

スカラー変数とベクトル変数が結合した 可積分系の分類

土田 隆之 (東京大・数理科学研究科)

Takayuki Tsuchida (University of Tokyo)

E-mail: tsuchida@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp

and

Thomas Wolf (Brock University)

E-mail: twolf@brocku.ca

概要

(1+1)-次元において, 1つのスカラー変数と1つのベクトル変数が結合した, 3階の非線形発展方程式系について考察する. コンピューターを使って, 5階の対称性を持つ系をしらみつぶしに求め, 各々の系について“手で”可積分性を調べる.

●目次

1. はじめに
2. 結合型 KdV 方程式
3. 結合型 mKdV 方程式と結合型 Burgers 方程式
4. 結合型 Ibragimov-Shabat 方程式
5. おわりに

1 はじめに

この講演では、スカラー変数 $u(x, t)$ とベクトル変数 $U(x, t)$ が結合した系を考え、可積分と期待される場合について、1つ1つ詳しく調べる。具体的な問題設定は以下の通りである。

- (1+1)-次元 (空間 x , 時間 t).
- 空間 x に関して 3 階の発展方程式系.
- 方程式の形は、(微分) 多項式型で、ベクトルからスカラー量を作る時は、必ず内積を用いる.
- ベクトル変数 $U(x, t)$ の成分の数 N は、任意の自然数であるとし、ベクトル間の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_N), \quad \langle U, U_x \rangle = \sum_{j=1}^N U_j \frac{\partial U_j}{\partial x}, \text{ etc.}$$

- $u, U, \partial_x, \partial_t$ に適当な重みを持たせたとき、方程式の各項が同じ重みを持つ.

最近の研究 [1, 2] によれば、スカラー変数に対する 3 階の多項式型方程式が、可積分になるような (正の) 重みづけは、以下の 3 通りしかない。

- KdV 方程式 $u_t = u_{xxx} + uu_x$ と同じ重みづけ:

$$\partial_x \rightarrow 1, \quad \partial_t \rightarrow 3, \quad u \rightarrow 2.$$

- mKdV 方程式 $u_t = u_{xxx} + u^2 u_x$ と同じ重みづけ:

$$\partial_x \rightarrow 1, \quad \partial_t \rightarrow 3, \quad u \rightarrow 1.$$

- Ibragimov-Shabat 方程式 [3] $u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4 u_x$
と同じ重みづけ: $\partial_x \rightarrow 1, \quad \partial_t \rightarrow 3, \quad u \rightarrow \frac{1}{2}.$

このとき、3 階の方程式は、5 階の対称性 (可換な時間発展) を持てば、無限個の対称性を持つ (逆も成立)。そこで、以下では、上の 3 通りの重みづけのもとで、5 階の対称性を持つような 3 階のスカラー・ベクトル結合系を調べることにする。実は、多成分系での事情はもう少し複雑で、従属変数が異なる重みを持つ可積分系も存在するのだが [4]、紙数の都合上、その場合についての考察とコンピューター計算の詳細は、文献 [5] に譲ることにする。

2 結合型 KdV 方程式

KdV 型の重みづけ: $\partial_x \rightarrow 1$, $\partial_t \rightarrow 3$, $u \rightarrow 2$, $U \rightarrow 2$ の場合, スカラー・ベクトル結合系の一般形は, 以下の通り ($a_1 \sim a_6$ は定数):

$$\begin{cases} u_t = a_1 u_{xxx} + a_2 u u_x + a_3 \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = a_4 U_{xxx} + a_5 u_x U + a_6 u U_x. \end{cases} \quad (2.0)$$

(2.0) が 3 階である (分散項を持つ) ことと, 2 つの式が decouple しないことを仮定する. 即ち, $(a_1, a_4) \neq (0, 0)$, $a_3 \neq 0$, $(a_5, a_6) \neq (0, 0)$.

定理 2.1 (2.0) が 5 階の対称性:

$$\begin{cases} u_s = b_1 u_{xxxxx} + b_2 u u_{xxx} + \cdots, \\ U_s = b_9 U_{xxxxx} + b_{10} u_{xxx} U + \cdots, \end{cases}$$

を持つとき ($u_{ts} = u_{st}$, $U_{ts} = U_{st}$), 変数のスケーリングにより, 以下の 4 つの系のいずれかと一致する:

$$\begin{cases} u_t = \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + u_x U + 2u U_x, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 6u u_x - 6\langle U, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6u_x U + 6u U_x, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u u_x + 3\langle U, U_x \rangle, \\ U_t = u_x U + u U_x, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 6u u_x - 12\langle U, U_x \rangle, \\ U_t = -2U_{xxx} - 6u U_x. \end{cases} \quad (2.4)$$

□

いずれの系も, $U = 0$ とおくことが可能で, この点からみると, (2.1) は自明な式 $u_t = 0$ の拡張, (2.2)–(2.4) は KdV 方程式の拡張になっている.

2.1 系 (2.1)

(2.1) 式は, Drinfel'd–Sokolov 系 [6, 7] (のうちの 1 つ) の多成分拡張である. この拡張は既に知られており, KP 階層にある拘束条件を課せば得られることが, 文献 [8, 9] で示されている.

2.2 系 (2.2)

(2.2) 式は, Jordan KdV 方程式として既に知られている [10]. KdV 方程式の行列拡張: $Q_t = Q_{xxx} + 3Q_x Q + 3Q Q_x$ が可積分であることは良く知られているが, 特に

$$Q = u1 + \sum_{j=1}^N U_j e_j,$$

とおくことで, (2.2) 式を得る. 但し, 1 は単位行列, $\{e_j\}$ は互いに反可換な行列: $\{e_i, e_j\}_+ \equiv e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}1$ である.

