

正常金属における超音波の吸収

一 柳 正 和 (阪大工)

(6月28日受理)

§ 1 序 論

金属における超音波吸収の問題はすでに多くの人々により論じられている。Pippard⁽¹⁾は電子の速度分布に対する仮定のもとにこの問題を論じた。Holstein⁽²⁾は通常の摂動論を使つて、この仮定は collision drag の効果の直接の結果であり、本質的に二段階の過程にもとづくものであることを示した。Cohen⁽³⁾らは Pippard の仮定のもとに、磁場中での吸収を論じた。Blount⁽⁴⁾は deformation transformationを導入してこの問題を論じた。Tsuneto⁽⁵⁾は Green 関数の方法を用い Blount と同じ立場から吸収係数を計算し、Pippard と同じ結果を得た。

Nagaoka⁽⁶⁾は Kubo の線型応答の理論を用いて音波の吸収を論じたが、Pippard の結果を得ることができなかつた。彼は collision drag の効果を音波が不純物をゆさぶる効果とみなし、不純物運動の減衰の効果の存在を指摘した。しかしながら、彼のこの効果の計算は $q\ell \gg 1$ (q : 音波の波数ベクトル ℓ : 電子の平均自由行程) の場合に相当しており、 $q\ell \ll 1$ のときどうなるか問題である。さらに、彼の理論には § 3 で述べる ladder の補正が入っていない。Osaka⁽⁷⁾は Nagaoka と同じ Hamiltonian から出発し、Green 関数の方法を音波の吸収に応用し、Pippard と同じ結果を得たが、彼の理論には上述の効果は考慮されていない。

ここでは、Green 関数の方法により、音波を phonon とみなした上で上述の効果を取り入れ、音波の吸収を論ずる。音波を phonon とみなすに当り、 $q\ell \ll 1$ のときにも phonon が意味のあるものかどうか問題であるが、§ 5 に示すようにこの極限では

$$\omega \tau_p \cdot \omega \tau \simeq 1$$

(1.1)

一柳正和

が成り立ち、 $\omega < 1$ であれば phonon が意味ある像となり得る。ただし τ_p は phonon の寿命、 τ は電子の寿命であり、 ω は音波の周波数である。ここでは $\omega\tau < 1$ の場合を考え、 $q\ell$ の値にかかわらず音波を phonon とみなす。

§ 2 Hamiltonian

簡単のため単位体積当り n 個の原子よりなる一価金属を考える。系は電子、phonon、それに不規則に分布している不純物（濃度 n_i ）より成る。

系の全 Hamiltonian $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \quad (2.1)$$

ただし

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} Q_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}} + \sum_{\mu} \sum_{\mathbf{k}} V_{\text{imp}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{\mu}} a_{\mathbf{k}}^+ \quad (2.2)$$

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) \rho_{\mathbf{k}}^+ \rho_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^i \rho_{\mathbf{k}}^+ Q_{\mathbf{k}} + \frac{i}{n} \sum_{\mathbf{k}} k_z^2 V_{\text{imp}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{\mu}} Q_{\mathbf{k}} \quad (2.3)$$

ここで、 $E(\mathbf{k}) = k^2/2m$ は電子のエネルギー、 $\phi(\mathbf{k}) = 4\pi e^2/k^2$ は Coulomb 相互作用の行列要素、 $v_{\mathbf{k}}^i$ は電子-phonon 相互作用のそれであり、 $\mathbf{R}_{\mu}$ は不純物の位置を示す。さらに

$$\rho_{\mathbf{k}}^+ = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{p}}$$

は電子密度揺動の演算子であり、

$$Q_{\mathbf{q}} = (2Q_{\mathbf{q}})^{-\frac{1}{2}} (b_{\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^+) \quad (2.5)$$

は phonon の振巾である。 $\mathcal{H}_0$ の意味は明らかである。

$\mathcal{H}_I$ のオ1及びオ2項は各々電子-電子及び電子-phonon 相互作用である。オ3項は不純物が音波によりゆさぶられる効果を表わす Hamiltonian である。この項は § 4 で論ずる collision drag の効果に関係しており、 $\omega\tau \ll 1$ のとき意味のある項である。(§ 4)

次に、Luttinger⁽⁸⁾ らに従つて、電子及び phonon の伝播関係を定義する：

$$g_p(\lambda) = \langle T \{ a_p^\dagger(\lambda) a_p \} \rangle_{av} \quad (-\beta < \lambda < \beta) \quad (\text{電子に対して}) \quad (2.6a)$$

$$D_q(\lambda) = \langle T \{ Q_q^\dagger(\lambda) Q_q \} \rangle_{av} \quad (\text{phonon に対して}) \quad (2.7a)$$

