

境界値逆問題に対する Hölder 型の安定性をもった 再構成法

群馬大学 工学部 天野 一男 (Kazuo AMANO)

はじめに

著者は本講演において、ある種の境界値逆問題に対して、Hölder タイプの安定性のある reconstruction scheme を提唱する。別の言い方をすれば、Tikhonov([11]) の regularizer の様な作用素を構成するための、一つの有限なアルゴリズムを与える。彼のアイディアは、基本的には有限差分法の rearrangement なので、多くの逆問題に対しても有効であろうと考えられる。

1. 準備

次のような偏微分方程式を考える：

$$(1.1) \quad \operatorname{div}(a \nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{in } D,$$

ここで、簡単のために $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ とし、また $a = a(x, y) > 0$ は $\overline{D}$ で定義された C^∞ 級の関数とする。一つの実数値関数 $\omega \in C^\infty(\overline{D})$ に対して、係数の族

$$(1.2) \quad a_\delta = a e^{\delta \omega} = a(1 + \delta \omega + O(\delta^2)), \quad -1 \leq \delta \leq 1$$

を考える。われわれの目的は、この係数 a_δ を解の Dirichlet 条件と Neumann 条件から再構成することである。われわれは、境界上での measurement に相当する次のような解の族 $u_\delta \in C^\infty(\overline{D})$, $|\delta| \leq 1$ と定数 $C_0 > 0$ が存在すると仮定する：

$$(1.3) \quad \operatorname{div}(a_\delta \nabla u_\delta) = 0 \quad \text{in } D, \quad u_\delta = u_0 \quad \text{on } \partial D,$$

$$(1.4) \quad \|u_\delta\|_{C^4(\overline{D})} \leq C_0 \quad \text{for all } |\delta| \leq 1,$$

ただしここで $\|f\|_{C^k(\overline{D})} = \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup_{\overline{D}} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f|$, $k = 0, 1, 2, \dots$. 関数 $u \in C^\infty(\overline{D})$ に対して、Dirichlet map $\Lambda_0(u)$ と Neumann map $\Lambda_1(u)$ を

$$\Lambda_0(u) = u|_{\partial D}, \quad \Lambda_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$$

によって定義する。ここで $\Gamma = \partial D \setminus \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ とし、また ν は境界 Γ 上の外向単位法ベクトルを表す。正定数 N, M と $C^\infty(\overline{D})$ に属する関数 ϕ, ψ に対して、 $\mathcal{R}_{N,M}(\phi, \psi)$ は、(1.2) タイプの C^∞ 級の係数のつくるある有限集合を表す。 $\mathcal{R}_{N,M}(\phi, \psi)$ の構成的な定義は、次の節で与えられる。大雑把に言い方をすれば、 $\mathcal{R}_{N,M}(\phi, \psi)$ は、方程式 (1.1) と境界条件 ϕ, ψ から構成されたある多項式 $R_{N,M}(\phi, \psi)(\zeta)$ の零点を用いてつくられる、i.e.,

$$\mathcal{R}_{N,M}(\phi, \psi) = \{ae^{\zeta\omega} : R_{N,M}(\phi, \psi)(\zeta) = 0\}.$$

正の数 ε に対して、 $\mathcal{R}_{N,M}(\phi, \psi)$ の ε -近傍 $\mathcal{R}_{\varepsilon,N,M}(\phi, \psi)$ を

$$\mathcal{R}_{\varepsilon,N,M}(\phi, \psi) = \{ae^{\zeta\omega} : |R_{N,M}(\phi, \psi)(\zeta)| \leq \varepsilon\}$$

で定義する。 $1/N$ と M はそれぞれ離散モデルのメッシュのサイズと、そのモデル上での再帰計算の深さに対応する。 $C^0(\overline{D})$ の部分集合 S_1, S_2 に対して、

$$\rho(S_1, S_2) = \sup_{f_1 \in S_1} \inf_{f_2 \in S_2} \|f_1 - f_2\|_{C^0(\overline{D})}$$