2.3 系 (2.3)

(2.3) 式は, Ito 方程式 [11] の多成分拡張であり, 二重ハミルトニアン構造を持つことが示されている [12]. $w = \sqrt{\langle U, U \rangle}$ とおくと, Ito 方程式そのもの:

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3uu_x + 3ww_x, \\ w_t = (uw)_x, \end{cases} \quad (2.5)$$

を得るので, (2.3) は, Ito 方程式と U に対する線形方程式からなる三角型の系である. Ito 方程式 (2.5) の Lax 形式は, 線形方程式系:

$$\begin{cases} \psi_{xx} = \left(\zeta - \frac{1}{2}u - \frac{3}{16\zeta}w^2 \right) \psi, \\ \psi_t = (4\zeta + u)\psi_x - \frac{1}{2}u_x \psi, \end{cases}$$

で与えられる (ζ はスペクトルパラメータ) [13]. 実際, 無矛盾条件: $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ を計算すれば, (2.5) を得る.

(2.5) の自明でない解 $u(x, t)$, $w(x, t)$ が与えられたときに, 残された U に対する線形方程式:

$$U_t = (uU)_x, \quad (2.6)$$

は以下のように解くことができる. $w(x, t)$ の従う式のポテンシャル形は, $\hat{w}_t = u\hat{w}_x$ で与えられる ($\hat{w}_x \equiv w$). この時, 任意関数 $f(z)$ に対し, $[f(\hat{w})]_t = u[f(\hat{w})]_x$ が成立することに注意すると, (2.6) の解:

$$U_j = [f_j(\hat{w})]_x = w \times f'_j \left(\int^x w dx' \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

が得られる. $f_1(z), \dots, f_N(z)$ は, 任意関数であるが, $\langle U, U \rangle = w^2$ が成立するための制約条件: $\sum_{j=1}^N [f'_j(z)]^2 = 1$ をみたさなければならない.

2.4 系 (2.4)

(2.4) 式は, Hirota-Satsuma [14] によって提出された 2 成分 KdV 方程式の, 新しい (と思われる) 拡張である. (2.4) 式が Lax 形式に書けることを示そう. 2つの列ベクトル ψ, ϕ に対する線形方程式系:

$$\begin{cases} \psi_{xx} + P\psi + Q\phi = \zeta\psi, \\ \phi_{xx} + P\phi + R\psi = -\zeta\phi, \\ \psi_t = 4\zeta\psi_x + 2P\psi_x - 4Q\phi_x - P_x\psi + 2Q_x\phi, \\ \phi_t = -4\zeta\phi_x + 2P\phi_x - 4R\psi_x - P_x\phi + 2R_x\psi, \end{cases} \quad (2.7)$$

を考える. ζ はスペクトルパラメータ, P, Q, R は正方行列である. 無矛盾条件: $\psi_{xxt} = \psi_{txx}, \phi_{xxt} = \phi_{txx}$ を考えることで, 3つの行列方程式:

$$\begin{cases} P_t = P_{xxx} + 3(P^2)_x - 6(QR)_x, \\ Q_t = -2Q_{xxx} - 6Q_xP + 3[P_x, Q], \\ R_t = -2R_{xxx} - 6R_xP + 3[P_x, R], \end{cases} \quad (2.8)$$

及び, 3つの制約条件: $[P, Q] = O, [P, R] = O, [Q, R]_x = O$ を得る. 特に,

$$P = u1, \quad Q = U_11 + \sum_{j=1}^{N-1} U_{j+1}e_j, \quad R = U_11 - \sum_{j=1}^{N-1} U_{j+1}e_j,$$

とおくと ($\{e_i, e_j\}_+ = -2\delta_{ij}1$), 制約条件は自動的にみたされ, 行列方程式 (2.8) は, 結合型 Hirota-Satsuma 方程式 (2.4) に帰着する.

3 結合型 mKdV 方程式と結合型 Burgers 方程式

mKdV 型の重みづけ: $\partial_x \rightarrow 1, \partial_t \rightarrow 3, u \rightarrow 1, U \rightarrow 1$ の場合, スカラー・ベクトル結合系の一般形は, 以下の通り ($a_1 \sim a_{21}$ は定数):

$$\begin{cases} u_t = a_1 u_{xxx} + a_2 u u_{xx} + a_3 u_x^2 + a_4 u^2 u_x + a_5 u^4 + a_6 u_x \langle U, U \rangle \\ \quad + a_7 u \langle U, U_x \rangle + a_8 \langle U, U_{xx} \rangle + a_9 \langle U_x, U_x \rangle + a_{10} u^2 \langle U, U \rangle \\ \quad + a_{11} \langle U, U \rangle^2, \\ U_t = a_{12} U_{xxx} + a_{13} u_{xx} U + a_{14} u_x U_x + a_{15} u U_{xx} + a_{16} u u_x U \\ \quad + a_{17} u^2 U_x + a_{18} \langle U, U \rangle U_x + a_{19} \langle U, U_x \rangle U + a_{20} u^3 U \\ \quad + a_{21} u \langle U, U \rangle U. \end{cases} \quad (3.0)$$

(3.0) が 3 階である (分散項を持つ) ことと, 2 つの式が decouple しないことを仮定する.

定理 3.1 (3.0) が 5 階の対称性 :

$$\begin{cases} u_s = b_1 u_{xxxxx} + b_2 u u_{xxx} + \cdots, \\ U_s = b_{36} U_{xxxx} + b_{37} u_{xxx} U + \cdots, \end{cases}$$

を持つとき ($u_{ts} = u_{st}$, $U_{ts} = U_{st}$), 変数のスケーリングにより, 以下の 25 個の系のいずれかと一致する :

