

境界で退化した楕円型作用素 に対する一般境界値問題

京大・理 島倉紀夫

§ 1. 序 説

n 次元実 Euclid 空間 R^n の有界領域 Ω は, その境界が C^∞ 級の compact 可微分多様体 Γ であって, 局所的には Γ の一方側にだけあるような領域であるとする. $\bar{\Omega}$ で定義された C^∞ 級の函数 $\varphi(x)$ は, Ω で常に正であり, かつ Γ の適当な近傍では点 x から Γ への距離に等しいとする:

$$\begin{cases} \varphi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}); & \Omega \text{ で } \varphi(x) > 0, \text{ かつ,} \\ \varphi(x) = \text{dis}(x, \Gamma), & \text{dis}(x, \Gamma) < \delta_0 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (1.1)$$

本稿において, $\bar{\Omega}$ で定義されその境界で退化した楕円型作用素とは, 次のような形をしたものを意味する:

$$L(x; D_x)u(x) \equiv \sum_{h=0}^k P^h(x; D_x) \{ \varphi^{k-h}(x) u(x) \}. \quad (1.2)$$

ここで k は自然数で, 各 $0 \leq h \leq k$ に対して $P^h(x; D_x)$ は $\bar{\Omega}$ で C^∞ 級の係数をもつ $(m-h)$ 階以下の偏微分作用素であって, 特に

$$P^0(x; D_x) \equiv \sum_{|\nu| \leq m} p_\nu^0(x) D_x^\nu, \quad (D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}) \quad (1.3)$$

は丁度 m 階の楕円型作用素で $\bar{\Omega}$ で退化していないとする:

$$x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^m, \xi \neq 0 \text{ のとき } \sum_{|\nu|=m} p_\nu^0(x) \xi^\nu \neq 0. \quad (1.4)$$

ここで大切なのは k と m の関係であるが以後常に

$$0 < k \leq m \quad (1.5)$$

と仮定しよう。即ち, L の偏微分の階数は m で, $(m-k)$ 階の項は ($k \leq k$) 境界 Γ で $(k-k)$ 次の退化をしている。例えば, Legendre の作用素 $-\frac{d}{dx} \{(1-x^2) \frac{du}{dx}\}$ の場合 $m=1, \Omega=(-1,1)$, $m=2$ かつ $k=1$ である。

以後, 超函数論に出てくる空間 $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$ 等は L , Schwartz の記号に従い, Sobolev 空間 $L^2(\Omega)$, $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega)$ 等は Lions-Magenes [4] に従うものとする。

さて, 我々が考えるのは超函数の意味の Ω での微分方程式

$$L(x; D_x) u(x) = f(x) \quad (E)$$

である。右辺 $f(x)$ は常に $L^2(\Omega)$ から与え, 解 $u(x)$ は

$$W_k^m(\Omega) = \{ u(x) \in H^{m-k}(\Omega); \varphi^k(x) u(x) \in H^m(\Omega) \} \quad (1.6)$$

なる Hilbert 空間の中に求めるものとする。言うまでもなく、 Ω の内部に任意の compact 集合 K をとりその上だけで (E) を見るならば K が境界で退化していることの困難さは何らあらわれない。故に問題は Ω 全体、特に、その境界の近傍での様相を調べることにある。それには、退化していない楕円型作用素の場合がそうであったように、方程式 (E) に更に何個かの境界条件を課して考えるべきであろう。その境界条件としてどのようなものがあり得るかを考察するのが本稿の目的である。

例 1.1: $m=2b$, $0 < k \leq b$ として方程式

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \varphi^k(x) A(x; D_x) u(x) = f(x) \quad (1.7)$$

をとりあげよう。ここで A は $2b$ 階強楕円型で、Dirichlet 問題の場合に解の存在と一意性が成り立つ作用素としよう。即ち A は $H_0^b(\Omega)$ から $H^{-b}(\Omega)$ の上への同型でありかつ $H^{2b}(\Omega) \cap H_0^b(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ の上への同型でもあるとしよう。すると、 $\mathcal{L}$ は $W_k^{2b}(\Omega) \cap H_0^b(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ の上への同型を与える。
(のある開部分空間)

この最後の部分の証明は、 A に対する Dirichlet 問題の解のなめらかさの議論そのものであるが、この事実は次のようにも説明され得る：即ち、(1.7) において $\varphi(x)$ のところを、