とおく。

本講演の目的は、(1.2) の係数の実用的な再構成法を与え、その Hölder タイプの安定性と誤差評価を示すことである。係数の不連続点の発見法は、池畠氏 [6], [7] によって研究された。Alessandrini [1], [2] と Sylvester-Uhlmann [10] は、境界値逆問題の境界上での Hölder タイプの安定性を証明した。 $\mathbf{R}^n, n \geq 3$ の領域内部での log タイプの安定性は、同じく Alessandrini によって証明された。また $n = 2$ の場合は、Nachman が証明したとアナウンスしている（論文は未発表）。Isakov [8] は、領域内部においては log タイプの安定性が最良であり、一般に Hölder タイプの安定性は成り立たないと言っている。しかしながら、議論を係数 a_δ の再構成 $\mathcal{R}_{N,M}$ に限定すれば、Hölder タイプの安定性が得られる（定理 1）。さらに、再構成の誤差の評価も可能である（定理 2）。

定理 1. 十分に大きな正整数 M_0 をとる。任意の正整数 $N \gg 1$ と任意の $|\delta_1| \leq 1$ に対して、次のような実数 $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ と定数 $C > 0$ が存在する：任意の $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ と $|\delta_2| \leq 1$ に対して、もし

$$|\Lambda_1(u_{\delta_1}) - \Lambda_1(u_{\delta_2})| \leq \varepsilon \quad \text{on } \partial D$$

であれば、

$$\rho(\mathcal{R}_{N,M_0+N}(\Lambda_0(u_{\delta_1}), \Lambda_1(u_{\delta_1})), \mathcal{R}_{N,M_0+N}(\Lambda_0(u_{\delta_2}), \Lambda_1(u_{\delta_2}))) \leq C\varepsilon^\alpha$$

が成り立つ。

定理 2. 十分に大きな正整数 M_0 をとる。このとき、 $|\delta| \leq 1$ に対して、

$$R_{N, M_0+N}(\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))(\delta) = O(N^{-1/2})\delta + O(N^{-2})$$

がなりたつ。ここで、 $O(N^{-1/2})$ と $O(N^{-2})$ は δ に依存しない。したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、適当な正整数 N_0 が存在して、すべての $N \geq N_0$ と $|\delta| \leq 1$ に関して、

$$a_\delta \in \mathcal{R}_{\varepsilon, N, M_0+N}(\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))$$

が得られる。

残念ながら、一般には $\mathcal{R}_{N, M}(\phi, \psi) = \{ae^{\zeta\omega} : R_{N, M}(\phi, \psi)(\zeta) = 0\}$ は複数の要素をもった有限集合なので、境界条件 $(\phi, \psi) = (\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))$ から係数を一意的に決定することはできない。しかしながら、多くの計算機実験によれば（もちろんこれは経験則にしかすぎないが）、もしを境界条件 $(\phi_1, \psi_1), \dots, (\phi_n, \psi_n)$ が適切に与えられれば、汎関数

$$|R_{N, M}(\phi_1, \psi_1)(\delta)|^2 + \dots + |R_{N, M}(\phi_n, \psi_n)(\delta)|^2$$

を最小化する δ を求めることによって、係数を一意的に決定することができる。（cf. [4]）。

2. 大域的な差分モデルの構築

補題 1. $p(z) = \sum_{\ell=k}^m c_\ell z^\ell$, $c_k \neq 0$ なる多項式 $p(z)$ を考え、

$$(2.1) \quad \varepsilon_0 = \min \left\{ |c_k|/2, \frac{(|c_k|/2)^{k+1}}{\left(\max(|c_k|/2, \sum_{\ell=k+1}^m |c_\ell|) \right)^k} \right\}$$