$$\begin{cases} u_t = 3u_x \langle U, U \rangle + 3 \langle U, U_{xx} \rangle - 3 \langle U, U \rangle^2, \\ U_t = U_{xxx} + u_{xx} U + u_x U_x - 3 \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u_t = 2u_x \langle U, U \rangle + 2 \langle U, U_{xx} \rangle - \langle U_x, U_x \rangle - 2 \langle U, U \rangle^2, \\ U_t = U_{xxx} + u_{xx} U + 2u_x U_x - 2 \langle U, U \rangle U_x - 2 \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u_t = u_x \langle U, U \rangle + 2u \langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + u_{xx} U + u_x U_x - 2u u_x U - u^2 U_x + \langle U, U \rangle U_x \\ \quad - \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + \frac{3}{2} u_x^2 + \frac{3}{2} \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = u_x U_x, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + 2au_x \langle U, U \rangle + a \langle U, U_{xx} \rangle + a \langle U_x, U_x \rangle + b \langle U, U \rangle^2, \\ U_t = u_{xx} U + 2u_x U_x + a \langle U, U \rangle U_x + a \langle U, U_x \rangle U, \quad (a, b) \neq (0, 0), \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 - 3 \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6u_x U_x, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + u_x \langle U, U \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 3u_{xx} U + 3u_x U_x + \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + 2u_x \langle U, U \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \frac{1}{2} \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6u_{xx} U + 6u_x U_x + 2 \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + u_x^2 - 12\langle U, U_{xx} \rangle + 12\langle U_x, U_x \rangle - 4\langle U, U \rangle^2, \\ U_t = 4U_{xxx} + u_{xx}U + 2u_xU_x + 4\langle U, U \rangle U_x + 4\langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + 4u_x\langle U, U \rangle + 2\langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle + \frac{2}{3}\langle U, U \rangle^2, \\ U_t = -2U_{xxx} - 6u_{xx}U - 6u_xU_x - 4\langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{2}u_x\langle U, U \rangle + u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = -u_xU_x - \frac{1}{2}u^2U_x + \frac{3}{2}\langle U, U \rangle U_x, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{2}u_x\langle U, U \rangle + u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = -u_xU_x - \frac{1}{2}u^2U_x + \frac{1}{2}\langle U, U \rangle U_x + \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{1}{2}u_x\langle U, U \rangle + u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = u_{xx}U + u_xU_x - uu_xU - \frac{1}{2}u^2U_x + \frac{1}{2}\langle U, U \rangle U_x + \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{2}u_x\langle U, U \rangle + u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle \\ \quad + \frac{1}{2}\langle U, U \rangle^2, \\ U_t = -u_xU_x - \frac{1}{2}u^2U_x - \frac{1}{2}\langle U, U \rangle U_x + \frac{1}{2}u\langle U, U \rangle U, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle \\ \quad - \frac{1}{4}u^2\langle U, U \rangle + \frac{1}{4}\langle U, U \rangle^2, \\ U_t = \frac{1}{2}u_{xx}U + \frac{1}{2}\langle U, U_x \rangle U - \frac{1}{4}u^3U + \frac{1}{4}u\langle U, U \rangle U, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + u^2U_x + \langle U, U \rangle U_x, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 2u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + u\langle U, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + uu_xU + u^2U_x + \langle U, U \rangle U_x + \langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + 6u_x\langle U, U \rangle + 12u\langle U, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} - 12uu_xU - 6u^2U_x + 6\langle U, U \rangle U_x, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 3u_{xx}U + 3u_xU_x - 6uu_xU - 3u^2U_x + \langle U, U \rangle U_x \\ \quad + 3\langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6u_{xx}U + 6u_xU_x - 12uu_xU - 6u^2U_x + \langle U, U \rangle U_x \\ \quad + 4\langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = -2U_{xxx} - 6u_{xx}U - 6u_xU_x + 12uu_xU + 6u^2U_x + \langle U, U \rangle U_x \\ \quad - 2\langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} u_t = a(u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x) + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle \\ \quad + 2\langle U, U_{xx} \rangle + 2\langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + \frac{1}{2}(1-a)u_{xx}U + \frac{3}{2}u_xU_x + \frac{3}{2}uU_{xx} + \frac{3}{4}(1-2a)uu_xU \\ \quad + \frac{3}{4}u^2U_x - \langle U, U_x \rangle U + \frac{1}{8}(1-4a)u^3U - \frac{1}{2}u\langle U, U \rangle U, \\ a : \text{arbitrary}, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle \\ \quad + 2\langle U, U_{xx} \rangle + 2\langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = -\frac{1}{2}u_{xx}U - \frac{3}{2}uu_xU - \langle U, U_x \rangle U - \frac{1}{2}u^3U - \frac{1}{2}u\langle U, U \rangle U, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle \\ \quad + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = \frac{1}{2}u_{xx}U + u_xU_x + uu_xU + u^2U_x + \frac{1}{2}\langle U, U \rangle U_x + \frac{1}{2}\langle U, U_x \rangle U, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x + u_x\langle U, U \rangle + 2u\langle U, U_x \rangle \\ \quad + \langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle, \\ U_t = \frac{1}{2}u_{xx}U + u_xU_x + uu_xU + u^2U_x + \langle U, U \rangle U_x. \end{cases} \quad (3.25)$$

□

いずれの系も, $U = 0$ とおくことが可能で, この点からみると, (3.1)–(3.3)は自明な式の, (3.4)–(3.10)は potential KdV 方程式の, (3.11)–(3.21)は mKdV 方程式の, (3.22)–(3.25)は高階 Burgers 方程式の拡張になっている. 実は, (3.22)–(3.24)は, 2 階の方程式系の 3 階の対称性である (後述).

3.1 系 (3.1)

この系は, (3.3) と変数変換を通じてつながっているので, 可積分性については, 3.3 章でまとめて議論する.

3.2 系 (3.2)

この系においては, $(u_x - \langle U, U \rangle)_t = 0$ という関係式が成立することから, $u_x - \langle U, U \rangle = \phi(x)$ とおける. この時, U の式は,

$$U_t = U_{xxx} + 2\phi U_x + \phi_x U,$$

と書き換えられ, その解は重ね合わせの形: $U(x, t) = \int d\lambda e^{\lambda t} \Psi(x; \lambda)$ で書くことができる. ここで, ベクトル関数 $\Psi(x; \lambda)$ は, 常微分方程式:

$$\Psi_{xxx} + 2\phi \Psi_x + \phi_x \Psi = \lambda \Psi, \quad (3.26)$$

の解である. (3.26) は, Kaup-Kupershmidt 方程式に付随する散乱問題と同じ形をしているが, これは偶然ではない (文献 [5] を参照).

3.3 系 (3.3)

新しいスカラー変数 w , ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = -u_x - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\langle U, U \rangle, \\ W = U_x + uU, \end{cases}$$

によって定義すると (Miura 型の変換), これらは,

$$\begin{cases} w_t = -3\langle W, W_x \rangle, \\ W_t = W_{xxx} + w_x W + 2w W_x, \end{cases}$$

をみたす. この系は, W のスケーリングにより, 結合型 Drinfel'd-Sokolov 系 (2.1) に一致する.

