

時間遅れをもつ周期系常微分方程式の 基礎理論

静岡大学 宮崎 倫子(Rinko Miyazaki)
Shizuoka University

1 序

非線形常微分方程式

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(x)$$

が不安定周期解 $x^*(t)$ を持つとき, これを安定化する制御法として, Pyragas [5] によって提案された delayed feedback (DF) 制御法がある. 具体的には次のような時間遅れを含む制御項を加えるものである.

$$(1.2) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + K(x(t - \omega) - x(t)).$$

ここで, ω は $x^*(t)$ の周期であり, K は適切なサイズの行列でゲイン行列と呼ばれている. $x^*(t)$ は, 方程式 (1.2) の解であることは明らかであり, DF 制御法はゲイン行列 K をうまく選ぶことにより, 方程式 (1.2) の解としての $x^*(t)$ を安定化するというものである.

この方法に対する解析的なアプローチのひとつとして, 方程式 (1.2) における周期解 $x^*(t)$ の線形安定性を調べる方法がある. これは, 平衡点の線形安定性を調べることと同等な手段である. すなわち, 方程式 (1.2) の周期解 $x^*(t)$ まわりでの変分 (線形化) 方程式

$$(1.3) \quad \dot{x}(t) = Df(x^*(t))x(t) + K(x(t - \omega) - x(t))$$

ここで, $Df(x^*(t))$ は, f の周期軌道 x^* の周りでのヤコビアン行列であり, $A(t + \omega) = A(t)$ をみたす. そして, $x^*(t)$ 周期解の安定性は, Floquet の理論における特性乗数を調べればよい. 時間遅れを持つ微分方程式に対する Floquet の理論は Stokes [6] によるものがよく知られている (Hale [1] も参照). 本稿ではその基本的な部分について紹介しよう.

2 Floquet の理論

まず, 時間遅れがない場合の, 周期系線形微分方程式における Floquet の理論について復習しておこう.

周期係数をもつ n 次元線形常微分方程式系:

$$(2.1) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad \dot{x} := \frac{dx}{dt}$$

ここで, $A(t)$ は連続な $n \times n$ 行列値関数で

$$A(t + \omega) = A(t), \quad (\omega > 0)$$

をみたす. 初期条件

$$x(s) = x_0$$

をみたす方程式 (2.1) の解はただひとつ存在し, これを $x(t, s, x_0)$ とあらわすことにする. この解を用いて, 方程式 (2.1) の解作用素 $T(t, s)$ は,

$$x(t, s, x_0) = T(t, s)x_0$$

によって定義される. 解の一意性から解作用素は次の性質を持つ:

$$T(t_1, t_2)T(t_2, t_3) = T(t_1, t_3).$$

方程式 (2.1) が周期 ω の周期系であることから,

$$T(t + \omega, \omega) = T(t, 0)$$

をみたす.

方程式 (2.1) の解作用素を用いて,

$$T(t) := T(t + \omega, t)$$

によって定義される $T(t)$ のことを周期作用素という.

注意 2.1. 線形常微分方程式論における基本解行列を $\Phi(t)$ とすると,

$$T(t, s) = \Phi(t)\{\Phi(s)\}^{-1}$$

が成り立つ. したがって, 周期作用素は $T(t) = \Phi(t + \omega)\{\Phi(t)\}^{-1}$ で与えられる.

以下では, 行列 M に対して $\sigma(M)$ を行列 M の固有値全体の集合を表すものとする.

定義 2.1. 周期作用素 $T(0)$ の固有値 $\mu \in \sigma(T(0))$ を方程式 (2.1) の特性乗数という. $e^{\lambda\omega} \in \sigma(T(0))$ のとき, λ を方程式 (2.1) の特性指数という.

命題 2.1. (i) $\mu \in \sigma(T(0))$ であることと,

$$x(t + \omega) = \mu x(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

をみたす方程式 (2.1) の非自明解 $x(t)$ が存在することは同値である.