とおく。任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して、単位開円盤 $|z| < 1$ 上で $|p_\varepsilon(z) - p(z)| \leq \varepsilon$ をみたす多項式 $p_\varepsilon(z)$ が存在すれば、 $p(z)$ と $p_\varepsilon(z)$ は $|z| < (2\varepsilon/|c_k|)^{1/k}$ において重複度まで込めて同じ個数の零点をもつ。

ここで $b = \log a$ かつ $b_\delta = \log a_\delta$, $|\delta| \leq 1$ と置き、偏微分作用素の族

$$(2.2) \quad L_\delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial b_\delta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b_\delta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad |\delta| \leq 1$$

を考える。明らかに (2.2) は (1.1)| $_{a=a_\delta}$ と同値であり、

$$(2.3) \quad b_\delta = b + \delta\omega$$

となる。

補題 2. $u \in C^\infty(\overline{D})$ は (2.2) の解とする。 $(x \pm h, y), (x, y \pm h) \in D$ なる $0 < h \leq 1$ と $(x, y) \in D$ に対して、

$$(2.4) \quad e_\delta(x, y, h) = u(x, y) - \frac{4 + b_\delta(x + h, y) - b_\delta(x - h, y)}{16} u(x + h, y) \\ - \frac{4 - b_\delta(x + h, y) + b_\delta(x - h, y)}{16} u(x - h, y) \\ - \frac{4 + b_\delta(x, y + h) - b_\delta(x, y - h)}{16} u(x, y + h) \\ - \frac{4 - b_\delta(x, y + h) + b_\delta(x, y - h)}{16} u(x, y - h)$$

と置く。このとき、 $|\delta| \leq 1$ に対して、

$$(2.5) \quad |e_\delta(x, y, h)| \leq \frac{h^4}{24} \left(\frac{1}{2} + \|b_\delta\|_{C^3(\overline{D})} \right) \|u\|_{C^4(\overline{D})}$$

が成り立つ。

十分に大きな自然数 N をとり、 $h = 1/N$ かつ $(x_0, y_0) = (n_0 h, h)$ とおく。ここで、 $n_0 < N$ は正定数を表す。われわれは、次のような有限個の点

$$(2.6) \quad (x_i, y_j) = (x_0 + ih, y_0 + jh), \quad -N \leq i, j \leq N$$

を考える。 $\Delta = \{(i, j) : (x_i, y_j) \in \overline{D}\}$ かつ $\partial\Delta = \{(i, j) : (x_i, y_j) \in \partial D\}$ と定義する。 $\|u\|_{C^4(\overline{D})} \leq C_0$ なる、(2.2) の解 $u \in C^\infty(\overline{D})$ と添字 $(i, j) \in \Delta$ に対して、

$$(2.7) \quad U_N(i, j) = u(x_i, y_j), \quad E_{\delta, N}(i, j) = \begin{cases} e_\delta(x_i, y_j, h) & \text{if } (i, j) \in \Delta \setminus \partial\Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置く。 X_N は

$$p(\xi, \eta) = \xi^N \eta^N \sum_{(i, j) \in \Delta} P(i, j) \xi^i \eta^j, \quad \sum_{(i, j) \in \Delta} P(i, j) = 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq P(i, j) \leq 1$$

なる多項式 $p(\xi, \eta)$ 全体の集合とする。われわれは、 X_N の多項式を確率多項式と呼ぶことにする。変換 $T_{\delta, N} : X_N \rightarrow X_N$ を

$$(2.8) \quad T_{\delta, N} \left(\xi^N \eta^N \sum_{(i, j) \in \Delta} P(i, j) \xi^i \eta^j \right) = \xi^N \eta^N \sum_{(i, j) \in \Delta} P(i, j) r_{\delta, N}(\xi, \eta, i, j) \xi^i \eta^j$$