系 (3.1) との関係: また別のスカラー変数 v を, $v = u_x - u^2 + \langle U, U \rangle$ によって導入すると, (3.3) は, v, U に対する系として書き直すことができる:

$$\begin{cases} v_t = (3v\langle U, U \rangle + 3\langle U, U_{xx} \rangle - 3\langle U, U \rangle^2)_x, \\ U_t = U_{xxx} + v_x U + v U_x - 3\langle U, U_x \rangle U. \end{cases} \quad (3.27)$$

(3.27)において、ポテンシャル化： $v = \hat{u}_x$ を考えることで、(3.1)($u \rightarrow \hat{u}$ とした系)を得る。

3.4 系 (3.4)

この系は、結合型 Ito 方程式 (2.3) のポテンシャル形に過ぎない。

3.5 系 (3.5)

新しいスカラー変数 w , ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = u_x + \frac{a}{2}\langle U, U \rangle, \\ W = \sqrt{\langle U, U \rangle}U, \end{cases}$$

によって定義すると、これらは、

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + 6ww_x + (b - \frac{a^2}{4})\langle W, W \rangle_x, \\ W_t = 2(wW)_x, \end{cases} \quad (3.28)$$

をみたす。 $b \neq \frac{a^2}{4}$ のとき、(3.28) は、変数のスケーリングにより、結合型 Ito 方程式 (2.3) と一致する。 $b = \frac{a^2}{4}$ のとき、(3.28) は、KdV 方程式と、KdV に依存した係数を持つ線形方程式からなる、三角型の系である。この系が、無限個の対称性を持つことは、文献 [15] で示されている。

3.6 系 (3.6)

この系は、Jordan KdV 方程式 (2.2) のポテンシャル形に過ぎない。

3.7 系 (3.7)

この系は、(3.19) と変数変換を通じてつながっているので、可積分性については、3.19 章でまとめて議論する。

3.8 系 (3.8)

この系は、(3.20) と変数変換を通じてつながっているので、可積分性については、3.20 章でまとめて議論する。

3.9 系 (3.9)

スカラー変数 w を, $w = u_x + 2\langle U, U \rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式:

$$w_t = w_{xxx} + 2ww_x, \quad (3.29a)$$

をみたす. 従って, (3.9) は三角型の系である. $u_x = w - 2\langle U, U \rangle$ を U の式に代入すると,

$$U_t = 4U_{xxx} + w_x U + 2wU_x, \quad (3.29b)$$

を得るが, これは, KdV 方程式に対する, Lax 表示の時間部分と同じである.

3.10 系 (3.10)

この系は, (3.21) と変数変換を通じてつながっているので, 可積分性については, 3.21 章でまとめて議論する.

3.11 系 (3.11)

スカラー変数 w を, $w = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\langle U, U \rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式:

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x,$$

をみたす. 従って, (3.11) は三角型の系である. $\frac{1}{2}\langle U, U \rangle = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - w$ を, u の式に代入すると,

$$u_t = -2u_x^2 + u^2u_x - 3wu_x - w_xu - w_{xx}, \quad (3.30)$$

を得る. KdV 方程式の解 $w(x, t)$ が与えられたときに, この式を, u について解けるかどうかは不明である.

もっとも簡単な, $w(x, t) = 0$ の場合, (3.30) は (変数のスケーリングの後),

$$u_t = u_x(u_x - u^2), \quad (3.31)$$

に落ちる. (3.31) 式は, 無限個の可換な対称性:

$$u_{t_n} = u_x(u_x - u^2)^n, \quad n \in \mathbb{R},$$

を持つので, 対称性の意味で可積分である. 一階の方程式であるが, 一般解の具体的な表示はわかっていない.

3.12 系 (3.12)

u の方程式, 及び $\langle U, U \rangle$ の従う方程式は, 系 (3.11) の場合と全く同じである. このため, 同じ様に w を定義すると, w は KdV 方程式をみたし, u は (3.30) 式に従う. 系 (3.11) と系 (3.12) の唯一の違いは, U に対する方程式を, u, w を用いて線形に書き直した時の, 式の形にある.

3.13 系 (3.13)

スカラー変数 w を, $w = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\langle U, U \rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式:

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x,$$

をみたす. 従って, (3.13) は三角型の系である.

$\frac{1}{2}\langle U, U \rangle = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - w$ を, u の式と U の式, それぞれに代入すると,

$$\begin{cases} u_t = -(wu + w_x)_x, \\ U_t = -(wU)_x, \end{cases} \quad (3.32)$$

を得る. いずれも線形で, $w(x, t) = 0$ の場合は, 自明な式に落ちる.

3.14 系 (3.14)

スカラー変数 w を, $w = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\langle U, U \rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式:

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x, \quad (3.33a)$$

をみたす. 従って, (3.14) は三角型の系である. $\frac{1}{2}\langle U, U \rangle = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - w$ を u の式に代入すると,

$$u_t = -u^2u_x + \frac{1}{2}u^4 - w_{xx} + wu_x - w_xu - 2wu^2 + 2w^2, \quad (3.33b)$$

を得る.

系 (3.33) は, (少なくとも) 2つの高階対称性を持つので, 可積分であると思われる. 最初の高階対称性は,

$$\begin{cases} w_t = w_{xxxxx} - 5ww_{xxx} - 10w_xw_{xx} + \frac{15}{2}w^2w_x, \\ u_t = -\frac{1}{2}u^4w + 2u^2w^2 - 2w^3 + u^2wu_x - \frac{1}{2}w^2u_x - u^3w_x + 5uww_x \\ \quad + 2uu_xw_x + 3w_x^2 - u^2w_{xx} + 5ww_{xx} + u_xw_{xx} - uw_{xxx} - w_{xxxx}, \end{cases}$$

で与えられ, これは, $w = 0$ とおくと消えてしまう. 二番目の高階対称性についても, 同様である. 一方, (3.33b) は, リダクション $w = 0$ により, 非自明な式:

$$u_t = -u^2 u_x + \frac{1}{2} u^4,$$

に落ちる. コンピューターを使って調べた限り, この方程式は, 高階対称性を持たないようである.