$\varphi(x)+\varepsilon$ でおきかえた方程式を $H_0^b(\Omega)$ で解こう. ε を正の助変数とすると解 $u_\varepsilon(x)$ は $H^{2b}(\Omega) \cap H_0^b(\Omega)$ の中に一意的に求まる. $\varepsilon \downarrow 0$ としたときの $u_\varepsilon(x)$ の極限 $u(x)$ が $W_k^{2b}(\Omega)$ に属していてそれが (1.7) の一意的な解になっている. この考え方を普遍化するならば, 一般に (1.2) で定義された L を, その $\varphi(x)$ を $\varphi(x)+\varepsilon$ でおきかえて得られる作用素 L_ε (これは退化していない) の $\varepsilon \downarrow 0$ のときの極限とみなすことが出来る. そして各 L_ε に関する方程式 (E) を適当な境界条件のもとで解くことによって極限の L に関する境界値問題が得られるであろう. 筆者はまだこの方法を組織的に試していない. しかし, こうして得られる境界値問題は, L に対して設定され得る境界値問題のすべてではないであろうことをここで注意しておく.

この報告は筆者の論文 [6] の内容紹介を主目的とする. この論文の動機になったのは Baouendi [2] 及び Baouendi-Goulaouic [3] のふたつの仕事であった. そこでこのうち後者の結果を手短かにふり返ってみよう.

例 1.2: 文献 [2] においては $m=2$, $k=1$ の場合の次の方程式が取扱われている:

$$Lu(x) \equiv \sum_{j=1}^m D_j \{ \varphi(x) D_j u(x) \} + c(x) u(x) = f(x), \quad (1.8)$$

但し, $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

ここで $c(x) \in \mathfrak{B}(\bar{\Omega})$ で $\bar{\Omega}$ において $c(x) > 0$ とする. これを解くのに Hilbert 空間

$$V(\Omega) = \{u(x) \in L^2(\Omega); \sqrt{\varphi(x)} D_j u(x) \in L^2(\Omega), 1 \leq j \leq n\}. \quad (1.9)$$

を導入すると, $V(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset V(\Omega)'$ とみなせる ($V(\Omega)'$ は $V(\Omega)$ の共役空間). そして L は $V(\Omega)$ から $V(\Omega)'$ の上への同型を与える. このとき [4] が証明したことは L の *hypo-ellipticity* である. 即ち先ず $f(x) \in L^2(\Omega)$ ならば解 $u(x) \in V(\Omega)$ は実は $W_1^2(\Omega)$ に属する. 以下順に $f(x) \in H^l(\Omega)$ であれば, $u(x) \in W_1^{l+2}(\Omega) (\equiv \{u(x) \in H^{l+1}(\Omega); \varphi(x)u(x) \in H^{l+2}(\Omega)\})$ となる ($l=1, 2, 3, \dots$).

退化していない 2 階方程式の場合, 一般にはひとつの境界条件をおくのであるが, 方程式 (1.8) の場合何らの境界条件も課せられていないことに注目しよう. 例 1.1 の直後にのべた論法に従えば, この (1.8) は, 退化していない方程式に対する Neumann 問題の極限であって, Neumann 条件が極限移行の過程で消失したものであるとも解釈されよう (尚この場合は Dirichlet 問題からの極限ではない). とにかくこの例 1.2 では空間 $V(\Omega)$ を導入することが L の形 (1.8) からみて極めて自然であり, (1.8) は一種の変分問題から派生した形をとって

る。所でこの L 自身は自己共役拡張をもつか、それに任意の1階の項をつけ加えて

$$\sum_{j=1}^m D_j \{ \varphi(x) D_j u(x) \} + \sum_{j=1}^m b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad (1.10)$$

とするとどうなるであろうか。ここで $b_j(x) \in \mathcal{B}(\bar{\Omega})$ とする。このときもはや空間 $V(\Omega)$ は役に立たず、初めから問題設定をやり直さなくてはならないことになる。

次節では形式的自己共役でない、むしろそれから相当距った作用素を考える。しかも方程式(E)と同時にその形式的共役な方程式も取扱い比較するということが出来ない。これは本稿の大きな欠点であるが、ひとまず現在までに得られた事実だけを書くことにする。又、得られた命題や定理の証明は一切与えないが、そのためには[6]を参照されたい。

§ 2. 主要結果

最初に、 $W_k^m(\Omega)$ に属する $u(x)$ に対してその m 個の traces $\gamma_q u(x')$ ($-k \leq q \leq m-k-1$) を定義しよう。