で定義する。ただしここで、 $(i, j) \in \Delta \setminus \partial\Delta$ のとき

$$r_{\delta, N}(\xi, \eta, i, j) = \frac{4 + b_\delta(x_{i+1}, y_j) - b_\delta(x_{i-1}, y_j)}{16} \xi + \frac{4 - b_\delta(x_{i+1}, y_j) + b_\delta(x_{i-1}, y_j)}{16} \xi^{-1} \\ + \frac{4 + b_\delta(x_i, y_{j+1}) - b_\delta(x_i, y_{j-1})}{16} \eta + \frac{4 - b_\delta(x_i, y_{j+1}) + b_\delta(x_i, y_{j-1})}{16} \eta^{-1},$$

また $(i, j) \in \partial\Delta$ のときは $r_{\delta, N}(\xi, \eta, i, j) = 1$ とする。 $(k, \ell) \in \Delta$ に対して、確率多項式の列 $\{p_{\delta, N, m}(\xi, \eta, k, \ell)\}$ を次のようにして構成する：

$$(2.9) \quad \begin{aligned} p_{\delta, N, 0}(\xi, \eta, k, \ell) &= \xi^{N+k} \eta^{N+\ell}, \\ p_{\delta, N, m+1}(\xi, \eta, k, \ell) &= (T_{\delta, N} p_{\delta, N, m})(\xi, \eta, k, \ell) \quad \text{for } m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$P_{\delta, N, m}(i, j, k, \ell)$ は多項式 $p_{\delta, N, m}(\xi, \eta, k, \ell)$ 中の $\xi^{N+i} \eta^{N+j}$ の係数を表す i.e.,

$$(2.10) \quad p_{\delta, N, m}(\xi, \eta, k, \ell) = \xi^N \eta^N \sum_{(i, j) \in \Delta} P_{\delta, N, m}(i, j, k, \ell) \xi^i \eta^j.$$

$D, (x_0, y_0)$ と N が与えられれば、(2.8) – (2.10) より、有限の手順で $P_{\delta, N, m}(i, j, k, \ell)$ を具体的に計算出来ることは、重要である。

補題 3. $U_N, E_{\delta, N}$ と $P_{\delta, N, m}$ を (2.7) – (2.10) によって定義する。このとき、任意の $(k, \ell) \in \Delta$ と $M = 1, 2, 3, \dots$ に対して、次が成り立つ：

$$(2.11) \quad \begin{aligned} U_N(k, \ell) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{(i, j) \in \Delta} E_{\delta, N}(i, j) P_{\delta, N, m}(i, j, k, \ell) \\ &\quad + \sum_{(i, j) \in \Delta} U_N(i, j) P_{\delta, N, M}(i, j, k, \ell), \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad \left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{(i, j) \in \Delta} E_{\delta, N}(i, j) P_{\delta, N, m}(i, j, k, \ell) \right| \leq \frac{h^4 M}{24} \left(\frac{1}{2} + \|b_\delta\|_{C^3(\overline{D})} \right) \|u\|_{C^4(\overline{D})}.$$

$N \gg 1$ と $M \gg 1$ に対して、reconstruction map $\mathcal{R}_{N, M}$ を次のようにして構成する：
 $u \in C^\infty(\overline{D})$ は (2.2) の解とする。Cauchy-Kovalevskaya の方法を初期条件 $\phi = \Lambda_0(u)$, $\psi = \Lambda_1(u)$ と方程式 (2.2) に適用することによって、 $\|\tilde{u}\|_{C^4(\overline{D})} \leq 2C_0$ かつ

$$(2.13) \quad \tilde{u} = \phi, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \psi \quad \text{on } \Gamma \quad \text{and} \quad \tilde{u}(x_0, y_0) - u(x_0, y_0) = O(h^2).$$

なる近似解 $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ を構成することが出来る。 $\tilde{U}_N(i, j) = \tilde{u}(x_i, y_j)$ for $-N \leq i, j \leq N$ と置く。多項式

$$(2.14) \quad R_{N, M}(\phi, \psi)(\delta) = \tilde{U}_N(0, 0) - \sum_{(i, j) \in \partial\Delta} \tilde{U}_N(i, j) P_{\delta, N, M}(i, j, 0, 0)$$