従って, 可積分であると思われる系のリダクションにより, 高階対称性を持たない(?) 方程式が得られた. 可積分性とは何かを考える上で, (3.33) は, 興味深い系であろう.

3.15 系 (3.15)

スカラー変数 w を, $w = -u_x + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \langle U, U \rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式:

$$w_t = w_{xxx} - 3w w_x,$$

をみたす. 従って, (3.15) は三角型の系である.

$\frac{1}{2} \langle U, U \rangle = -u_x + \frac{1}{2} u^2 - w$ を, u の式と U の式, それぞれに代入すると,

$$\begin{cases} u_t = -w_x u - \frac{1}{2} w u^2 - w_{xx} + w^2, \\ U_t = -\frac{1}{2} (w_x + w u) U, \end{cases}$$

を得る. $w(x, t)$ が与えられた時, $u(x, t)$ の従う方程式は, x を fix してみると, Riccati 方程式である. $w(x, t)$ と $u(x, t)$ が得られたならば, U の式を積分することができる:

$$U(x, t) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t (w_x + w u) dt'} U(x, 0).$$

3.16 系 (3.16)

$(N+1)$ -成分ベクトル W を, $W = (u, U)$ で定義すると, 系 (3.16) は, 一本のベクトル方程式:

$$W_t = W_{xxx} + \langle W, W \rangle W_x,$$

に書くことができる. このベクトル mKdV 方程式が, 可積分であることは良く知られている (例えば, 文献 [16, 17] を参照).

3.17 系 (3.17)

$(N+1)$ -成分ベクトル W を, $W = (u, U)$ で定義すると, 系 (3.17) は, 一本のベクトル方程式:

$$W_t = W_{xxx} + \langle W, W \rangle W_x + \langle W, W_x \rangle W,$$

に書くことができる. このベクトル mKdV 方程式も, 良く知られており, 文献 [18] で, Lax 形式に書けることが示されている.

3.18 系 (3.18)

この系は, Jordan mKdV 方程式として既に知られている [10]. mKdV 方程式の行列拡張:

$$Q_t = Q_{xxx} - 3(Q_x Q^2 + Q^2 Q_x),$$

が可積分であることは良く知られているが, 特に,

$$Q = u\mathbf{1} + \sum_{j=1}^N U_j \mathbf{e}_j, \quad \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}_+ = -2\delta_{ij}\mathbf{1},$$

とおくことで, (3.18) を得る.

系 (2.2), (3.6) との関係: 新しいスカラー変数 w , ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = \pm u_x - u^2 + \langle U, U \rangle, \\ W = U_x \mp 2uU, \end{cases}$$

によって定義すると (Miura 型の変換), これらは, Jordan KdV 方程式 (2.2):

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + 3(w^2 - \langle W, W \rangle)_x, \\ W_t = W_{xxx} + 6(wW)_x, \end{cases} \quad (3.34)$$

をみたす. また, (3.34) のポテンシャル化を考えることで, 系 (3.6) を得る.

3.19 系 (3.19)

(3.19) が, Lax 形式に書けることを示そう. まず, 以下の線形方程式系を考える:

$$\psi_x = U\psi, \quad \psi_t = V\psi, \quad (3.35)$$

$$U = \begin{pmatrix} -i\zeta I_l & Q \\ R & i\zeta I_m + P \end{pmatrix}, \quad (3.36a)$$

$$V = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} -4i\zeta^3 I_l - 2i\zeta QR \\ + Q_x R - QR_x + 2QPR \\ 4\zeta^2 R + 2i\zeta(-R_x + PR) \\ - R_{xx} + P_x R + 2PR_x \\ + 2RQR - P^2 R \end{array} & \begin{array}{l} 4\zeta^2 Q + 2i\zeta(Q_x + QP) - Q_{xx} \\ - 2Q_x P - QP_x + 2QRQ - QP^2 \\ 4i\zeta^3 I_m + 2i\zeta RQ - P_{xx} + R_x Q \\ - RQ_x + P_x P - PP_x + 2PRQ \\ + 2RQP - P^3 - 3g_x P \end{array} \end{array} \right). \quad (3.36b)$$

ζ はスペクトルパラメータ, I_l と I_m は, $l \times l$ と $m \times m$ の単位行列, Q, R, P は行列変数, g は任意のスカラー関数である. Lax 対 (3.36) を, (3.35) の無矛盾条件: $U_t - V_x + UV - VU = 0$ に代入すると, 3本の行列 mKdV 方程式:

$$\begin{cases} Q_t + Q_{xxx} + 3(Q_x P)_x - 3Q_x RQ - 3QRQ_x \\ \quad + 3Q_x P^2 + 3QP_x P - 3g_x QP = 0, \\ R_t + R_{xxx} - 3(PR_x)_x - 3R_x QR - 3RQR_x \\ \quad + 3P^2 R_x + 3PP_x R + 3g_x PR = 0, \\ P_t + P_{xxx} + 3(g_x P)_x - 3(PRQ + RQP)_x \\ \quad + 3PP_x P + 3P^2 RQ - 3RQP^2 = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

を得る. (3.37) が, 転置に関するリダクション: $R = {}^t Q, {}^t P = -P$ を許すことに注意して,

$$Q = (u, W_1, \dots, W_N) \equiv (u, W), \quad R = \begin{pmatrix} u \\ W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ {}^t W \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & W_1 & \cdots & W_N \\ -W_1 & & & \\ \vdots & & O & \\ -W_N & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & W \\ -{}^t W & O \end{pmatrix},$$

とおく. すると, (3.37) は, 以下の系に帰着する:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - 6u^2u_x - 6u_x\langle W, W \rangle - 6u\langle W, W_x \rangle \\ \quad + 3g_x\langle W, W \rangle - 3\langle W_x, W \rangle_x = 0, \\ W_t + W_{xxx} + 3(u_xW)_x - 3ug_xW - 3uu_xW \\ \quad - 3u^2W_x - 3\langle W, W \rangle W_x - 9\langle W, W_x \rangle W = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

ここで, $g = u$, $W = \frac{1}{\sqrt{3}}U$ とおき, t の符号を変ええると, (3.38) は系 (3.19) に一致する.