まず正数 δ_1 ($0 < \delta_1 < \delta_0$: 前節(1.1)をみよ) に対して

$$\Omega_{\delta_1} = \{x \in \bar{\Omega} ; \text{dis}(x, \Gamma) \leq \delta_1\} \quad (2.1)$$

とおこう。これは $\bar{\Omega}$ における Γ の δ_1 -開近傍である。境界 Γ 上の点を一般に x' であらわすと, δ_1 を十分小さくすることによって, Ω_{δ_1} から $\Gamma \times [0, \delta_1]$ の上への C^∞ 級同相写像 χ を

$$\varphi(\chi^{-1}(x', t)) \equiv t, \quad 0 \leq t \leq \delta_1 \text{ のとき}, \quad (2.2)$$

なる如く構成することが出来る (それには $0 \leq t \leq \delta_1$ を助変数とする曲面族 $\varphi(x) = t$ への直交曲線族 (orthogonal trajectories) を利用すればよい)。 t は Γ の法線方向の変数となる。

そこで, $k < m$ のとき, $0 \leq g \leq m-k-1$ に対しては

$$\gamma_g u(x') = \lim_{t \downarrow 0} D_t^g u(\chi^{-1}(x', t)), \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq g \leq m-k-1 \text{ のとき} \\ \text{但し, } D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right) \quad (2.3)$$

と定義する。次に一変数 t の函数 $\alpha(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ を

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \delta_1/3 \text{ のとき}, \\ 0, & 2\delta_1/3 \leq t < \infty \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.4)$$

となる様にひとつ選んで固定しよう。そこで,

$$\gamma_{-j} u(x') = (-1)^{j-1} \int_0^\infty t^{j-1} \alpha(t) u(\chi^{-1}(x', t)) dt, \quad (2.5)$$

但し, $1 \leq j \leq k$ のとき

と定義しよう。すると, $u(x) \in W_k^m(\Omega)$ に対して縦ベクトル

$$\begin{aligned} \vec{u}(x') &= {}^t \{ \gamma_{-k} u(x'), \dots, \gamma_{m-k-1} u(x') \} \\ &\in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \dots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned} \quad (2.6)$$

が定義された。 $\gamma_g u(x')$ ($-k \leq g \leq -1$) の定義は勿論函数 $\alpha(t)$

のえらび方によるのであるが、仮にこれを $\gamma_q^\alpha u(x')$ とかくなれば、他に (2.4) の性質をもつ $\beta(t)$ をとってきて $\gamma_q^\beta u(x')$ を作ったとき $\gamma_q^\alpha u(x') - \gamma_q^\beta u(x') \in H^m(\Gamma)$ となる。この意味で $\alpha(t)$ の選び方による $\gamma_q u(x')$ のちがいは小さい。そこで以後は $\alpha(t)$ を固定して単に $\gamma_q u(x')$ と書くことにする。

さて、作用素 L は Ω_{δ_1} では次のようにもかける：

$$L(x; D_x) \equiv \sum_{h=0}^k P^h(x^{-1}(x', t); D_{x'}, D_t) \{t^{k-h} u(x^{-1}(x', t))\} \quad (2.7)$$

(前節 (1.2) をみよ), ここで $D_{x'}$ は Γ 内の微分をあらわす。

更に各 P^h は, Γ 上の局所座標系 x' を用いて

$$P^h(x^{-1}(x', t); D_{x'}, D_t) = \sum_{|\nu'|+l \leq m-h} p_{\nu', l}^h(x', t) D_{x'}^{\nu'} D_t^l, \quad (2.8)$$

但し, $0 \leq h \leq k$;

と書ける。そこで境界の各点 x' で P^h の主要部をとって

$$\Pi^h(x'; D_{x'}, D_t) \equiv \sum_{|\nu'|+l = m-h} p_{\nu', l}^h(x', 0) D_{x'}^{\nu'} D_t^l, \quad (2.9)$$

但し, $0 \leq h \leq k$

とおきこれらを集めて

$$\Lambda(x', t; D_{x'}, D_t) u(x', t) \equiv \sum_{h=0}^k \Pi^h(x'; D_{x'}, D_t) \{t^{k-h} u(x', t)\} \quad (2.10)$$

とおくと, これによって Γ 上の局所座標系のとり方によらない微分作用素が定義されたことになる。これは境界 Γ の各点における L の接触作用素の役目を果すものである。以後