(ii) λ が方程式 (2.1) の特性指数であることと,

$$x(t) = e^{\lambda t}p(t), \quad p(t + \omega) = p(t)$$

の形で表される方程式 (2.1) の非自明解 $x(t)$ が存在することは同値である.

証明. (i) $\mu \in \sigma(T(0))$ を仮定する. このとき, $v \in \mathbb{C}^n$ ($v \neq 0$) が存在して, $T(0)v = \mu v$ をみたす. この v に対して, $x(0) = v$ をみたす (2.1) の解を $x(t)$ とおく. すなわち, $x(t) = T(t, 0)v$ である. したがって,

$$x(t+\omega) = T(t+\omega, 0)v = T(t+\omega, \omega)T(\omega, 0)v = T(t+\omega, \omega)(\mu v) = \mu T(t, 0)v = \mu x(t).$$

逆に, $x(t+\omega) = \mu x(t)$ をみたす非自明解が存在したとする. このとき,

$$T(t+\omega, t)x(t) = \mu x(t)$$

$t=0$ とすると, $T(0)x(0) = \mu x(0)$ であり, 明らかに $x(0) \neq 0$ なので $\mu \in \sigma(T(0))$ が成り立つ.

(ii) λ が特性指数であると仮定する. $\mu = e^{\omega\lambda}$ とおくと, μ は特性乗数である. したがって, (i) より $x(t+\omega) = \mu x(t)$ をみたす非自明解 $x(t)$ が存在する. これを用いて, $p(t) = e^{-\lambda t}x(t)$ と定義すると, $x(t) = e^{\lambda t}p(t)$ が成り立ち, かつ

$$p(t+\omega) = e^{-\lambda(t+\omega)}x(t+\omega) = e^{-\lambda t}e^{-\omega\lambda}\mu x(t) = e^{-\lambda t}x(t) = p(t)$$

が得られる.

逆に, 非自明解 $x(t) = e^{\lambda t}p(t)$ ($p(t+\omega) = p(t)$) が存在すると仮定する. このとき,

$$x(t+\omega) = e^{\lambda(t+\omega)}p(t+\omega) = e^{\omega\lambda}e^{\lambda t}p(t) = e^{\omega\lambda}x(t)$$

が成り立つ. (i) より, $e^{\omega\lambda} \in \sigma(T(0))$ なので λ は特性指数である. □

例 2.1. スカラー方程式を考えよう.

$$\dot{x} = a(t)x, \quad a(t+\omega) = a(t).$$

初期条件 $x(s) = x_0$ をもつ解は, $x(t) = x_0 \exp\left(\int_s^t a(u)du\right)$ で与えられる.

$$\therefore T(t, s) = \exp\left(\int_s^t a(u)du\right).$$

$$\therefore T(t) = T(t+\omega, t) = \exp\left(\int_t^{t+\omega} a(u)du\right) = \exp\left(\int_0^\omega a(u)du\right)$$

ゆえに, 特性乗数は $\sigma(T(0)) = \{\exp\left(\int_0^\omega a(u)du\right)\}$.

特性指数は, $e^{\lambda\omega} = \exp\left(\int_0^\omega a(u)du\right)$ をみたす λ で与えられるので, $\log$ の主値のみをとると, $\lambda = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(u)du$ で与えられる.

命題 2.1 について考えてみよう. まず, (i) について.

$$x(t+\omega) = x_0 \exp\left(\int_s^{t+\omega} a(u)du\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x_0 \exp \left(\int_s^t a(u) du \right) \exp \left(\int_t^{t+\omega} a(u) du \right) \\
&= x_0 \exp \left(\int_s^t a(u) du \right) \exp \left(\int_0^\omega a(u) du \right) \\
&= x(t) \exp \left(\int_0^\omega a(u) du \right)
\end{aligned}$$

