様の tricks を使つて計算することができる。このときには、P36 ~ P37. にあつて書いた行列 E , $P = n$ としてあつては、かつ n は $\wedge$ 左の $\star$ の部分

と書きかえることができる。具体的には次のようになる。

i). $P=n$ $q < n$ の場合.

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ |f|_{0'}^s(x) \\ \vdots \\ |f|_q^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{\frac{mn}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} C'(\lambda)^t A(s) \begin{bmatrix} |f^*|_0^{-s-\frac{m}{2}}(y) \\ |f^*|_{0'}^{-s-\frac{m}{2}}(y) \\ \vdots \\ |f^*|_q^{-s-\frac{m}{2}}(y) \end{bmatrix} \exp \pi \langle x, y \rangle dy$$

$$\text{ここで } |f|_0^s(x) = \begin{cases} |f|^s(x) & x \in \Lambda_{(n,0,0)}^{n,n} \\ 0 & x \notin \Lambda_{(n,0,0)}^{n,n} \end{cases}$$

$$|f|_{0'}^s(x) = \begin{cases} |f|^s(x) & x \in \Lambda_{(n,0,0)'}^{n,n} \\ 0 & x \notin \Lambda_{(n,0,0)'}^{n,n} \end{cases}$$

$$|f^*|_0(y) = \begin{cases} |f^*|(y) & y \in \Lambda_{(n,0,0)}^{0,0} \\ 0 & y \notin \Lambda_{(n,0,0)}^{0,0} \end{cases}$$

$$|f^*|_{0'}(y) = \begin{cases} |f^*|(y) & y \in \Lambda_{(n,0,0)'}^{0,0} \\ 0 & y \notin \Lambda_{(n,0,0)'}^{0,0} \end{cases}$$

と表わす。そして i) $P < n$ $q < n$ の場合と同じにできる。ここで

$$C'(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1) \cdots \Gamma(\lambda+(2n-m))}{(\sqrt{2\pi})^{2n-m}} \times \begin{cases} (-2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}-1}{2}} (2 \cos(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)))^{\tilde{r} \text{ odd}} \\ (2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}}{2}} & \tilde{r} \text{ even} \end{cases}$$

と表す。

$$A(s) = \widehat{A}(s) \frac{1}{(2\pi i)^k} \prod_{i=1}^k \Gamma(s + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}) \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma(s + \frac{m}{2} - \frac{i}{2}).$$

として以下. $\widehat{A}(s)$ は書き並べておく. $k = m - n$ とする.

$$1). k = 4\widetilde{k} + 1$$

$$\widehat{A}(s) = \begin{bmatrix} \star^* & & & \\ & (-1)^{n+1} \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & \star \end{bmatrix} \times (\Gamma)^{1-n} (-1)^{\widetilde{k}} (a^{-4} - a^4)^{2\widetilde{k}}$$

(k+2) x (k+2) 行列

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2) & , & (-1)^{n-1} \\ 2(\Gamma)^{n+1} & , & -(\Gamma)^{n+1} (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) \end{bmatrix}$$

また, $\star^*$ は 3×3 行列で

$$① m = \text{even } n \geq 2$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & , & a^2 (-1)^{n-1} \\ a^2 & , & a^{-2} (-1)^n - 1 \\ (\Gamma)^{n+1} & , & (\Gamma)^{n+1} - (\Gamma)^{n+1} (a^2 + a^{-2}) \end{bmatrix}$$