系 (3.7) との関係: 新しいスカラー変数 v を, $v = u_x - u^2 + \frac{1}{3}\langle U, U \rangle$ によって導入すると, (3.19) は, v, U に対する系として, 書き直すことができる:

$$\begin{cases} v_t = (v_{xx} + 3v^2 + v\langle U, U \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle)_x, \\ U_t = U_{xxx} + 3v_xU + 3vU_x + \langle U, U_x \rangle U. \end{cases} \quad (3.39)$$

(3.39) において, ポテンシャル化: $v = \hat{u}_x$ を考えることで, (3.7) ($u \rightarrow \hat{u}$ とした系) を得る.

3.20 系 (3.20)

新しいスカラー変数 w を, $w = u_x - u^2$ によって導入することで, (3.20) は, 以下の系に書き換えられる:

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + 6ww_x + w_x\langle U, U \rangle + 2w\langle U, U \rangle_x + \frac{1}{2}\langle U, U \rangle_{xxx}, \\ U_t = U_{xxx} + 6(wU)_x + \langle U, U \rangle U_x + 2\langle U, U \rangle_x U. \end{cases} \quad (3.40)$$

(3.40) は, 高階 Jaulent-Miodek 方程式 [19] の新しい多成分拡張である. 以下, (3.40) が Lax 形式に書けることを示そう. 線形方程式系:

$$\begin{cases} \psi_{xx} + (Q + \zeta R)\psi = \zeta^2\psi, \\ \psi_t = (4\zeta^2I + 2\zeta R + 2Q + \frac{3}{2}R^2)\psi_x - [\zeta R_x + Q_x + \frac{3}{4}(R^2)_x]\psi, \end{cases} \quad (3.41)$$

を考える. ζ はスペクトルパラメータ, Q と R は, 同じサイズの正方行列である. (3.41) に対して, 無矛盾条件: $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ を考えると, 2本の行列方程式:

$$\begin{cases} Q_t = Q_{xxx} + 3(Q^2)_x + \frac{3}{4}(R^2)_{xxx} + \frac{3}{2}R^2Q_x \\ \quad + \frac{3}{4}[Q(R^2)_x + 3(R^2)_xQ], \\ R_t = R_{xxx} + 3(QR + RQ)_x + \frac{3}{4}[3(R^2)_xR + R(R^2)_x + 2R^2R_x], \end{cases} \quad (3.42)$$

と, 1つの制約条件: $[Q, R^2] = 0$ を得る. 特に,

$$Q = w1, \quad R = \frac{\sqrt{6}}{3}i \sum_{j=1}^N U_j e_j, \quad \{e_i, e_j\}_+ = -2\delta_{ij}1,$$

とおくと, 制約条件は自動的にみたされ, 行列方程式 (3.42) は, 系 (3.40) に帰着する.

系 (3.8) との関係: また別のスカラー変数 v を, $v = u_x - u^2 + \frac{1}{6}\langle U, U \rangle$ によって導入すると, (3.20) は, v, U に対する系として書き直すことができる:

$$\begin{cases} v_t = (v_{xx} + 3v^2 + 2v\langle U, U \rangle + \langle U, U_{xx} \rangle + \frac{1}{2}\langle U_x, U_x \rangle)_x, \\ U_t = U_{xxx} + 6v_x U + 6v U_x + 2\langle U, U_x \rangle U. \end{cases} \quad (3.43)$$

(3.43) において, ポテンシャル化: $v = \hat{u}_x$ を考えることで, (3.8) ($u \rightarrow \hat{u}$ とした系) を得る.

3.21 系 (3.21)

新しいスカラー変数 w , ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = u_x + u^2 + \frac{1}{6}\langle U, U \rangle, \\ W = U_x + 2uU, \end{cases}$$

によって定義すると (Miura 型の変換), これらは,

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} - 6ww_x + 2\langle W, W_x \rangle, \\ W_t = -2W_{xxx} + 6wW_x, \end{cases}$$

をみたす. この系は, 変数のスケーリングにより, 結合型 Hirota-Satsuma 方程式 (2.4) と一致する.

系 (3.10) との関係: また別のスカラー変数 v を, $v = u_x - u^2 - \frac{1}{6}\langle U, U \rangle$ によって導入すると, (3.21) を, v, U に対する系として書き直すことができる:

$$\begin{cases} v_t = (v_{xx} + 3v^2 + 4v\langle U, U \rangle + 2\langle U, U_{xx} \rangle + \langle U_x, U_x \rangle + \frac{2}{3}\langle U, U \rangle^2)_x, \\ U_t = -2U_{xxx} - 6v_x U - 6v U_x - 4\langle U, U_x \rangle U. \end{cases} \quad (3.44)$$

(3.44) において, ポテンシャル化: $v = \hat{u}_x$ を考えることで, (3.10) ($u \rightarrow \hat{u}$ とした系) を得る.

3.22 系 (3.22)

この系は, 2 階の方程式系:

$$\begin{cases} u_\tau = \frac{1}{3}(1+2a)(u_{xx} + 2uu_x) + \frac{4}{3}\langle U, U_x \rangle, \\ U_\tau = U_{xx} + \frac{1}{3}(1-a)u_x U + uU_x + \frac{1}{12}(1-4a)u^2 U - \frac{1}{3}\langle U, U \rangle U, \end{cases} \quad (3.45)$$

の 3 階の対称性である. 変数変換:

$$\begin{cases} w = e^{\int^x u dx'}, \\ W = U e^{\frac{1}{2} \int^x u dx'}, \end{cases} \quad (3.46)$$

により, 2 つの系 (3.45), (3.22) は, (ほぼ) 線形化される:

$$\begin{cases} w_\tau = \frac{1}{3}(1+2a)w_{xx} + \frac{2}{3}\langle W, W \rangle, \\ W_\tau = W_{xx}, \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} w_t = aw_{xxx} + \langle W, W \rangle_x, \\ W_t = W_{xxx}. \end{cases} \quad (3.48)$$

$a = 1$ の場合, 更に変換: $W = V_x$, $w + \frac{1}{3}\langle V, V \rangle = v$ を考えることで, 完全に線形化することができる. $a = -\frac{1}{2}$ の場合, (3.47) の w の式を積分することができる,

$$w(x, \tau) = \frac{2}{3} \int_0^\tau \langle W(x, \tau'), W(x, \tau') \rangle d\tau',$$

を得る. 同様に, $a = 0$ の場合, (3.48) の w の式を積分することができる. a の値がこれら以外のとき, (3.47) と (3.48) を, (Green 関数等を持ち出さずに) 綺麗に解くことができるかどうかは, 不明である.

