

Wilcoxon two sample statistic に基づく

Hodges-Lehmann 推定量の漸近的表現について

統計数理研究所 梶垣 宣生

§1. Sample quantile の表現

$X_1, X_2, \dots, X_m, \dots$ を独立, 同一分布に従う標本とする。その分布関数 $F(x)$ は, ある p ($0 < p < 1$) に対する population p -th quantile $\theta_{(p)}$ (すなわち, $F(\theta_{(p)}) = p$) の近傍において, 2 回微分可能で $F'(\theta_{(p)}) > 0$, ($F = f$ とおけば, $f(\theta_{(p)}) > 0$) $F''(x)$ はその近傍で有界とする。標本 $X_1, \dots, X_m$ の Sample p -th quantile を $\hat{\theta}_{m(p)} = \hat{\theta}_{m(p)}(X_1, \dots, X_m)$ とし, 経験分布関数を $F_m^x(x)$ とする。 $\delta(x) = 1$ if $x \geq 0$, $= 0$ if $x < 0$ なる関数を用いると, $F_m^x(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta(x - X_j)$ である。また, $F_m^x(\hat{\theta}_{m(p)}) \leq p \leq F_m^x(\hat{\theta}_{m(p)})$ が成り立っている。

Bahadur [1] は Sample p -th quantile $\hat{\theta}_{m(p)}$ が経験分布関数 F_m^x を使って次のように漸近的表現されることを示した:

$$(1) \quad \hat{\theta}_{m(p)} = \theta_{(p)} + [p - F_m^x(\theta_{(p)})] / f(\theta_{(p)}) + R_m(p)$$

とおくとき,

(2) $R_m(p) = O(m^{-\frac{3}{4}} (\log m)^{\frac{1}{2}} (\log \log m)^{\frac{1}{4}})$ as $m \rightarrow \infty$
with probability one. このことから、更に、

$$(3) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} [m^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta}_{m(p)} - \theta_{(p)}) / (2 \log \log m)^{\frac{1}{2}}] = [P^{(1-P)} / f^2(\theta_{(p)})]^{\frac{1}{2}},$$

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} [m^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta}_{m(p)} - \theta_{(p)}) / (2 \log \log m)^{\frac{1}{2}}] = -[P^{(1-P)} / f^2(\theta_{(p)})]^{\frac{1}{2}}$$

with probability one.

その後 Kiefer [2] によつて (2) 式の O の正確な評価がなされた。また Kiefer [3] による $p_m > 0$ の場合の拡張と Sen [6] による $\{X_m; -\infty < m < \infty\}$ が ϕ -mixing dependent r.v. の系列の場合の拡張等がなされている。古くは丘本氏 [5] が同様の結果 (in probability の意味で) を示されている。

我々はここで Wilcoxon two sample statistic によつて、それに基づく Hodges-Lehmann (H-L) 推定量が同様の漸近的表現をなれることを示そう。

§2. Wilcoxon two sample statistic に基づく Hodges-Lehmann 推定量の表現

$X_1, \dots, X_m, \dots; Y_1, \dots, Y_n, \dots$ は互に独立な2組の標本であつて、それぞれ分布関数 $F(x)$, $F(x-\theta)$, $(-\infty < \theta < \infty)$ に従つてゐるとする。2標本 $X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n$ の Wilcoxon statistic (普通、以下において $\theta = 0$ 場合を言う) :

$$(4) \quad W_{m,n}(\theta) = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \delta(Y_k - X_j - \theta)$$

は $\times$ 標本の経験分布関数を使えば,

$$(5) \quad W_{mn}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_m^x(Y_k - \theta)$$

とも書ける。 $W_{mn}(\theta)$ は θ の非増加関数で, $W_{mn}(-\infty) = 1$, $W_{mn}(\infty) = 0$.

$$Z_{jk} = Y_k - X_j, \quad j=1, \dots, m; k=1, \dots, n$$

とおき, その順序統計量を

$$Z_{(1)} < Z_{(2)} < \dots < Z_{(mn)} \quad \text{とする。}$$

$$(6) \quad E[W_{mn}(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(y-\theta) dF(y-\theta) = \mu(\theta) \quad \text{とおく。}$$