または、Fourier 変換して

$$g_p(J_e) = \int_0^\beta d\lambda e^{-J_e \lambda} g_p(\lambda); \quad J_e = \frac{\pi i}{\beta} (2\ell + 1) + \mu \quad (2.6b)$$

$$D_q(\alpha_m) = \int_0^\beta d\lambda e^{-\alpha_m \lambda} D_q(\lambda); \quad \alpha_m = \frac{\pi i}{\beta} \cdot 2m \quad (2.7b)$$

ここに、 ℓ, m は任意の整数、 $\langle \dots \rangle_{av}$ は grand canonical 集団及び不純物分布についての平均を意味する。

§ 3 Phonon の分散式

計算の便宜上、静的不純物の存在する場合から考察する。この場合には、 $\mathcal{H}_I$ の才 3 項は除外される。

有効 phonon 伝播関数 $D^{(i)}$ は Fig.

1 の Dyson 方程式より求められる。

Fig. 1 において、記号 Γ は不純物の影響を示す。すなわち記号 Γ

は Fig. 3 の他に Fig. 5 に示す ladder の補正も含む。 $D^{(i)}(q, \alpha_m)$ は次のようになる：

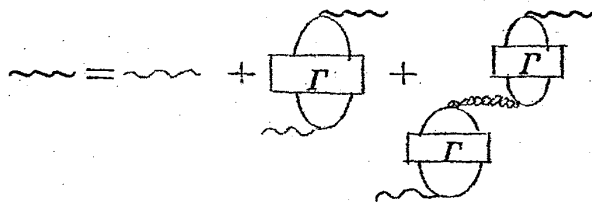


Fig. 1 有効フォノン伝播関数

$$D^{(i)}(q, \alpha_m) =$$

$$= [\alpha_m^2 - \rho_q^2 - |v_q|^2 Q^{(i)}(q, \alpha_m) \cdot \epsilon^{-1}(q, \alpha_m)]^{-1}$$

(3.1)

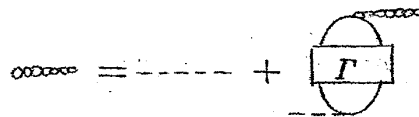


Fig. 2 遮蔽されたクーロン相互作用

ただし

$$\epsilon(q, \alpha_m) = 1 - \phi(q) Q^{(i)}(q, \alpha_m) \quad (3.2)$$

$$Q^{(i)}(q, \alpha_m) = \sum_p \frac{1}{\beta} \sum_l \langle g_{p+q}(J_e + \alpha_m) \cdot g_p(J_e) \rangle_{av} \quad (3.3)$$

一柳正和

関数 $Q^{(i)}$ は Fig. 7 により近似的にもとめられる。すなわち

$$\langle g_{p+q}^{(i)}(J_e + \alpha_m) \cdot g_p^{(i)}(J_e) \rangle_{av} = \frac{g_{p+q}^{(i)}(J_e + \alpha_m) \cdot g_p^{(i)}(J_e)}{1 - n_i \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} |\bar{V}_{imp}(p-p')|^2 g_{p+q}^{(i)}(J_e + \alpha_m) \cdot g_p^{(i)}(J_e)} \quad (3.4)$$

ただし、 $g^{(i)}$ は有効電子伝播関数で Fig. 3

により近似的に次のようになる

$$g_p^{(i)}(J_e) = [J_e - E(p) + \eta(J_e) \cdot i/2\tau]^{-1} \quad (3.5)$$

$$\eta(z) = +1 \quad \text{Im} z < 0 \text{ のとき}$$

$$= -1 \quad \text{Im} z > 0 \text{ のとき}$$

$$\frac{1}{\tau} = n_i \frac{m P_0}{(2\pi)^2} \int |\bar{V}_{imp}(\theta)|^2 d\theta \quad (3.6)$$

τ は電子の不純物散乱による寿命であり、 V_{imp} は遮蔽された不純物 potential である。

$D^{(i)}(q, \omega)$ は $D^{(i)}(q, \alpha_m)$ の解析接続で定義される：

$$D^{(i)}(q, \omega) = [\omega^2 - \omega_p^2 - |v_q|^2 Q^{(i)}(q, \omega) \cdot \epsilon^{-1}(q, \omega)]^{-1} \quad (3.7)$$