3.23 系 (3.23)

この系は, (3.22) において, t, U のスケーリングを変えてから, $a \rightarrow \infty$ の極限をとることで得られる. このことから類推される通り, (3.23) は, 2 階の方程式系:

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + 2uu_x + 2\langle U, U_x \rangle, \\ U_\tau = -\frac{1}{2}u_x U - \frac{1}{2}u^2 U - \frac{1}{2}\langle U, U \rangle U, \end{cases} \quad (3.49)$$

の 3 階の対称性である.

2つの系 (3.49), (3.23) は, (3.22) の場合と全く同じ変換 (3.46) により,

$$\begin{cases} w_\tau = w_{xx} + \langle W, W \rangle, \\ W_\tau = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + \langle W, W \rangle_x, \\ W_t = 0, \end{cases}$$

にうつされる. 更に, 変換: $\langle W, W \rangle = g''(x)$, $w + g(x) = v$ を考えることで, 完全に線形化することができる.

3.24 系 (3.24)

この系は, 2 階の方程式系:

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + 2uu_x + \langle U, U_x \rangle, \\ U_\tau = \frac{1}{2}u_x U + uU_x, \end{cases} \quad (3.50)$$

の 3 階の対称性である. 系 (3.50) について考えてみよう. スカラー変数 w を, $w = \frac{1}{2}\langle U, U \rangle$ によって定義すると, (3.50) から, 2 成分 Burgers 方程式:

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + 2uu_x + w_x, \\ w_\tau = (uw)_x, \end{cases} \quad (3.51)$$

を得る. 従って, (3.50) は, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) と, U に対する線形方程式からなる三角型の系である.

(3.51) 式の自明でない解 $u(x, \tau)$, $w(x, \tau)$ が与えられたとき, 残された U に対する方程式:

$$(U_j^2)_\tau = (uU_j^2)_x, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

は, 結合型 Ito 方程式 (2.3) の場合と同様に, 解くことができる.

従って, 問題は, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) の可積分性である. (3.51) が無限個の可換な対称性を持つことは, 文献 [20] で示されている. しかし残念ながら, (3.51) に対する線形化変換, 一般解, あるいは fake でない Lax 表示等を見つけることはできなかった. 代わりに, 文献 [5] では, 進行波解について調べた.

3.25 系 (3.25)

U が 1 成分ベクトル, 即ちスカラー変数のときは, 系 (3.25) は, 系 (3.24) と一致する. しかし, (3.24) とは異なり, (3.25) は 2 階の対称性を持たない. 3.24 章と同様に, $w = \frac{1}{2}\langle U, U \rangle$ とおくと, (3.25) から, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) の 3 階の対称性を得る. 従って, 主な問題は, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) の階層をどうやって解くかだが...

4 結合型 Ibragimov-Shabat 方程式

紙数の都合上, 一般形は省略するが, 次の定理が成り立つ.

定理 4.1 Ibragimov-Shabat 型の重みづけのもとで, 5 階の対称性を持つ 3 階のスカラー・ベクトル結合系は, 変数のスケールリングにより, 以下の 2 つの系のどちらかと一致する:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = (a+1)(u_{xxx} + 3u^2u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4u_x + 3u_{xx}\langle U, U \rangle \\ \quad + 6u_x\langle U, U_x \rangle + 3u_x\langle U, U \rangle^2) + 2au\langle U, U_{xx} \rangle + (2a+3)u\langle U_x, U_x \rangle \\ \quad + (10a+6)u_xu^2\langle U, U \rangle + 2au^3\langle U, U_x \rangle + 6au\langle U, U \rangle\langle U, U_x \rangle \\ \quad + au^5\langle U, U \rangle + 2au^3\langle U, U \rangle^2 + au\langle U, U \rangle^3, \\ U_t = U_{xxx} + 3\langle U, U \rangle U_{xx} + 6\langle U, U_x \rangle U_x + 3\langle U_x, U_x \rangle U + 3\langle U, U \rangle^2 U_x \\ \quad - 2au_{xx}uU + (a+3)u_x^2U + 6uu_xU_x + 3u^2U_{xx} - 6au_xu^3U \\ \quad + 3u^4U_x - 2au_xu\langle U, U \rangle U - 4au^2\langle U, U_x \rangle U + 6u^2\langle U, U \rangle U_x \\ \quad - au^6U - 2au^4\langle U, U \rangle U - au^2\langle U, U \rangle^2 U, \quad a : \text{arbitrary}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xxx} + 3u^2u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4u_x + 3u_{xx}\langle U, U \rangle + 6u_x\langle U, U_x \rangle \\ \quad + 2u\langle U, U_{xx} \rangle + 2u\langle U_x, U_x \rangle + 10u_xu^2\langle U, U \rangle + 2u^3\langle U, U_x \rangle \\ \quad + 3u_x\langle U, U \rangle^2 + 6u\langle U, U \rangle\langle U, U_x \rangle + u^5\langle U, U \rangle + 2u^3\langle U, U \rangle^2 \\ \quad + u\langle U, U \rangle^3, \\ U_t = -2u_{xx}uU + u_x^2U - 6u_xu^3U - 2u_xu\langle U, U \rangle U - 4u^2\langle U, U_x \rangle U \\ \quad - u^6U - 2u^4\langle U, U \rangle U - u^2\langle U, U \rangle^2 U. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

□

(4.1), (4.2) 共に $U = 0$ とおくことが可能で, この点からみると, どちらも Ibragimov-Shabat 方程式の拡張になっている. また, (4.1) は, $u = 0$ とおけ

ば, ベクトル Ibragimov-Shabat 方程式 [21] :

$$U_t = U_{xxx} + 3\langle U, U \rangle U_{xx} + 6\langle U, U_x \rangle U_x + 3\langle U_x, U_x \rangle U + 3\langle U, U \rangle^2 U_x,$$

に帰着する.