L に課せられる条件は実は Λ だけに課せられる条件である。

まず (1.5) において m は偶数としよう：

$$0 < k \leq m = 2b. \quad (2.11)$$

そして $P^0(x; D_x)$ は前節 (1.4) の意味で楕円型であるばかりでなく境界の各点で properly elliptic としよう，即ち， $x' \in \Gamma$ 及び $\xi' \in T_{x'}^*$ (x' における Γ の^実共役接空間) ($\xi' \neq 0$) を固定するとに， τ の多項式 $\Pi^0(x'; \xi', \tau)$ は $\text{Im } \tau > 0$ 及び $\text{Im } \tau < 0$ なる零点をそれぞれ丁度 b 個ずつもつとしよう。

次に『 L の指数条件』なるものを定義しよう。(2.10) 式において τ を $-D_\tau = i \frac{\partial}{\partial \tau}$ で， $D_{x'}$ を $\xi' \in T_{x'}^*$ で， D_x を τ で形式的におきかえると， $x' \in \Gamma$ 及び $\xi' \in T_{x'}^*$ を助変数とする常微分作用素 $\Lambda(x', -D_\tau; \xi', \tau)$ が得られる。そこで，

$$\begin{aligned} \Phi_{x'}(\rho) &\equiv [\tau^{k-m-\rho} \Lambda(x', -D_\tau; \xi', \tau) \tau^\rho] \Big|_{\tau \rightarrow +\infty} \\ &= \sum_{h=0}^k p_{0, m+k-k}^{k-h}(x', 0) i^h \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-h+1)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

とおく。これは ρ について丁度 k 次の多項式で，その係数は $\mathfrak{B}(\Gamma)$ に属する x' の函数である (ξ' には無関係)。そこで方程式 $\Phi_{x'}(\rho) = 0$ の k 個の根に対して次の条件をおく。

これは退化していない楕円型作用素の場合は必要の生じなかった事態である：

【 L の指数条件】: $\Phi_{x'}(p)=0$ の k 個の根 $\{p_j(x')\}_{j=1}^k$ は,

Γ 上のすべての点 x' で次のふたつの条件を満足する:

(I-1) $p_j(x')$ の実部はすべて $k-m-\frac{1}{2}$ より小さい:

$$\operatorname{Re} p_j(x') < k-m-\frac{1}{2} \quad (1 \leq j \leq k);$$

(I-2) もし $k \geq 2$ であれば, 任意の 2 根の差 $p_\ell(x') - p_j(x')$
 $(1 \leq \ell < j \leq k)$ は決して整数ではない (特に, $\Phi_{x'}(p)=0$
 は重根をもたない).

細かい証明に立ち入ることなしにこの条件の意味を説明することは難しいが, 後述の定理を得るためには上記のうち (I-1) はほぼ必須の条件であるように思われる. しかし, (I-2) は方法上の理由から課せられた幾分人為的な条件であって応用上もいささか面白くない. 実際, 本節の最後に挙げる例 2.1 はこの (I-2) が成り立たないにも拘らず後述の定理の結論は正しい場合に当たっている.

今度は境界作用素 $\mathcal{B}(x'; D_{x'})$ の導入にとりかかるう. それは一般に次のような $(b \times m)$ -行列である:

$$\mathcal{B}(x'; D_{x'}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{1,-k}(x'; D_{x'}) & \cdots & \mathcal{B}_{1,m-k-1}(x'; D_{x'}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{B}_{b,-k}(x'; D_{x'}) & \cdots & \mathcal{B}_{b,m-k-1}(x'; D_{x'}) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

ここで各 $\mathcal{B}_{j,q}(x'; D_{x'})$ ($1 \leq j \leq b$, $-k \leq q \leq m-k-1$) は Γ 上の $(m_j - q)$ 階以下の偏微分作用素でその係数は $\mathcal{B}(\Gamma)$ に属するものとする。但し, m_j ($1 \leq j \leq b$) は整数で

$$-k \leq m_j \leq m-k-1 \quad (1 \leq j \leq b). \quad (2.14)$$

特に $m_j - q$ が負のときは $\mathcal{B}_{j,q}(x'; D_{x'})$ は 0 作用素とする。

本節の最初にのべた traces の定義を思いおこすと $\mathcal{B}(x'; D_{x'}) \vec{u}(x')$ は b 個の成分をもつ縦ベクトルであって,

$$u(x) \in W_k^m(\Omega) \text{ のとき, } \mathcal{B}(x'; D_{x'}) \vec{u}(x') \in \prod_{j=1}^b H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.15)$$