このとき, $\theta = \theta_0$ に $\mu(\theta_0) = \frac{1}{2}$ である。したがって, Wilcoxon statistic に基づく θ_0 の H-L 推定量 $\hat{\theta}_{mn}$ は,

$$\theta^* = \sup\{\theta : W_{mn}(\theta) > \frac{1}{2}\}, \quad \theta^{**} = \inf\{\theta : W_{mn}(\theta) < \frac{1}{2}\}$$

とおけば, $0 \leq \alpha \leq 1$ として (上図参照)

$$(7) \quad \hat{\theta}_{mn} = \text{median}\{Z_{jk} : j=1, \dots, m, k=1, \dots, n\} = \alpha \theta^* + (1-\alpha) \theta^{**}$$

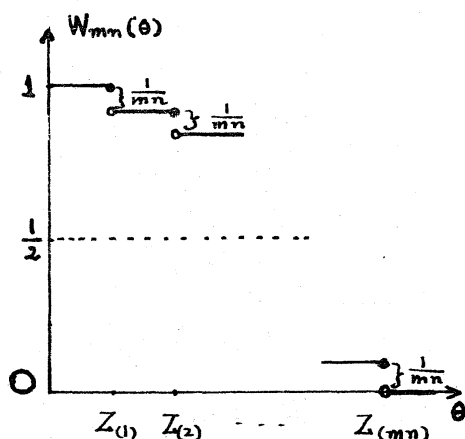
すなわち

$$(8) \quad W_{mn}(\hat{\theta}_{mn} +) \leq \frac{1}{2} \leq W_{mn}(\hat{\theta}_{mn}).$$

次の定理は, $\hat{\theta}_{mn}$ における Sample quantile と経験分布の関係と, H-L 推定量 $\hat{\theta}_{mn}$ と Wilcoxon statistic の関係におきかえることが出来ることを意味している。

Theorem

(a) 分布関数 F は 2 次までの微分 $F' = f$, $F'' = f'$ をもち, それぞれは有界である。(b) $N = m+n$ とおくとき,



$m/N \rightarrow \lambda$ ($0 < \lambda < 1$), as $N \rightarrow \infty$. 仮定 (a), (b) の下で,

$$(9) \quad \hat{\theta}_{mn} = \theta_0 + \Gamma^{-1} [W_{mn}(\theta_0) - \frac{1}{2}] + R_{mn}$$

$$\text{但し, } \Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx$$

とおけば,

$$(10) \quad R_{mn} = O(N^{-\frac{3}{4}} (\log N)^{\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{4}}), \text{ as } N \rightarrow \infty,$$

with probability one. 更にこのことから,

$$(11) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} [N^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta}_{mn} - \theta_0) / (2 \log \log N)^{\frac{1}{2}}] = [12 \lambda (1-\lambda) \Gamma]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} [N^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta}_{mn} - \theta_0) / (2 \log \log N)^{\frac{1}{2}}] = -[12 \lambda (1-\lambda) \Gamma]^{-\frac{1}{2}},$$

with probability one.

§ 3. Some lemmas.

C_1, C_2 をあとで適当に選ぶ正定数とする。 $\{a_N\}, \{b_N\}, \{\delta_N\}$ を次のような定数列とする: as $N \rightarrow \infty$,

$$(12) \quad a_N \sim C_1 N^{-\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}}, \quad b_N \sim N^{\frac{1}{4}}, \text{ and}$$

$$\delta_N \sim C_2 N^{-\frac{3}{4}} (\log N)^{\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{4}}.$$

その中心点が y ($-\infty < y < \infty$) である区間

$$(13) \quad I_N(y) = (-a_N + y, y + a_N)$$

に対し、その区間の分点: $\eta_{r,N}(y) = y + a_N b_N^{-1} \cdot r$, r は整数で $-b_N \leq r \leq b_N$, を考える。

$$(14) \quad G_m(x, y) = [F_m^x(x) - F_m^x(y)] - [F(x) - F(y)],$$

$$H_N(y) = \sup \{ |G_m(x, y)|; x \in I_N(y) \},$$

とあくと、経験分布関数の単調性より、 $z, x \in [\eta_{rN}(y), \eta_{r+1,N}(y)]$ に対し、

$$\begin{aligned} G_m(x, y) &\leq [F_m^*(\eta_{r+1,N}(y)) - F_m^*(y)] - [F(\eta_{rN}(y)) - F(y)] \\ &= G_m(\eta_{r+1,N}(y), y) + F(\eta_{r+1,N}(y)) - F(\eta_{rN}(y)), \end{aligned}$$