$$② m = \text{odd } n \geq 2$$

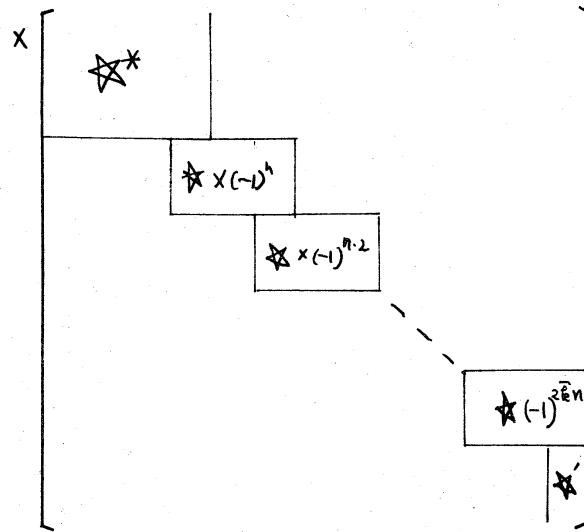
$$\begin{bmatrix} a^{-2} - a^2 & , & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & , & a^{-2} - a^2 & (-1)^n - 1 \\ (\Gamma)^{n+1} & , & (\Gamma)^{n+1} & -(\Gamma)^{n+1} (a^2 - a^{-2}) \end{bmatrix}$$

$$2). k = 4\widetilde{k} + 2$$

$$\star = \begin{bmatrix} (-1)^n (a^4 - a^{-4}) & , & 0 & , & 0 \\ (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (-\Gamma)^n + (\Gamma)^{n+2} & , & -(\Gamma)^{n+2} (a^2 + a^{-2}) (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) & , & (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (-\Gamma)^n + (\Gamma)^{n+2} \end{bmatrix}$$

と表す.

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (\tilde{F}) (a^{-4} - a^4) z^{\tilde{k}}$$



$$\star' = (a^4 - a^{-4})$$

① $m = \text{even}$, $n \in \mathbb{Z}$ ($n = \text{even}$). $\star^*$ は 3×4 行列で

$$\begin{bmatrix} a^4 - a^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a^4 - a^{-4}) & 0 & 0 \\ (\tilde{F})^n (a^2 + a^{-2}), (\tilde{F})^n (a^2 - a^{-2}), (\tilde{F})^n (a^2 + a^{-2})(a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}), (a^2 - a^{-2})(-(\tilde{F})^n + (\tilde{F})^n) \end{bmatrix}$$

② $m = \text{odd}$, $n \in \mathbb{Z}$ ($n = \text{odd}$). $\star^*$ は 3×4 行列で

$$\begin{bmatrix} (a^{-2} - (a^2 + a^{-2})), -a^2(a^2 + a^{-2}), 0, 0 \\ -a^2(a^2 + a^{-2}), a^{-2}(a^2 + a^{-2}), 0, 0 \\ -(\tilde{F})^n(a^2 + a^{-2}), -(\tilde{F})^n(a^2 - a^{-2}), (\tilde{F})^n(a^2 + a^{-2})(a^2 + a^{-2}), (a^2 + a^{-2})(\times 0) \end{bmatrix}$$

の ~~3~~ 行列は $\mathbb{Z}$ である。

$$3) \quad \tilde{k} = 4\tilde{k} + 3$$

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2) & -(1 + (-1)^{n+1}) \\ 2(\tilde{F})^{n+1} (-1)^n & (\tilde{F})^{n+1} (a^2 + a^{-2}) \end{bmatrix} \quad \text{とおく。}$$

$$\hat{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (\sqrt{t})^n (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}+1} \times \begin{bmatrix} \star^* & & \\ & (-1)^{m_1} \star & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{(m_1)(2\tilde{k}+1)} \star \end{bmatrix}$$

$\therefore \star^*$ は

① $m = \text{even}$ ($n = \text{odd}$) $n \in \mathbb{Z}$. ② $m = \text{odd}$ ($n = \text{even}$) $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{bmatrix} a^{-2}, & a^2, & -2 \\ a^2, & a^{-2}, & -2 \\ (-\sqrt{t})^{n+1}, & (-\sqrt{t})^{n+1}, & (\sqrt{t})^{n+1}(a^2 + a^{-2}) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (a^{-2} - a^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^{-2} - a^2) & 0 \\ (\sqrt{t})^{-n-1} & (\sqrt{t})^{-n-1} & (\sqrt{t})^{n+1}(a^2 + a^{-2}) \end{bmatrix}$$