ゆえに、特性乗数は命題 2.1(i) より、

$$\mu \in \sigma(T(0)) \iff \mu = \exp \left(\int_0^\omega a(u) du \right)$$

次に (ii) について.

$$p(t) = e^{-\lambda t} x(t) = e^{-\lambda t} x_0 \exp \left(\int_s^t a(u) du \right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore p(t + \omega) &= e^{-\lambda(t+\omega)} x_0 \exp \left(\int_s^{t+\omega} a(u) du \right) \\
&= e^{-\lambda\omega} e^{-\lambda t} x_0 \exp \left(\int_s^t a(u) du \right) \exp \left(\int_t^{t+\omega} a(u) du \right) \\
&= e^{-\lambda\omega} p(t) \exp \left(\int_0^\omega a(u) du \right)
\end{aligned}$$

ゆえに、命題 2.1(ii) より、

$$\lambda: \text{特性指数} \iff e^{\lambda\omega} = \exp \left(\int_0^\omega a(u) du \right)$$

注意 2.2. 例 1 はスカラー方程式であり、解を求めることができた。しかし、方程式 (2.1) が 2 次元以上の場合には、基本解を求めるのは一般に困難であるため、特性乗数をこの例のように解析的に求めることは困難である。

Floquet の理論の中で、次の定理はよく知られている。

定理 A (Floquet の定理). $T(0) = e^{\omega B}$ をみたす行列 B に対して、 $P(t) := T(t, 0)e^{-tB}$ で定義される行列は正則であり、しかも $P(t + \omega) = P(t)$ をみたす。また、変数変換 $x = P(t)y$ によって、方程式 (2.1) は自励系

$$\dot{y} = By$$

に帰着される。

注意 2.3. 行列 B の固有値は、方程式 (2.1) の特性指数である。なぜなら、 B の固有値を λ 、 λ に属する固有ベクトルを v とする。このとき、 $y(t) = e^{\lambda t} v$ は $\dot{y} = By$ の解であり、 $x(t) = P(t)y(t) = e^{\lambda t} P(t)v$ は方程式 (2.1) の解である。したがって、命題 2.1 の (ii) より、 λ は特性指数である。

注意 2.4. $T(t, 0) = P(t)e^{Bt}$ が成り立つことと $P(t)$ が周期的（有界）であることから，方程式 (2.1) の自明解の安定性は B の固有値すなわち特性指数によって決定されることがわかる．

3 時間遅れをもつ微分方程式における Floquet の理論

時間遅れをもつ周期系線形微分方程式

$$(3.1) \quad \dot{x}(t) = L(t)x_t$$

を考えよう．ここで， $L(t): \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ は連続線形作用素で，

$$L(t + \omega) = L(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

をみたす．

時間遅れがある場合にも，前節の場合と同様に特性乗数や特性指数が定義できる．そのために，いくつかの表記法を準備しておこう．まず，方程式 (3.1) の解空間として，区間 $[-r, 0]$ から $\mathbb{C}^n$ への連続関数全体からなる集合 $\mathcal{C} := C([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ を考える． $\mathcal{C}$ は，適切なノルム（通常は $\sup$ ノルム）を与えることにより Banach 空間となる．方程式の右辺に用いられている x_t は，関数 x の t 切片と呼ばれるもので，次のとおり定義される．連続関数 $x: [s - r, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ に対して，関数 x の t 切片を $x_t \in \mathcal{C}$ ($t \geq s$) を $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ($-r \leq \theta \leq 0$) で与えられる．

$\phi \in \mathcal{C}$ を固定したとき， $L(t)\phi$ は t の関数として連続であるとする．このとき，任意の $s \in \mathbb{R}$ と $\phi \in \mathcal{C}$ に対して，初期条件 $x_s = \phi$ をみたす解は， $[s, \infty)$ において一意的に存在する．その解を $x(t, s, \phi)$ と表し，解作用素 $U(t, s)$ を

$$U(t, s)\phi = x_t(s, \phi), \quad t \geq s$$

によって定義する．このとき，時間遅れがない場合と同様に

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3), \quad (t_3 \leq t_2 \leq t_1)$$

$$U(t + \omega, t) = U(t, 0)$$

方程式 (3.1) の解作用素を用いて，

$$U(t) := U(t + \omega, t): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定義される $U(t)$ のことを周期作用素という． $\omega \geq r$ のとき， $U(t)$ はコンパクト作用素となることがわかっている．