同様に

$$G_m(x, y) \geq G_m(\eta_{rN}(y), y) - [F(\eta_{r+1,N}(y)) - F(\eta_{rN}(y))].$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (15) \quad H_N(y) &\leq \max\{|G_m(\eta_{rN}(y), y)|; -b_N \leq r \leq b_N\} \\ &\quad + \max\{F(\eta_{r+1,N}(y)) - F(\eta_{rN}(y)); -b_N \leq r \leq b_N\} \end{aligned}$$

$$\text{右辺をそれぞれ} = H_N^*(y) + \beta_N(y) \quad \text{とあくと.}$$

$|f(x)| \leq M$, for $-\infty < x < \infty$ と仮定すれば, $F(\eta_{r+1,N}(y)) - F(\eta_{rN}(y)) \leq M \cdot a_N b_N^{-1}$

であるから

$$(16) \quad \beta_N(y) \leq M a_N b_N^{-1} \quad (y \text{ 無関係}).$$

さて $U_1, \dots, U_m$ は独立な r.v.'s であり, 定数 c で一様有界であるとする。 $E U_i = 0$, $E U_i^2 = \sigma_i^2$, $i=1, \dots, m$ で, $S_m^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_m^2$ とすれば, Bernstein's inequality:

$$(17) \quad P\{|U_1 + \dots + U_m| \geq t\} \leq 2 \exp\{-t^2/[2S_m^2 + \frac{2}{3}ct]\}$$

が成り立つ (see Uspensky [7] p 204-206). それ故, 成功の確率が p である m 回 Bernoulli 試行の成功の数を $B(m, p)$ で表わすと, Bernstein's inequality は $c=1$, $S_m^2 = m p(1-p)$ として

$$(18) \quad P\{|B(m, p) - mp| \geq t\} \leq 2 \exp\{-t^2/[2mp(1-p) + \frac{2}{3}t]\}.$$

と 3 が $|G_m(\eta_{rN}(y), y)|$ は成功の確率 $p_{rN} = |F(\eta_{rN}(y)) - F(y)|$
 とし $m^{-1}|B(m, p_{rN}) - m p_{rN}|$ と分布が同じである。(18) 式で
 $t = m\sigma_N$ とし、 $p_{rN} \leq M \cdot a_N$ に注意すれば、

$$P\{|G_m(\eta_{rN}(y), y)| \geq \sigma_N\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{(m\sigma_N)^2}{[2mMa_N + \frac{2}{3}m\sigma_N]}\right\}$$

この右辺は y に無関係であるから

$$(19) \quad P\{H_N^*(y) \geq \sigma_N\} \leq \sum_{-b_N \leq r \leq b_N} P\{|G_m(\eta_{rN}(y), y)| \geq \sigma_N\} \\ \leq 4b_N \exp\left\{-\frac{(m\sigma_N)^2}{[2mMa_N + \frac{2}{3}m\sigma_N]}\right\} = p_N \text{ とおく.}$$

== ところで p_N は y に無関係である。以上 Bahadur [1] Lemma 1
 の証明の要所を (16), (19) 式の上界 $Ma_N b_N^{-1}$, p_N がそれぞれ y
 $(-\infty < y < \infty)$ に無関係にとれることを注意しながらくり返し挙
 げた。これより次の Lemma を得る。

Lemma 1.

Theorem と同じ仮定の下で、

$$(20) \quad K_N = \sup\{|[W_{mn}(\theta) - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\theta - \theta_0)|; \theta \in I_N(\theta_0)\} \text{ とおくと} \\ = O(N^{-\frac{3}{4}}(\log N)^{\frac{1}{2}}(\log \log N)^{\frac{1}{4}}), \text{ as } N \rightarrow \infty,$$

with probability one.

Proof.