一般境界値問題の定式化: 与えられた函数 $f(x) \in L^2(\Omega)$ と, 与えられた b 個の函数からなる縦ベクトル $\varphi(x) \in \prod_{j=1}^b H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ に対して, Ω 内で超函数の意味の微分方程式

$$L(x; D_x) u(x) = f(x) \quad (E)$$

をみたし, かつ, Γ 上で境界条件

$$\mathcal{B}(x'; D_{x'}) \vec{u}(x') = \varphi(x') \quad (B)$$

をみたす函数 $u(x) \in W_k^m(\Omega)$ を求めよ。

退化していない作用素に対する Agmon-Douglas-Nirenberg[1] の理論がそうであったように, 上記の一般境界値問題の適切な

(well-posed) であるためには, $\mathcal{B}(x'; D_{x'})$ は全く任意ではあり得ない. そこにいわゆる covering condition が要請される. ここではそれを Shapiro-Lopatinski の条件と呼ぶことにしよう. 以下その内容を明らかにしてゆく.

(2.10) において $D_{x'}$ を $\xi' \in T_{x'}^*$ で形式的におきかえて得られる t に関する常微分作用素

$$\Lambda(x', t; \xi', D_t) w(t) \equiv \sum_{h=0}^k \Pi^h(x'; \xi', D_t) \{t^{k-h} w(t)\} \quad (2.16)$$

は, $x' \in \Gamma$ と $\xi' \in T_{x'}^*$ ($\xi' \neq 0$) を助変数として固定することにより,

$$W_k^m(\mathbb{R}_+) \equiv \{w(t) \in H^{m-k}(\mathbb{R}_+); t^k w(t) \in H^m(\mathbb{R}_+)\} \quad (2.17)$$

から $L^2(\mathbb{R}_+)$ への写像である (ここで $\mathbb{R}_+ = \{t > 0\}$). 任意の $w(t) \in W_k^m(\mathbb{R}_+)$ に対してその traces $\vec{w} = {}^t\{\gamma_{-k} w, \dots, \gamma_{m-k-1} w\} \in \mathbb{C}^m$ は (2.3), (2.5) と同様に次のように定義される:

$$\gamma_q w = \begin{cases} (-1)^{q-1} \int_0^\infty t^{-q-1} w(t) dt, & -k \leq q \leq -1 \text{ のとき,} \\ \lim_{t \downarrow 0} D_t^q w(t), & 0 \leq q \leq m-k-1 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (2.18)$$

そこで, 作用素 $\Lambda(x', t; \xi', D_t)$ から, 次のような m 次正方行列 $\mathcal{R}(x'; \xi')$ を構成する:

$$\mathcal{R}(x'; \xi') = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{-k, -k}(x'; \xi') & \cdots & \mathcal{R}_{-k, m-k-1}(x'; \xi') \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{R}_{m-k-1, -k}(x'; \xi') & \cdots & \mathcal{R}_{m-k-1, m-k-1}(x'; \xi') \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

基本補題: L が指数条件をみたすとしよう. このとき $x' \in \Gamma$ 及び $\xi' \in T_{x'}^*$ を助変数にもち次の (1°), (2°) 及び (3°) をみたす m 次正方行列 $\mathcal{R}(x'; \xi')$ が存在する:

(1°) $\mathcal{R}(x'; \xi')$ は階数 $b = m/2$ の射影である, 即ち,

$$\mathcal{R}(x'; \xi')^2 = \mathcal{R}(x'; \xi');$$

(2°) $\mathcal{R}(x'; \xi')$ の各成分 $\mathcal{R}_{q,r}(x'; \xi')$ ($-k \leq q, r \leq m-k-1$) は $\xi' = 0$ を除いて (x', ξ') に関して十分なめらかで, ξ' に関して $(q-r)$ 次斉次である, 即ち, $\lambda > 0$ のとき $\mathcal{R}_{q,r}(x'; \lambda \xi') = \lambda^{q-r} \mathcal{R}_{q,r}(x'; \xi')$;

(3°) 境界値問題

$$\begin{cases} \Lambda(x', t; \xi', D_t) w(t) = 0 & (t > 0 \text{ において}), \\ \mathcal{R}(x'; \xi') \vec{w} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.20)$$

の $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ における解は $w(t) \equiv 0$ に限る (但し $\xi' \neq 0$ とする).