4.1 系 (4.1)

(4.1) が, 保存則: $(u^2 + \langle U, U \rangle)_t = (\cdots)_x$ を持つことに注目する (紙数の都合上, flux は省略). 変数変換:

$$\begin{cases} w = ue^{\int^x (u^2 + \langle U, U \rangle) dx'}, \\ W = Ue^{\int^x (u^2 + \langle U, U \rangle) dx'}, \end{cases} \quad (4.3)$$

を考えると, w と W に対する一対の線形方程式:

$$\begin{cases} w_t = (a+1)w_{xxx}, \\ W_t = W_{xxx}, \end{cases}$$

を得る.

4.2 系 (4.2)

(4.2) が, 保存則: $(u^2 + \langle U, U \rangle)_t = (\cdots)_x$ を持つことに注目する. 4.1 章と同じ変数変換 (4.3) を考えると, 線形方程式と自明な式の対:

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx}, \\ W_t = 0, \end{cases}$$

を得る.

5 おわりに

- スカラー変数とベクトル変数の結合系について, コンピューターを使って, 高階対称性を持つ場合をしらみつぶしに求めた.
- 得られた 1 つ 1 つの系について考察を加え, 多くの場合に, Lax 形式に書ける, 線形化可能である, など何らかの意味で可積分といえることを示した. 一方で, (3.31) 式や, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) のように, 解き方がわからない方程式も出てきた.

- 3通りの重みづけの中で, 特に mKdV 型の場合が, 可積分系の数も多く, 性質も多様であることが判明した (はっきりした理由は不明).
- スカラー変数 1 つ・ベクトル変数 1 つの系を考えたために, スカラー変数 2 つの系等と比べ, 2 つの系をつなぐ変数変換を探すのが容易であった (形がかなり限られるため).
- 近年, コンピューター性能の進歩などにより, 可積分系の完全なリストを作る研究が盛んに行われている (例えば, 文献 [21–27] を参照). 当研究は, これらの研究 (の一部) の延長上にあるものである ([5] で詳述).

参考文献

- [1] Sanders J A and Wang J P 1998 On the integrability of homogeneous scalar evolution equations *J. Diff. Eq.* **147** 410–434
- [2] Olver P J, Sanders J A and Wang J P 2001 Classification of symmetry-integrable evolution equations *CRM Proc. Lecture Notes* **29** 363–372
- [3] Ibragimov N H and Shabat A B 1980 Infinite Lie–Bäcklund algebras *Func. Anal. Appl.* **14** 313–315
- [4] Sanders J A and Wang J P 2001 On the integrability of systems of second order evolution equations with two components *Preprint*
- [5] Tsuchida T and Wolf T 2002 Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations *Preprint*
- [6] Wilson G 1982 The affine Lie algebra $C_2^{(1)}$ and an equation of Hirota and Satsuma *Phys. Lett. A* **89** 332–334
- [7] Drinfel'd V G and Sokolov V V 1985 Lie algebras and equations of Korteweg–de Vries type *J. Sov. Math.* **30** 1975–2036
- [8] Konopelchenko B and Strampp W 1992 New reductions of the Kadomtsev–Petviashvili and two-dimensional Toda lattice hierarchies via symmetry constraints *J. Math. Phys.* **33** 3676–3686
- [9] Sidorenko J and Strampp W 1993 Multicomponent integrable reductions in the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy *J. Math. Phys.* **34** 1429–1446
- [10] Svinolupov S I 1993 Jordan algebras and integrable systems *Func. Anal. Appl.* **27** 257–265
- [11] Ito M 1982 Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation *Phys. Lett. A* **91** 335–338

- [12] Kupershmidt B A 1985 A coupled Korteweg–de Vries equation with dispersion *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** L571–L573
- [13] Bogolyubov N N and Prikrpatskii A K 1986 Complete integrability of the nonlinear Ito and Benney–Kaup systems: Gradient algorithm and Lax representation *Theor. Math. Phys.* **67** 586–596
- [14] Hirota R and Satsuma J 1981 Soliton solutions of a coupled Korteweg–de Vries equation *Phys. Lett. A* **85** 407–408
- [15] van der Kamp P H 2002 On proving integrability *Inver. Probl.* **18** 405–414
- [16] Iwao M and Hirota R 1997 Soliton solutions of a coupled modified KdV equations *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 577–588
- [17] Tsuchida T and Wadati M 1998 The coupled modified Korteweg–de Vries equations *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 1175–1187
- [18] Konopelchenko B G 1983 Nonlinear transformations and integrable evolution equations *Fortschr. Phys.* **31** 253–296
- [19] Jaulent M and Miodek I 1976 Nonlinear evolution equations associated with ‘energy-dependent Schrödinger potentials’ *Lett. Math. Phys.* **1** 243–250
- [20] Ma W X 1993 A hierarchy of coupled Burgers systems possessing a hereditary structure *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L1169–L1174
- [21] Sokolov V V and Wolf T 2001 Classification of integrable polynomial vector evolution equations *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 11139–11148
- [22] Sokolov V V and Wolf T 1999 A symmetry test for quasilinear coupled systems *Inver. Probl.* **15** L5–L11
- [23] Foursov M V 2000 On integrable coupled Burgers-type equations *Phys. Lett. A* **272** 57–64
- [24] Foursov M V 2000 Classification of certain integrable coupled potential KdV and modified KdV-type equations *J. Math. Phys.* **41** 6173–6185
- [25] Karasu(Kalkanli) A 1997 Painlevé classification of coupled Korteweg–de Vries systems *J. Math. Phys.* **38** 3616–3622
- [26] Sakovich S Yu 1999 Coupled KdV equations of Hirota–Satsuma type *J. Nonlin. Math. Phys.* **6** 255–262
- [27] Sakovich S Yu and Tsuchida T 2000 Symmetrically coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations: singularity analysis and integrability *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 7217–7226