仮定 (a) から、 $|f(x)|, |f'(x)| \leq M$ for $-\infty < x < \infty$ とする。

(5), (14) 式から

$$[W_{mn}(\theta) - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\theta - \theta_0) \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{[F_m^*(Y_k - \theta) - F_m^*(Y_k - \theta_0)] - [F(Y_k - \theta) - F(Y_k - \theta_0)]\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [F(Y_k - \theta) - F(Y_k - \theta_0)] + \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx \cdot (\theta - \theta_0) \right\} \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n G_m(Y_k - \theta, Y_k - \theta_0) \\
& + \left\{ \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(Y_k - \theta_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx \right] (\theta - \theta_0) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\tilde{Y}_k) \cdot \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2} \right\}
\end{aligned}$$

(14), (15), (16), (20) 式と仮定から

$$\begin{aligned}
(21) \quad K_N & \leq \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H_N^*(Y_k - \theta_0) + M a_N e_N^{-1} \right\} \\
& + \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(Y_k - \theta_0) - \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx \right| \cdot a_N + \frac{M}{2} \cdot a_N^2 \right\}.
\end{aligned}$$

(12) 式から, $\text{as } N \rightarrow \infty$,

$$(22) \quad M \cdot a_N e_N^{-1} \sim M \cdot C_1 N^{-\frac{3}{4}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}} \text{ and } \frac{M}{2} \cdot a_N^2 \sim \frac{M}{2} \cdot C_1^2 N^{-1} \log \log N.$$

Bounded r.v.'s に関する Law of the iterated logarithm (see Loève [4] p 260) と (12) 式に より,

$$(23) \quad a_N \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(Y_k - \theta_0) - \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx \right| = O(N^{-1} (\log \log N)^{\frac{1}{2}}), \text{ as } N \rightarrow \infty$$

with probability one. (19) 式から $\left\{ \leq \sum_{k=1}^n E_Y \{P[H_N^*(Y_k - \theta_0) \geq r_N | Y]\} \right\}$

$$(24) \quad P\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H_N^*(Y_k - \theta_0) \geq r_N \right\} \leq \sum_{k=1}^n P\{H_N^*(Y_k - \theta_0) \geq r_N\} \leq n p_N.$$

仮定 (E) $\frac{m}{N} \rightarrow \lambda$, $\frac{r_N}{N} \rightarrow (1-\lambda)$, $\text{as } N \rightarrow \infty$ より

$$(25) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [\log n p_N / \log N] = \frac{5}{4} - \frac{\lambda \cdot C_2^2}{2 M \cdot C_1}.$$

C_1 に対して $C_2 \in$ 十分大きく選べば, (25) 式の極限 < -1 .

このとき $\sum_{N=1}^{\infty} P\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H_N^*(Y_k - \theta_0) \geq r_N \right\} < \infty$ である. Borel-Cantelli Lemma から, with probability one,

$$(26) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H_N^*(Y_k - \theta_0) = O(N^{-\frac{3}{4}} (\log N)^{\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{4}}), \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

(21), (22), (23), (26) 式から. Lemma の結論 (20) を得る. $\triangle$

分布関数 F が連続のときには, Wilcoxon statistic とその projection:

$$W_{mn}(\theta_0) = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \delta(Y_k - \theta_0 - X_j), \text{ and}$$

$$W_{mn}^*(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(Y_k - \theta_0) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m F(X_j) + \frac{1}{2} \quad (2.26)$$

は, $X'_j = F(X_j)$, $Y'_k = F(Y_k - \theta_0)$, $j=1, \dots, m$, $k=1, \dots, n$ が一様分布 $U(0,1)$

からの N 個の独立標本であり, $\delta(Y_k - \theta_0 - X_j) = \delta(Y'_k - X'_j)$,

with prob. one, $j=1, \dots, m$, $k=1, \dots, n$ であるから,

$$W_{mn} = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \delta(Y'_k - X'_j), \text{ and,}$$

$$W_{mn}^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y'_k - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X'_j + \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

と同じである。

Lemma 2.

Theorem の仮定 (E) の下で, 任意の α , $(0 < \alpha < 1)$ に対し

$$(2.7) \quad |W_{mn} - W_{mn}^*| = O(N^{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}}), \text{ as } N \rightarrow \infty, \text{ with prob. one.}$$

Proof.