作用素 $\Lambda(x', t; \xi', D_t)$ は Γ 上の局所座標のとり方によらずに定まったものであった. 従って上記の補題で存在が保障された $\mathcal{R}(x'; \xi')$ もそうである.

(2.13) において各 $\mathcal{B}_{j,q}(x'; D_{x'})$ の斉次 $(m_j - q)$ 階の部分と, $\mathcal{B}_{j,q}^0(x'; D_{x'})$ とし, これから作られる (2.13) のような $(b \times m)$ -行列を $\mathcal{B}^0(x'; D_{x'})$ としよう. ここで更に $D_{x'}$ を $\xi' \in T_{x'}^*$ で形式的におきかえたものを $\mathcal{B}^0(x'; \xi')$ と書けば,

[[$\mathcal{B}(x'; D_{x'})$ に対する Shapiro-Lopatinski の条件]] Γ 上の任意の点 x' と任意の $\xi' \in T_{x'}^*$ ($\xi' \neq 0$) において $(b \times m)$ -行列 $\mathcal{B}^0(x'; \xi') \mathcal{B}(x'; \xi')$ の階数が常に $b = m/2$ に等しい。

この条件も $\mathcal{B}(x'; D_{x'})$ の主要部のみに置かれた条件であって Γ 上の局所座標のとり方には依存しない。本稿の主要結果を定理の形にまとめてみると次のようになる：

定理： (1.2) で定義された微分作用素 L が本節の初めにのべた意味で楕円型であると共に指数条件を満足するとする。又、(2.13) で与えられる境界作用素 $\mathcal{B}(x'; D_{x'})$ は Shapiro-Lopatinski の条件を満足するものと仮定する。このとき、 L と $\mathcal{B}$ とから適当な正定数 K を選ぶことが出来て、すべての $u(x) \in W_k^m(\Omega)$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_{W_k^m(\Omega)} \equiv & K \left\{ \|L(x'; D_{x'}) u(x)\|_{L^2(\Omega)} + \right. \\ & + \|\mathcal{B}(x'; D_{x'}) \vec{u}(x')\|_{\prod_{j=1}^b H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \\ & \left. + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ω は有界領域 $\mathcal{R}^n$ から、特に $k < m$ の場合、 $W_k^m(\Omega)$ の単位球は $L^2(\Omega)$ において相対 compact である。従って、

系 : 上記の定理において更に $0 < k < m$ とすると, 齊次境界値問題: $L(x; D_x)u(x) = 0$, $B(x'; D_{x'})\tilde{u}(x') = 0$ の解 $u(x) \in W_k^m(\Omega)$ の全体は高々有限次元のベクトル空間を張る.

定理の証明であるが, Ω_{δ_1} ((2.1)をみよ) の上で恒等的に 0 であるような $u(x)$ に対しては不等式 (2.21) は退化していない作用素に対する内部評価そのものである. 問題は Γ の近傍にのみ台をもつ $u(x)$ に対して (2.21) を得ることであり; そのときの基礎となる常微分作用素 $\Lambda(x, t; \xi', D_t)$ と $B^0(x'; \xi')$ との対に関する不等式だけを示しておこう.

$\mathbb{R}^m$ から誘導された計量によって Γ は Riemann 多様体となっている. 従って各点 $x' \in \Gamma$ において $\xi' \in T_{x'}^*$ の長さ $|\xi'|$ が定義される. そこで $T_{x'}^*$ の単位球を $S_{x'}^*$ とかこう: $S_{x'}^* = \{\xi' \in T_{x'}^*; |\xi'| = 1\}$.

命題: $L(x; D_x)$ と $B(x'; D_{x'})$ に定理と同じ諸条件をおこう. x' が Γ を ξ' が $S_{x'}^*$ を動くとき, (x', ξ') 及び $w(t) \in W_k^m(\mathbb{R}_+)$ によらない正定数 K_1 と K_2 が存在して, 不等式

$$K_1 \|w(t)\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+)} \equiv \|\Lambda(x', t; \xi', D_t)w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + |B^0(x'; \xi')\tilde{w}|_{C^0} \equiv K_2 \|w(t)\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+)} \quad (2.22)$$

が一様に成り立つ.