を導入し、 $C^\infty(\overline{D})$ の部分集合 $\mathcal{R}_{N, M}(\phi, \psi)$ と $\mathcal{R}_{\varepsilon, N, M}(\phi, \psi)$, $\varepsilon > 0$ を

$$(2.15) \quad \mathcal{R}_{N, M}(\phi, \psi) = \{\exp(b + \zeta\omega) : R_{N, M}(\phi, \psi)(\zeta) = 0\},$$

$$(2.16) \quad \mathcal{R}_{\varepsilon, N, M}(\phi, \psi) = \{\exp(b + \zeta\omega) : |R_{N, M}(\phi, \psi)(\zeta)| \leq \varepsilon\}$$

で定義する。

特に断らない限り、 $U_{\delta, N}(i, j)$ と $E_{\delta, N}(i, j)$ は (2.7) において u を u_δ で置き換えることによって定義される。さらに、(2.13) において u を u_δ 置き換えることによって $\tilde{u}_\delta$ を定義し、 $\tilde{U}_{\delta, N}(i, j) = \tilde{u}_\delta(x_i, y_j)$ と置く。

3. 確率多項式の性質

補題 4. $N \gg 1$ と $m = 1, 2, \dots$ に対して、

$$(3.1) \quad \sum_{(i,j) \in \Delta} \sum_{n=0}^{\infty} |\text{Coefficient}[P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell), \delta^n]| \leq (1 + O(N^{-1}))^m \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

が成り立つ。ここで、 $\text{Coefficient}[p(\delta), \delta^n]$ は $p(\delta)$ 中の δ^n の係数を表す。

補題 5. 任意に正整数 M_0 を取りこれを固定する。このとき、 $|\delta| \leq 1$ に関して一様に

$$(3.2) \quad \sum_{(i,j) \in \Delta \setminus \partial\Delta} P_{\delta,N,M_0+N}(i,j,0,0) = O(N^{-1/2}) \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

と評価される。

4. 定理の証明の概要

定理 1 の証明の概要. $|\delta_1| \leq 1$ と $|\delta_2| \leq 1$ に対して、 $v_1 = u_{\delta_1}$, $\phi_1 = \Lambda_0(v_1)$, $\psi_1 = \Lambda_1(v_1)$ かつ $v_2 = u_{\delta_2}$, $\phi_2 = \Lambda_0(v_2)$, $\psi_2 = \Lambda_1(v_2)$ と置き、(2.13) において $\{u, \phi, \psi\}$ を $\{v_1, \phi_1, \psi_1\}$ と $\{v_2, \phi_2, \psi_2\}$ で置き換えることにより、 $\tilde{v}_1$ と $\tilde{v}_2$ のそれぞれを定義する。さらに、 $\tilde{V}_{1,N}(i,j) = \tilde{v}_1(x_i, y_j)$ かつ $\tilde{V}_{2,N}(i,j) = \tilde{v}_2(x_i, y_j)$ と置く。 $N \gg 1$ と $M = M_0 + N$ に対して、2つの多項式 $R_1(\delta)$ と $R_2(\delta)$ を

$$\begin{aligned} R_1(\delta) &= \tilde{V}_{1,N}(0,0) - \sum_{(i,j) \in \partial\Delta} \tilde{V}_{1,N}(i,j) P_{\delta,N,M}(i,j,0,0), \\ R_2(\delta) &= \tilde{V}_{2,N}(0,0) - \sum_{(i,j) \in \partial\Delta} \tilde{V}_{2,N}(i,j) P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) \end{aligned}$$

で定義する。 $\mathcal{R}_{N,M}(\phi_\ell, \psi_\ell) = \{\exp(b + \zeta\omega) : R_\ell(\zeta) = 0\}$, $\ell = 1, 2$ であることに注意する。