したがって phonon の分散式は

$$\omega^2 = \omega_p^2 \cdot \epsilon^{-1}(q, \omega) \quad (3.8)$$

となる。ここで ion に対しては "jellium 模型" を用いた。 $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{M}}$ はイオンプラズマ振動数である。

(3.8) より phonon の減衰因子 r_q は $\omega \sim \omega_{ph}$ の近くで

$$r_q = \frac{\omega_p^2}{2\omega} \frac{\text{Im} \epsilon(q, \omega)}{[\text{Re} \epsilon(q, \omega)]^2} = \frac{\omega_{ph}^2}{2\omega} \frac{\text{Im} Q^{(i)}}{\text{Re} Q^{(i)}} \quad (3.9)$$

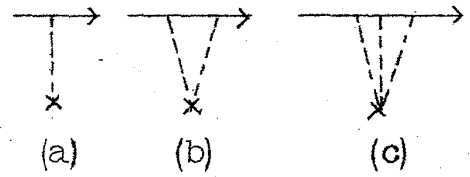


Fig. 3 不純物散乱

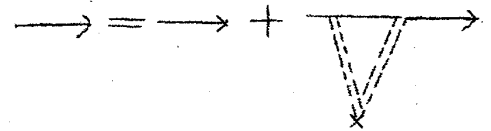


Fig. 4 有効電子伝播関数
(二重線は遮蔽の意味)

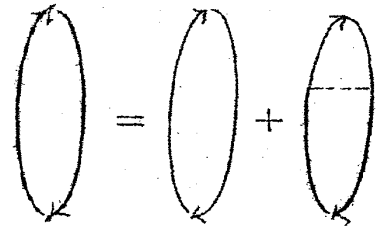


Fig. 5 ladder の補正

となる。ただし、 ω_{ph} はくりこまれた phonon の振動数であり、 $Q^{(i)}(q, \omega)$ は $Q^{(i)}(q, \omega_m)$ の解析接続である：

$$Q^{(i)}(q, \omega) = -N(0) \left[1 + \frac{i\omega}{2qv_0} T(q, \omega) \right] \quad (3.10)$$

$$T(q, \omega) = S(q, \omega) \left[1 - \frac{1}{2q\ell} \cdot S(q, \omega) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

$$S(q, \omega) = -i \ln \left(\frac{\omega - qv_0 + i/\tau}{\omega + qv_0 + i/\tau} \right) \quad (3.12)$$

$N(0)$ は Fermi 準位での状態の密度である。

結局、音波の吸収係数は

$$\alpha^{(i)} = \frac{q \cdot r_q}{2\omega} = \frac{nm}{Dv_F \tau} \frac{1/3 \cdot (q\ell)^2 \cdot \tan^{-1} q\ell}{q\ell - \tan^{-1} q\ell} \quad (3.13)$$

となる。(3.10)において、 $S(q, \omega)$ でなく $T(q, \omega)$ が現われるのは、Fig.5の ladder の補正による。この補正は Nagaoka⁽⁶⁾ の論文ではとり入れられていない。しかしながら、この節の計算は $\omega\tau \simeq 1$ ，すなわち $q\ell \gg 1$ の場合にのみ正しいことが、次の節で示される。

§ 4 Collision drag の効果

よく知られているように、 $\tau \rightarrow \infty$ での電子による音波の吸収は、電子と phonon との間の "surf-riding" resonance⁽⁹⁾による。したがって、 $\tau =$ 有限で、 $\omega\tau < 1$ なるときのこの共鳴がどのように変わるかは興味あることである。

そのために、まず Fig.6a を考える。 $\omega\tau \ll 1$

のときには、中間状態の電子は短命 (ω^{-1} に比して) であり、この状態でのエネルギーは保存されなくてもよい。同様のことが (b)についてもいえる。結局この二つの過程は、(c)に帰着せしめられる。これが collision drag の vertex であり、 $\mathcal{M}_I$ のオ3項で表わされることは Holstein⁽²⁾ の