注意: (1.2)で定義された L に対して, その形式的共役作用素 $L^{(*)}$ を $L^2(\Omega)$ において計算すると, それを再び(1.2)の形に整頓することが出来る. この $L^{(*)}$ に対して(2.12)で定義される多項式を $\Phi_{x'}^{(*)}(\rho)$ とおくならば, これと $\Phi_{x'}(\rho)$ との関係は, $\Phi_{x'}^{(*)}(\rho) = \overline{\Phi_{x'}(\bar{\rho} - m - 1 - \rho)}$ であることが知られる. 従って, 形式的自己共役な L (例えば例1.2.)に対しては指数条件の(I-1)が決して成り立っていないことがわかる.

例 2.1: ここで再び例1.1の作用素 L をとりあげよう((1.17)をみよ). 今は $0 < k \leq m = 2b$ であればよい. 常微分作用素 $\Lambda(x, t; \xi, D_x)$ はこの場合 $t^k \Pi^0(x; \xi, D_x)$ となる. すると方程式: $t^k \Pi^0(x; \xi, D_x) w(t) = f(t)$ は, $w(t)$ と $f(t)$ を

$$\begin{cases} z(t) = -i^k \int_t^\infty \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} w(s) ds, \quad \Re w, \\ g(t) = -i^k \int_t^\infty \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)! s^k} f(s) ds \end{cases} \quad (2.23)$$

と変換することによって方程式 $\Pi^0(x; \xi, D_x) z(t) = g(t)$ に帰着される($w(t) \in W_k^m(\mathbb{R}_+)$, $f(t) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ のときそれぞれ $z(t) \in H^m(\mathbb{R}_+)$, $g(t) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ となる). この場合, 上に定義したShapiro-Lopatinskiの条件(むしろ基本補題)の意味が, 退化していない場合との関連でよく理解されるであろう. 尚この作用素 L は指数条件のうち(I-2)を満足していないが定理の結論は正しい例である.

§ 3. 固有値の漸近分布について

序説の例 1, 2 で考察した 2 階自己共役作用素

$$Lu(x) \equiv \sum_{j=1}^m D_j \{ \varphi(x) D_j u(x) \} + c(x) u(x), \quad (3.1)$$

$$\text{但し, } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

を再度とりあげよう, ここで $c(x) \in \mathcal{B}(\bar{\Omega})$ かつ $\bar{\Omega}$ で $c(x) > 0$ とする (L の定義域は $W_1^2(\Omega)$ である). L のスペクトルは, 可算個の正の固有値 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ からなる (λ_j は非減少でそれぞれの重複度は 1 とする). それぞれの λ_j に応ずる固有函数 $u_j(x)$ は $\mathcal{B}(\bar{\Omega})$ に属し, 全体で $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系をなす.

Baouendi-Goulaouic [3] はこの $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ の $j \rightarrow \infty$ における漸近分布を調べた. $m=1$ の場合はよく知られた Titchmarsh の結果があって $\lambda_j \sim C j^2$ であるが, $m \geq 2$ のときが問題である. L が退化していないならば λ_j の増大のし方は丁度 $j^{\frac{2}{m}}$ と同じ速さであったが, 退化していて (3.1) の形の場合は次のようになる ([3] を参照されよ):

$$\begin{cases} \lim_{j \uparrow \infty} (j^{-\frac{2}{m}} \lambda_j) = 0, \text{ かつ,} \\ \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } \lim_{j \uparrow \infty} (j^{\varepsilon - \frac{1}{m-1}} \lambda_j) = \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

さてこの漸近分布は Epstein の ζ -函数

$$\zeta_L(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} \quad (\Re s > m-1 \text{ のとき絶対収束}) \quad (3.3)$$

の s -平面における極の位置と密接に結びついている. $\lambda <$

つかの具体例についてこの $\zeta_L(s)$ の形を実際に求めてみると、固有値の漸近分布に関して (3.2) より幾分はっきりした結果が得られそうである。それを予想として述べよう：

予想： $n \geq 2$ のとき、 $\zeta_L(s)$ の極のうち最も右にあるものは $s=n-1$ である。 $n=2$ ならばこれは 2 位の極であり、 $n \geq 3$ なら 1 位の極である。そして境界 Γ の表面積を $|\Gamma|$ とかくと

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{n=2 \text{ のとき}}, (s-1)\zeta_L(s) - \frac{|\Gamma|}{2\pi(s-1)} \text{ は } \Re s > \frac{1}{2} \text{ で正則;} \\ \underline{n \geq 3 \text{ のとき}}, \zeta_L(s) - \frac{(2^{n-1}-1)\omega_{n-2}\zeta(n-1)|\Gamma|}{2^{2n}\pi^{n-1}(s-n+1)} \text{ は } \Re s > n - \frac{3}{2} \\ \text{で正則} \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