$\mathcal{C}$ 上の作用素 $U(0)$ について， $U(0)$ のスペクトル集合を $\sigma(U(0))$ ，点スペクトル（固有値）集合を $P_\sigma(U(0))$ であらわす．

定義 3.1. $\nu \in P_\sigma(U(0))$ を方程式 (3.1) の特性乗数, $e^{\lambda\omega} \in P_\sigma(U(0))$ をみたす λ を方程式 (3.1) の特性指数という.

命題 3.1 (Lemma 8.1.2 in Hale & Lunel [1]). λ が方程式 (3.1) の特性指数であるための必要十分条件は, 方程式 (3.1) の非自明な解 $x(t)$ が存在して

$$(3.2) \quad x(t) = e^{\lambda t} p(t), \quad p(t + \omega) = p(t)$$

をみたすことである.

この命題と Hale & Lunel [1] の Lemma 8.1.1 を用いると, 次の命題が成立つことがわかる.

命題 3.2. $\nu \in P_\sigma(U(0))$ であるための必要十分条件は, 方程式 (3.1) の非自明解 $x(t)$ が存在して, $x(t + \omega) = \nu x(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) をみたすことである.

例 3.1. スカラーの方程式を考えよう.

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t - \omega), \quad a(t + \omega) = a(t).$$

$\nu \in P_\sigma(U(0))$ とすると, 命題 3.2 より, 非自明解 $x(t)$ が存在して, $x(t + \omega) = \nu x(t)$, すなわち $x(t - \omega) = \frac{1}{\nu} x(t)$ をみたすことに注意しよう. ゆえに,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t) \frac{1}{\nu} x(t) \\ \therefore x(t) &= x(0) \exp \left(\frac{1}{\nu} \int_0^t a(u) du \right) \end{aligned}$$

再び $x(t + \omega) = \nu x(t)$ より,

$$\begin{aligned} x(0) \exp \left(\frac{1}{\nu} \int_0^{t+\omega} a(u) du \right) &= \nu x(0) \exp \left(\frac{1}{\nu} \int_0^t a(u) du \right) \\ \therefore \exp \left(\frac{1}{\nu} \int_t^{t+\omega} a(u) du \right) &= \nu \end{aligned}$$

すなわち,

$$\nu \in P_\sigma(U(0)) \iff \exp \left(\frac{1}{\nu} \int_0^\omega a(u) du \right) = \nu$$

あるいは,

$$\lambda: \text{特性指数} \iff e^{-\lambda\omega} \int_0^\omega a(u) du = \lambda\omega$$

(I) $\int_0^\omega a(u) du = 0$ のとき.

特性乗数は 1 のみである. 命題 3.1 より, (3.2) をみたす非自明解が存在する. これをもとの方程式に代入して,

$$\dot{p}(t) = a(t)p(t - \omega) = a(t)p(t),$$

$$\therefore p(t) = p_0 \exp \left(\int_0^t a(u) du \right)$$

すなわち,

$$x(t) = p_0 \exp \left(\int_0^t a(u) du \right)$$

は解である.

(II) $\int_0^\omega a(u) du \neq 0$ のとき

$$\lambda: \text{特性指数} \iff e^{-\lambda\omega} \int_0^\omega a(u) du = \lambda\omega$$

特性指数 λ を与える方程式は, 自励系方程式

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t - \omega), \quad \alpha := \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(u) du$$

の特性方程式と一致している. そして, その特性根の性質については, よく知られている (例えば [3] 参照). その結果を用いることにより, 特性指数について以下のことがわかる.