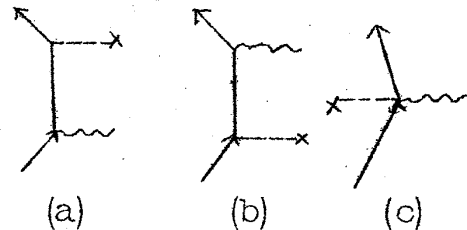


Fig.6 Collision の相互作用

一柳正和

方法の直接の応用で示される。すなわち collision drag は本質的に二段階の過程である。

collision drag の効果を考えるとき、有効 phonon 伝播関数 $D(q, \alpha_m)$ は次のようになる (Fig.7 を参照) :

$$D(q, \alpha_m) = [\alpha_m^2 - \rho_q^2 - |v_q^i|^2 Q^{(i)}(q, \alpha_m) \epsilon^{-1}(q, \alpha_m) - \frac{v_q^{i*}}{\sqrt{nM}} \frac{F(q, \alpha_m)}{\epsilon(q, \alpha_m)} - n_i \sum k_Z^2 |V_{imp}(k)|^2 Q^{(i)}(k, \omega) \epsilon^{-1}(k, \alpha_m)]^{-1} \quad (4.1)$$

ここで、才4項以下は、不純物が音波によりゆさぶられることの効果に対応する。

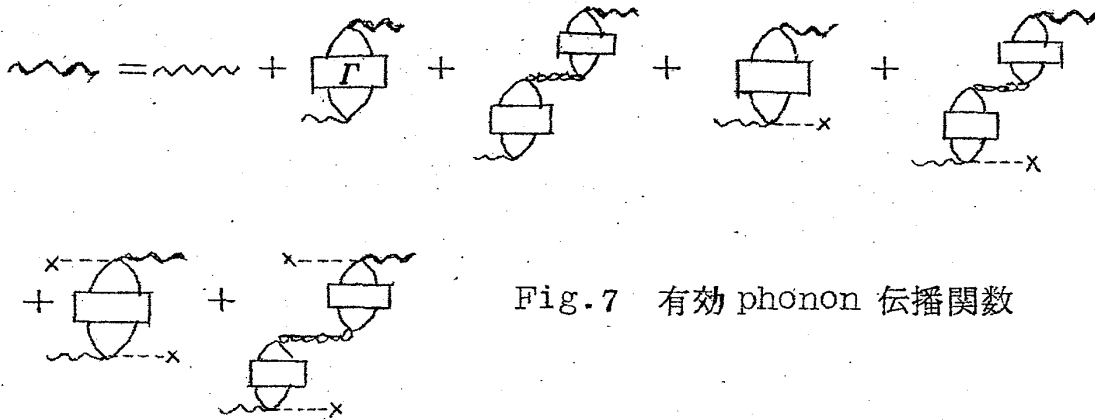


Fig.7 有効 phonon 伝播関数

(4.1) より、 $D(q, \omega)$ は

$$D(q, \omega) = [\omega^2 - \frac{\rho_p^2}{\epsilon(q, \omega)} - \frac{v_q^{i*}}{\sqrt{nM}} F(q, \omega) - n_i \sum k_Z^2 |V_{imp}(k)|^2 \times \frac{Q^{(i)}(k, \omega)}{\epsilon(k, \omega)}]^{-1} \quad (4.2)$$

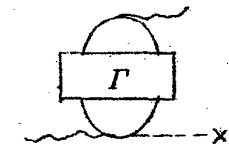


Fig. 関数 F

となる。ただし、 $F(q, \omega)$ は Fig.8 で表わされる関数で、近似的に次のようになる。

$$\frac{1}{n \cdot q} F(q, \omega) \cong \frac{i\omega}{qv_0} \cdot \frac{3}{q\ell} \quad (4.3)$$

この関数が、Collision drag の効果に関係する。(4.2) の最後の項は

Nagaoka の指摘した不純物運動の減衰の効果である。しかしながら、Nagaoka の計算は $q\ell \gg 1$ の場合に相当し、 $q\ell \ll 1$ の場合どうなるかは問題として残される。

(4.2) の最後の項の吸収係数への寄与 ($\equiv \alpha_3$) は

$$\alpha_3 \propto \text{Im} \Sigma_k k_z^2 |\bar{V}_{\text{imp}}(k)|^2 \text{Im} Q^{(i)}(k, \omega) \quad (4.4)$$

である。今、この式に $Q^{(i)}$ として (3.10) を代入する。この場合、(3.10) は $q \ll P_0$ のときのみ成り立つ関数であるが、この関数形は $k \sim 2P$ まで成り立つものと仮定する。すなわち、関数

$$\text{Im} Q^{(i)}(k, \omega) \cong -N(0) \cdot \frac{\omega}{kv_0} \cdot \frac{3}{k\ell} \quad (4.5)$$