$R_1(\zeta) = 0$ の解 ζ_1 を勝手に取り固定する。 $\tilde{V}_{1,N}(i,j) = \tilde{V}_2(i,j)$, $(i,j) \in \partial\Delta$ と (2.13) より、 $N \gg 1$ に対して、

$$\sup_{\zeta \in \mathbf{C}} |R_1(\zeta) - R_2(\zeta)| \leq O(h) \sup_{\partial D} |\psi_1 - \psi_2|$$

を得る。仮定 $R_1(\zeta) \neq 0$ により、 $R_1(\zeta)$ はある正定数 $k = k(\zeta_1)$ を用いて

$$R_1(\zeta) = \sum_{\ell=k}^M c_\ell (\zeta - \zeta_1)^\ell, \quad c_k \neq 0$$

と表される。補題 1 より、適当な $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\zeta_1) > 0$ と $C = C(\zeta_1) > 0$ が存在して、すべての $|\delta_2| \leq 1$ に対して、

$$\sup_{\partial D} |\psi_1 - \psi_2| \leq \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \implies \quad d(a_{\zeta_1}, \mathcal{R}_{N,M}(\phi_2, \psi_2)) \leq C\varepsilon^{1/k}$$

がなりたつ。

上述の議論は、 $R_1(\zeta) = 0$ の任意の解 ζ_1 とすべての $|\delta_2| \leq 1$ に対して、そのまま成り立つ。したがって、代数方程式 $R_1(\zeta) = 0$ の解の個数は有限個なので、定理 1 の証明が完了した。■

定理 2 の証明の概要. $N \gg 1$ かつ $M = M_0 + N$ と取る。多項式 $R_{N,M}(\phi, \psi)(\delta)$ の定義と補題 3, 5 より、

$$\begin{aligned} & R_{N,M}(\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))(\delta) \\ &= \tilde{U}_{\delta,N}(0,0) - \sum_{(i,j) \in \partial\Delta} \tilde{U}_{\delta,N}(i,j) P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) \\ &= (\tilde{U}_{\delta,N}(0,0) - U_{\delta,N}(0,0)) \\ &\quad + \left(\sum_{(i,j) \in \partial\Delta} U_{\delta,N}(i,j) P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) - \sum_{(i,j) \in \partial\Delta} \tilde{U}_{\delta,N}(i,j) P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) \right) \\ &\quad + \sum_{(i,j) \in \Delta \setminus \partial\Delta} U_{\delta,N}(i,j) P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{(i,j) \in \Delta} E_{\delta,N}(i,j) P_{\delta,N,m}(i,j,0,0) \\ &= O(N^{-2}) + 0 + O(N^{-1/2}) + O(N^{-3}) \end{aligned}$$

が $|\delta| \leq 1$ に関して一様に成り立つ。よって、定理 1 が証明された。■

参考文献

- [1] G. Alessandrini, Stable determination of conductivity by boundary measurements, *Applic. Analysis* **27** (1988), 153-172.
- [2] ———, Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements, *J. Diff. Equat.* **84** (1990), 252-273.
- [3] K. Amano, Approximate general solution of degenerate parabolic equation related to population genetics, *Electronic Journal of Differential Equations* **1995** (1995), 1-14.
- [4] ———, A finite difference model for Calderón's boundary inverse problem, preprint.
- [5] ———, A reconstruction method with Hölder type stability for boundary inverse problem, preprint.
- [6] M. Ikehata, Reconstruction of an obstacle from the scattering amplitude at a fixed frequency, *Inverse Problems* **14** (1998), 949-954.
- [7] ———, Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements, *Comm. Partial Differential Equations* **23** (1998), 1459-1474.

- [8] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences **127**, Springer, 1998.
- [9] K. Itô and H. P. McKean, Jr., Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
- [10] J. Sylvester and G. Uhlmann, Inverse boundary value problems at the boundary – continuous dependence, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 197-221.
- [11] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed problems, John Wiley and Sons, New York - Toronto, 1977.