$y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し, $Z_j(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\delta(y_k - X'_j) - y_n + X'_j - \frac{1}{2}]$,
 $j=1, \dots, m$, とおけば, $Z_1(y), \dots, Z_m(y)$ は独立で, $E Z_j(y) = 0$,

$$\sigma_y^2 = E \{Z_j(y)\}^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{n}{12} + 2 \sum_{k < k'} \left[\frac{1}{12} + \frac{(y_{(k)} - y_{(k')})}{2} + \frac{(y_{(k)} - y_{(k')})^2}{2} \right] \right\}$$

ここで, $y_{(k)} < y_{(k')}$ は y_k と $y_{k'}$ の小さい方と大きい方。

また $|\delta(y_k - x) - y_k + x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ であるから, $|Z_j(y)| \leq \frac{1}{2}$ 。

更に, y の代りに $Y = (Y'_1, \dots, Y'_n)$ をとると,

$$(2.8) \quad E \sigma_Y^2 = \frac{1}{12n}, \quad E [\sigma_Y^2 - \frac{1}{12n}]^2 = \frac{n(n-1)}{360n^4}$$

を得る。よって,

$$W_{mn} - W_{mn}^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Z_j(Y)$$

であるから Bernstein's inequality (17) より,

$$(29) \quad P\{|W_{mn} - W_{mn}^*| \geq t\} = E_Y \{P[|\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Z_j(Y)| \geq t | Y]\} \\ \leq E_Y \{2 \exp[-m^2 t^2 / (2m\sigma_Y^2 + \frac{1}{3}mt)]\}.$$

$2 \exp[-m^2 t^2 / (2\sigma_Y^2 + \frac{1}{3}t)] \leq 2$ であり, (18) 式から

$$E \sigma_Y^4 = \frac{n(n-1)}{360n^4} + (\frac{1}{12n})^2 = \frac{7n-2}{720n^3}$$

であるから, Tshelysheff's inequality から.

$$(30) \quad E_Y \{2 \exp[-m^2 t^2 / (2\sigma_Y^2 + \frac{1}{3}t)]\} \leq 2 \exp[-mt^2 / (2\varepsilon + \frac{t}{3})] \\ + 2 \cdot P\{\sigma_Y^2 \geq \varepsilon\}$$

$$\leq 2 \exp[-mt^2 / (2\varepsilon + \frac{t}{3})] + 2 \cdot \frac{7n-2}{720n^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$0 < \alpha < 1$ に対し, $\alpha < \beta < 1$ なる β をとり, $t = m^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}, \varepsilon = n^{-\frac{\beta}{2}}$

とすると, (29), (30) 式から

$$P\{|W_{mn} - W_{mn}^*| \geq m^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\} \leq 2 \exp[-m^{-\frac{\alpha}{2}} / (2n^{-\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{3}m^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}})] \\ + 2 \cdot \frac{7n-2}{720n^3} \cdot n^{\beta} = \delta_N \quad (\text{とある}),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\log \delta_N / \log N] = \lim_{N \rightarrow \infty} [\log 2 \cdot \frac{7n-2}{720n^3} \cdot n^{\beta} / \log N]$$

$$= -2 + \beta < -1.$$

ゆえに Borel-Cantelli Lemma から, Lemma の結論 (27) を得る.



projection W_{mn}^* は独立な i.i.d. の和であるから, 仮定 (B) の下

で, Law of the iterated logarithm が成り立つ:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} [N^{\frac{1}{2}}(W_{mn}^* - \frac{1}{2}) / (2 \log \log N)^{\frac{1}{2}}] = [12\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf [N^{\frac{1}{2}}(W_{mn}^* - \frac{1}{2}) / (2 \log \log N)^{\frac{1}{2}}] = -[2\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}}$$

with probability one. Lemma 2 を使うと. 以下が. て.

Lemma 3.

Theorem a 仮定 (c) の下で, Wilcoxon statistic の i.i.l. :

$$(31) \quad \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup [N^{\frac{1}{2}}(W_{mn} - \frac{1}{2}) / (2 \log \log N)^{\frac{1}{2}}] &= [2\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \inf [N^{\frac{1}{2}}(W_{mn} - \frac{1}{2}) / (2 \log \log N)^{\frac{1}{2}}] &= -[2\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

with probability one, が成り立つ.

Lemma 4.

Theorem と同じ仮定の下で, 定数 C_1 を適当に選べば,
H-L 推定量 $\hat{\theta}_{mn} \in I_N(\theta_0)$, for all sufficiently large N ,
with probability one, が成り立つ.