を k の値のいかんにかかわらず用いることにする。簡単な計算の後、我々は

$$\alpha_3 \cong \frac{4}{\pi} \frac{nm}{Dv_S\tau} \cdot \frac{1}{P_0\ell} \quad (4.6)$$

を得る。すなわち、この効果の寄与は他の寄与に比して $D(1/p_0\ell)$ であることがわかる。

(4.2) のオ3項までは Osaka⁽⁷⁾ により詳しく解析されているので、ここではその結果を示すにとどめる。すなわち、collision drag の効果を取り入れたときの吸収係数 α は、

$$\alpha = \frac{nm}{Dv_S\tau} \left[\frac{1/3(q\ell)^2 \tan^{-1} q\ell}{q\ell - \tan^{-1} q\ell} - 1 \right] \quad (4.7)$$

となる。この結果は、Pippard の結果に対応するが、次の点が異なる。Pippard の結果においては、音波の吸収を特徴づける時間は電子の伝導現象を特徴づける緩和時間であるとされているが、(4.7) のそれは電子の寿命である。しかしながら、これらの現象の間には、電子の輸送の性質上に本質的なちがひがある。すなわち、電子の伝導現象においては、電子の運動量の余弦成分が本質的役割をしているが、音波の吸収においては $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0$ を満足する電子のみが本質的役割をしている。したがって、音波の吸収機構を特徴づける時間は、

一柳正和

電子の緩和時間でなく、寿命であるように思われる。

§ 5 討論と結論

§ 4 でのべたように、collision drag の効果は本質的に二段階の過程であり、 $\omega\tau \ll 1$ のとき、中間状態の電子が短命であるがために現れる効果である。したがって、§ 3 の結果は $\omega\tau \sim 1$ もしくは $q\ell \gg 1$ のときにのみ正しい。このことから、音波の吸収係数は

$$\alpha \cong \frac{\pi}{6} \frac{nmv_0}{Dv_S^2} \omega \quad \omega\tau \sim 1 \text{ のとき} \quad (5.1)$$

$$\cong \frac{4}{15} \frac{nmv_0^2}{Dv_S^3} \omega^2 \tau \quad \omega\tau \ll 1 \text{ のとき} \quad (5.2)$$

となる。

一方、phonon の平均自由行程 A_p は、 α により

$$A_p \equiv v_S \tau_p = \alpha^{-1} \quad (5.3)$$

と定義される。 τ_p は phonon の電子との相互作用による寿命である。したがって (5.1) より、我々は

$$\frac{1}{\tau_p} \cong \frac{nmv_0}{Dv_S} \cdot \omega \quad \omega\tau \sim 1 \quad (5.4)$$

を得る。この結果はよく知られた結果であり、 $\omega\tau \sim 1$ である限り、phonon の寿命は、電子のそれに殆んど影響されない。一方、(5.2) からは

$$\omega \tau_p \cdot \omega\tau \sim 1 \quad \omega\tau \ll 1 \quad (5.5)$$

が導かれる。すなわち、phonon 寿命は、電子のその逆数に比例する。またこの式は $\omega\tau \ll 1$ である限り phonon 像が意味があるものであることがわかる。これが、我々が音波を phonon とみなした根きよである。

我々は、金属における音波の吸収を音波を phonon とみなして論じた。特に不純物運動の減衰の効果を ladder の補正を行なつた上で論じ、音波の吸収係数への寄与は $O(1/p_0\ell)$ で無視出来ることを知つた。この効果を無視したとき

音波の吸収機構を特徴づける時間の違いをのぞいて、Pippard の式に対応するものが得られる。

最後に、ここでは ladder の補正に関するその物理的意味にはふれなかつたが、この補正は Fermi energy の局所性と関係していることが暗示されるがこの点、さらに論じられるべきである。

謝 辞

この研究にあたって、終始御指導下さつた西山先生に感謝します。

文 献

- 1) A.B.Pippard, Phil. Mag. 46 ('55) 1104
- 2) T.Holstein, Phys. Rev. 113 ('59) 479
- 3) M.H.Cohen et al., Phys. Rev. 117 ('60) 937
- 4) E.I.Blount, Phys. Rev. 114 ('59) 418
- 5) T.Tsuneto, Phys. Rev. 121 ('61) 402
- 6) Y.Nagaoka, Prog. Theor. Phys. 26 ('61) 589
- 7) Y.Osaka, J. Phys. Soc. (Japan) 18 ('63) 877
- 8) J.Luttinger et al., Phys. Rev. 121 ('61) 942
- 9) J.M.Ziman, Electrons and Phonons (Oxford)