- (i) $\alpha > 0$ のとき, 正の特性指数 λ_0 が存在する. また, λ_0 を除く任意の特性指数 λ に対して $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_0$ が成り立つ.
- (ii) $\alpha\omega < -\frac{\pi}{2}$ のとき, 実数の特性指数は存在せず, 実部が正の互いに共役な複素数の特性指数が存在する.
- (iii) $-\frac{\pi}{2} < \alpha\omega < 0$ のとき, 任意の特性指数 λ に対して $\operatorname{Re} \lambda < 0$ が成り立つ.
- (iv) $\alpha\omega = -\frac{\pi}{2}$ のとき, 互いに共役な純虚数の特性指数 $\pm i\frac{\pi}{2\omega}$ が存在し, これらを除く任意の特性指数 λ に対して $\operatorname{Re} \lambda < 0$ が成り立つ.

注意 3.1. 時間遅れと, 係数の周期が異なる方程式,

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t - r), \quad a(t + \omega) = a(t)$$

$r \neq \omega$ のときには, 特性乗数や特性指数を決定するための方程式を導くのは困難である. $r = \omega$ のときには, 命題 3.2 から

$$x(t - r) = \frac{1}{\nu} x(t)$$

とできて, 微分方程式の右辺の時間遅れ項を時間遅れのない項に置き換えることができる. しかし, $r \neq \omega$ のときには, それが使えないからである.

時間遅れを持つ場合のフロッケの理論を述べておこう (Stokes [6] あるいは Hale & Lunel [1] 参照). $\nu \in P_o(U(0))$ に対して, ふたつの閉部分空間 E_ν と Q_ν が存在し, 次の性質をみたす.

- (i) E_ν の次元 d_ν は有限
- (ii) $E_\nu \oplus Q_\nu = \mathcal{C}$
- (iii) $U(0)E_\nu \subseteq E_\nu, U(0)Q_\nu \subseteq Q_\nu$
- (iv) $\sigma(U(0)|E_\nu) = \{\nu\}, \sigma(U(Q_\nu)) = \sigma(U(0)) \setminus \{\nu\}$

閉部分空間 E_ν において、時間遅れのない場合のフロッケの定理とまったく同様の定理が成り立つが、表現が煩雑なのでここでは割愛する。

また Hale & Lunel [1] の Theorem 8.1.1 より、解の漸近挙動は、絶対値が 1 以上の特性乗数 ν に対する閉部分空間 E_ν によって決定されることもわかっている。

たとえば、先の例に戻ると、

(I) の場合、非自明な解について、

$$\exists p_0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| x(t) - p_0 \exp \left(\int_0^t a(u) du \right) \right| = 0$$

が成り立つ。

(II) の場合、

- (i) $\alpha > 0$ のとき、ほとんどすべての解は発散する。
- (ii) $\alpha\omega < -\frac{\pi}{2}$ のとき、ほとんどすべての解は発散する。
- (iii) $-\frac{\pi}{2} < \alpha\omega < 0$ のとき、自明解は漸近安定である。
- (iv) $\alpha\omega = -\frac{\pi}{2}$ のとき、特性乗数が $\pm i$ であるから、

$$x_1(t) = \cos \left(\int_0^t a(u) du \right), \quad x_2(t) = \sin \left(\int_0^t a(u) du \right)$$

とおくと、ほとんどすべての解について

$$\exists p_1, p_2; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \{p_1 x_1(t) + p_2 x_2(t)\}| = 0$$