Proof.

$W_{mn}(\theta)$ が θ の単調減少関数であることから

$$(32) \quad \inf \{ |W_{mn}(\theta) - \frac{1}{2}| : \theta \notin I_N(\theta_0) \}$$

$$= \min \{ |W_{mn}(\theta_0 - a_N) - \frac{1}{2}|, |W_{mn}(\theta_0 + a_N) - \frac{1}{2}| \}.$$

と3が

$$\begin{aligned} |W_{mn}(\theta_0 + a_N) - \frac{1}{2}| &\geq \Gamma \cdot a_N - |W_{mn}(\theta_0 + a_N) - W_{mn}(\theta_0) + \Gamma \cdot a_N| \\ &= |W_{mn}(\theta_0) - W_{mn}^*(\theta_0)| - |W_{mn}^*(\theta_0) - \frac{1}{2}| \end{aligned}$$

(32)式と Lemma 1, 2, 3 から,

$$(33) \quad \begin{aligned} |W_{mn}(\theta_0 + a_N) - \frac{1}{2}| &\geq \Gamma \cdot C_1 \cdot N^{-\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}} - C_2 N^{-\frac{3}{4}} (\log N)^{\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}} \\ &= N^{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}} - [6\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\geq \{ \Gamma C_1 - [\delta \lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \} N^{-\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon > 0$$

for all sufficiently large N with probability one. C_1 を大きく選べば $\{ \Gamma C_1 - [\delta \lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \} = A(\varepsilon) > 0$.

同様に for all sufficiently large N ,

$$(34) \quad |W_{mn}(\theta_0 - a_N) - \frac{1}{2}| \geq A N^{-\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}}, \text{ with prob. one.}$$

(32)(3)(34) 式から. for all sufficiently large N ,

$$(35) \quad \inf \{ |W_{mn}(\theta) - \frac{1}{2}|; \theta \notin I_N(\theta_0) \} \geq A N^{-\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{2}}$$

with probability one.

一方, (8) 式から.

$$(36) \quad |W_{mn}(\hat{\theta}_{mn}) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{mn}, \text{ with probability one,}$$

かつ, $\frac{1}{mn} \sim \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} N^{-2}$, as $N \rightarrow \infty$. 一方 (35), (36) 式より

$$\hat{\theta}_{mn} \in I_N(\theta_0) \text{ for all suff. large } N, \text{ with prob. one,}$$

が成り立っていることがわかる。



§ 4. Proof of Theorem.

定数 C_1, C_2 を適当に選ぶことにより, Lemma 4, が成り

立つから. for all sufficiently large N ,

$$(37) \quad |[W_{mn}(\hat{\theta}_{mn}) - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\hat{\theta}_{mn} - \theta_0)| \leq K_N$$

with prob. one. (36), (37) と Lemma 1 から. as $N \rightarrow \infty$

$$|\frac{1}{2} - W_{mn}(\theta_0)| + \Gamma \cdot (\hat{\theta}_{mn} - \theta_0) = O(N^{-\frac{3}{4}} (\log N)^{\frac{1}{2}} (\log \log N)^{\frac{1}{4}})$$

with prob. one, すなわち (10) を得る. (10) と Lemma 3 から

(//) を得る.



REFERENCES

- [1] Bahadur, R.R. (1966). A note on quantiles in large samples,
Ann. Math. Statist., 37, 577-580.
- [2] Kiefer, J. (1967). On Bahadur's representation of sample
quantiles, Ann. Math. Statist., 38, 1323-1342.
- [3] ——— (1970). Deviations between the sample quantile
process and the sample df, Nonparametric Techniques in
Statistical Inference (Ed: M.L.Puri), Cambridge Univ.
Press, N.Y., 299-320.
- [4] Loève, M. (1963). Probability Theory, Von Nostrand,
Princeton.
- [5] 丘本正 (1955). 順序統計量と累積度数の関係,
大阪統計談話会報告, 1, 18-19.
- [6] Sen, P.K. (1972). On the Bahadur representation of sample
quantiles for sequences of ϕ -mixing random variables,
J. Multi-variate Analysis, 2, 77-95.
- [7] Uspensky, J.V. (1937). Introduction to Mathematical
Probability, McGraw-Hill, New York.