4) $k = 4\tilde{k}$

$$\hat{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}-1} \begin{bmatrix} \star^* & & & \\ & \star (-1)^n & & \\ & & \star (-1)^{n-2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \star \times (-1)^{(2\tilde{k}-1)n} \end{bmatrix}$$

$$\star = (a^2 - a^{-4})$$

$(k+2) \times (k+2) \times \mathbb{Z}$

$$\star = \begin{bmatrix} a^4 - a^{-4} & 0 & 0 \\ (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) ((-1)^n + 1)^p, & (-1)^{n+1} (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (a^2 + a^{-2}), & (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (\sqrt{t})^n ((-1)^p + 1) \end{bmatrix}$$

① $m = \text{even}$ ($n = \text{even}$) のとき $1 \leq i \leq 2$. $\star^*$ は 4×3 行列で

$$\begin{bmatrix} -(a^4 - a^2), & 0, & 0, & 0 \\ 0 & -(a^4 - a^2), & 0, & 0 \\ (F)^n(a^2 - a^{-2}), & (F)^n(a^2 - a^{-2}), & (-1)^{n+1}(F)^n(a^2 - a^{-2})(a^2 + a^{-2}), & 2(a^2 - a^{-2})(F)^n \\ (F)^n(a^2 - a^{-2}), & (F)^n(a^2 - a^{-2}), & (-1)^{n+1}(F)^n(a^2 - a^{-2})(a^2 + a^{-2}), & 2(a^2 - a^{-2})(F)^n \end{bmatrix}$$

② $m = \text{odd}$ ($n = \text{odd}$) のとき $1 \leq i \leq 2$. $\star^*$ は

$$\begin{bmatrix} -a^2(a^2 + a^{-2}), & a^2(a^2 + a^{-2}), & 0, & 0 \\ a^2(a^2 + a^{-2}), & -a^2(a^2 + a^{-2}), & 0, & 0 \\ -(F)^n(a^2 + a^{-2}), & -(F)^n(a^2 + a^{-2}), & (F)^n(a^2 + a^{-2})^2, & 0 \\ -(F)^n(a^2 + a^{-2}), & -(F)^n(a^2 + a^{-2}), & (F)^n(a^2 + a^{-2})^2, & 0 \end{bmatrix}$$

Imaginary Lagrangian が現われる場合の Fourier 変換
(講究録 No. 248 所収)

page. line.

誤

正

P13. l. 8. $T_S \Lambda_2 \times_{T_S} \Lambda_0 / T_S$

$T_S \Lambda_2 \times_S T_S \Lambda_0$

l. 15. $\widetilde{W} = \{ \dots \}$

$\widetilde{W} = \{ \dots \mid \xi'_2 \neq 0 \}$

P14. l. 9 $\mathcal{G}_2 = 4\mathcal{G}'_0 = 4(x_1^2 + \dots + x_\ell^2)$

$\mathcal{G}_0 = 4^{-1}\mathcal{G}'_0 = 4^{-1}(\xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2)$

l. 11 $\omega_{\Lambda_0} 4^{2(a+\frac{\rho}{4})} \dots$

$\omega_{\Lambda_0} 4^{-2(a+\frac{\rho}{4})} \dots$

P15. l. 1 $\widetilde{W} = \{ \dots \}$

$\widetilde{W} = \{ \dots \mid \varphi'_0 \neq 0 \}$

l. 5 $\frac{\pi^*(\omega_{\Lambda_2})}{c(s')} \frac{ds'}{ds}$

$\frac{\pi^*(\omega_{\Lambda_2}) \wedge ds'}{c(s')} \frac{1}{ds'}$

l. 11 $d\xi \wedge \eta \wedge ds' / c(s') ds'$

$d\xi \wedge \eta \wedge ds' / c(s') \frac{1}{ds'}$

P17. F.B. l. 2 $\left(-\frac{\sin \pi(\ell(s)+a)}{(\ell(s)+a)} \right)$

$\left(-\frac{\sin \pi(\ell(s)+a)}{\pi} \right)$

P47. P48. P49. の W の $\{ \dots \} = \{ f(y) \neq 0, (f(y) \neq 0) \}$
に書かれています。