が成り立つ。

4 DF 制御法

DF 制御法に現れる変分方程式 (1.3) の場合、時間遅れが周期係数の周期と一致している。方程式 (1.3) の特性乗数 $\nu \in P_\sigma(U(0))$ に対して、命題 3.2 より、方程式 (1.3) の非自明解 $y(t)$ が存在して、

$$y(t - \omega) = \frac{1}{\nu} y(t)$$

が成り立つ。ゆえに、 y は遅れのない微分方程式

$$\dot{y} = Df(x^*(t))y + (\nu^{-1} - 1)Ky$$

の解として与えられる。ただし、方程式の次元が2以上ではたとえ時間遅れがなくても、基本解の表現は一般に困難である。

しかし、 $A(t) := Df(x^*(t))$ と K の可換条件

$$(4.1) \quad A(t)K = KA(t)$$

を仮定することで、方程式 (1.3) の特性乗数を制御前の方程式

$$(4.2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x$$

の特性乗数で表現することができる。

定理 B (C-map Theorem, Miyazaki et. al. [2, 4]). 可換性条件 (4.1) を仮定する。このとき、 ν が (1.3) の特性乗数となるための必要十分条件は、 $\kappa \in \sigma(K)$ と (4.2) の特性乗数 μ が存在して、

$$g_\kappa(\nu) = \mu, \quad W_K(\kappa) \cap W_{T(0)}(\mu) \neq \{0\}$$

をみたすことである。ここで、 $g_\kappa(z) := ze^{\omega(1-z^{-1}\kappa)}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) とし、また、 $W_M(\lambda)$ は正方行列 M の固有値 λ に属する固有空間を表す。

ゲインが単位行列の実数倍、すなわち $K = kE$ のときには、DF 制御の可否を具体的に示す次の定理が得られている。

定理 C (Miyazaki et. al. [2, 4]). $K = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) を仮定する。このとき、次の命題が成立する。

- (i) 方程式 (4.2) が 1 より大きな特性乗数をもてば、方程式 (1.3) も 1 より大きな特性乗数をもつ。
- (ii) 方程式 (4.2) において、絶対値が 1 より大きなすべての特性乗数 μ について、 $-e^2 < \mu < -1$ が成り立つとする。このとき、 k が

$$\frac{\alpha_0}{2\omega} < k < \frac{\beta(\alpha_0)}{2\omega}$$

をみたすならば、方程式 (1.3) のすべての特性乗数 ν は、 $|\nu| < 1$ または $\nu = 1$ である。

ここで、定理 C の (ii) で用いた記号を説明しておこう。 α_0 は、次のとおり与えられる：

$$\alpha_0 := \max\{\log |\mu| : \mu \text{ は方程式 (4.2) の特性乗数}\}.$$

また、 β は、

$$\alpha = \frac{\beta(1 + \cos \beta)}{\sin \beta}, \quad 0 < \beta < \pi$$

をみたす β であり、 $0 < \alpha < 2$ に対して一意的に決まる。

注意 4.1. 定理 C の (i) は, 制御前の不安定周期軌道の特性乗数の中に 1 より大きな実数が含まれていれば, $K = kE$ なるゲインによる DF 制御は成功しないことを意味している. 一方, (ii) は, 制御前の不安定周期軌道の絶対値が 1 より大きな特性乗数がすべて区間 $(-e^2, -1)$ の中に含まれれば, k を不等式をみたすように選ぶことにより, DF 制御により周期解が安定化可能であることを意味している.

参考文献

- [1] J. K. Hale and S. V. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, 1993.
- [2] R. Miyazaki, T. Naito, and J. S. Shin, Delayed feedback equation and its properties, *RIMS-Kokyuroku* **1637**, 74–86, 2009. (in Japanese)
- [3] R. Miyazaki, Introduction to the theory of delay differential equations, *RIMS-Kokyuroku* **1713**, 72–87, 2009. (in Japanese)
- [4] R. Miyazaki, T. Naito, and J. S. Shin, Delayed feedback controls by commutative gain matrices, accepted in *SIAM J. Math. Anal.*
- [5] K. Pyragas., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A*, (1992), **170**, 421–428.
- [6] Stokes, A. P., On the stability of a limit cycle of an autonomous functional differential equation, *Cont. Diff. Eq.*, (1964), 3, 121–139.