となる。ここに、 ω_{n-2} は $(n-2)$ 次元単位球面 $\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 = 1$ の面積であり、 $\zeta(n-1) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{1-n}$ は Riemann の ζ -函数である。

筆者はまだこの証明を完全に終えてはいないが、[7] においてその裏付けになる例をいくつか挙げた。ここでも別な例をひとつ挙げておこう。まず準備として、

例 3.1: $\mathbb{R}_+$ 上の常微分作用素 $-\frac{d}{dt}(t\frac{du}{dt}) + tu$ は $W_1^2(\mathbb{R}_+)$ を定義域とする正定値自己共役作用素であって、固有値の列は $\lambda_l = 2l-1$ ($l=1, 2, 3, \dots$) であり重複度は 1, 対応する固有函数は

$$u_l(t) = \frac{\sqrt{2}e^{-t}}{(l-1)!} L_{l-1}(2t) \quad (l=1, 2, 3, \dots) \quad (3.5)$$

となる. ここで $L_p(z) = e^z \left(\frac{d}{dz}\right)^p (e^{-z} z^p)$ ($p=0,1,2,\dots$) は, Laguerre の多項式である.

例 3.2: 今度は $n \geq 2$ としよう. $(n-1)$ 次元で境界のない compact な Riemann 多様体 M をとり, その上の Laplace-Beltrami の作用素を Δ_M とかく. すると $1-\Delta_M$ は $L^2(M)$ の中での正定値自己共役作用素 (定義域は $H^2(M)$) であって, 離散固有値の列 $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ ($1=\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \uparrow \infty$; 重複度はそれぞれ 1 と数える), 及び対応する固有函数の完全正規直交系 $\{\omega_j(x')\}_{j=1}^\infty$ を得る (M の一般点を x' とかく). そこで, 積空間 $\mathcal{M} = \mathbb{R}_+ \times M$ における作用素

$$L u(t, x') \equiv -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x') \right\} + t(1-\Delta_M) u(t, x') \quad (3.6)$$

を考えると, これは $L^2(\mathcal{M})$ の正定値自己共役作用素であって, $W_1^2(\mathcal{M}) \equiv \{u(t, x') \in H^1(\mathcal{M}); t u(t, x') \in H^2(\mathcal{M})\}$ をその定義域とする. L のスペクトルは離散固有値の列

$$\lambda_{l,j} = (2l-1)\sqrt{\mu_j} \quad ; \quad l, j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

からなりそれぞれ重複度 1 であって対応する固有函数は

$$u_{l,j}(t, x') = \sqrt[4]{\mu_j} v_l(\sqrt{\mu_j} t) \omega_j(x') \quad ; \quad l, j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

である (v_L は (3.5) で定義されたもの). 従って, L 及び $1-\Delta_M$ に対して (3.3) のようにそれぞれ定義された Epstein の ζ -函数 $\zeta_L(s) = \sum_{l,j=1}^{\infty} \lambda_{l,j}^{-s}$ と $\zeta_{1-\Delta_M}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-s}$ との間に

$$\zeta_L(s) = 2^{-s} \zeta(s; \frac{1}{2}) \zeta_{1-\Delta_M}(\frac{s}{2}) \quad (3.9)$$

なる関係が成り立つ (ここで, $\zeta(s; \frac{1}{2}) = \sum_{j=0}^{\infty} (j + \frac{1}{2})^{-s}$).

上記の予想のうち (3.4) はこの関係から帰納したものである (M として Γ をとる).

文献表

- [1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: Comm. Pure Appl. Math. Vol. 12 (1959) pp. 623~727.
- [2] M.S. Baouendi: Bulletin Soc. Math. France 95 (1967) pp. 45~87.
- [3] M.S. Baouendi, C. Goulaouic: Archive Rat. Mech. Anal. Vol. 34 (1969) pp. 361~379.
- [4] J.-L. Lions, E. Magenes: Problèmes aux limites non homogènes ... Dunod, Paris (1968).
- [5] S. Minakshisundaram: Canadian J. Math. 1 (1947) pp. 320~327.
- [6] N. Shimakura: J. Math. Kyoto Univ. Vol. 9 (1969) 275~335.
- [7] N. Shimakura: Quelques exemples de ζ -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre Proceeding of Japan Academy (印刷中).