

Lusternik-Schnirelmann type invariants for Menger manifolds

筑波大学数学系 川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)

位相空間 X の Lusternik-Schnirelmann category $\text{cat}(X)$ は次の様に定義される。

$$(a) \quad \text{cat}(X) = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} k \text{ 個の元から成る開被覆 } \mathcal{U} \text{ で、任意} \\ \text{の } U \in \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の中で可縮であるものが} \\ \text{存在する} \end{array} \right. \right\}$$

(もし上の様な $\mathcal{U}$ が存在しなければ $\text{cat}(X) = \infty$ とする)。

X が多面体なら上の定義に於ける $\mathcal{U}$ は " X の部分多面体から成る被覆" で置き換えて良い。定義から明らかな様に cat はホモトピー-不変量である。

この概念は Lusternik と Schnirelmann により多様体上の C^0 関数の臨界点の個数と下から評価する為に導入された ([LS]) が、その後初期の目的とは独立な研究対象となっている。

例. (1) X が可縮なら $\text{cat}(X) = 1$.

(2) n 次元球面 S^n に対し $\text{cat}(S^n) = 2$.

(3) 実射影空間 RP^n に対し, $\text{cat}(RP^n) = n+1$.

(4) 一般にコンパクト 多面体 X に対し, $\text{cat}(X) \leq \dim X + 1$
(連結)

以下特に断わらない限り空間は全て連結とする。cat の一つの変形として次の様な量を考えることができる。コンパクト多面体 X に対し、

$$(b) \quad \text{gcat}(X) = \min \left\{ k \mid \begin{array}{l} k \text{ 個の、それ自身可縮な部分多面体} \\ \text{から成る } X \text{ の被覆が存在する} \end{array} \right\}.$$

ところ以上の gcat はホモトピー不変量ではなく、実際 $\text{gcat} X$ と $\text{gcat}(X \times [0,1])$ が大きく異なる様なコンパクト多面体 X の例が知られている ([CM]). 従って $\text{gcat}(X)$ を計算する事は $\text{cat}(X)$ を計算する事に比べて一般に難しいと考えられる。

この様な状況は Hilbert cube 多様体 (以下 Q -多様体と呼ぶ。 $Q = [0,1]^\omega$) の中に於いては大分異なっている。 Q -多様体 M に対し、

$$(c) \quad \text{gcat}_{Q \times [0,1]}(M) = \min \left\{ k \mid \begin{array}{l} k \text{ 個の元から成る開被覆で、各元} \\ \text{が } Q \times [0,1] \text{ と同相なものが存在する} \end{array} \right\}$$

と置く。この時次が成立する。

定理 (Montejano [M]). M がコンパクト Q -多様体とすると、

$$\text{cat}(M) = \text{gcat}_{Q \times [0,1]}(M) - 1.$$

定理 (Wong [W]). M は $\mathbb{Q}$ -多様体 とすると、

$$\text{cat}(M) = \text{gcat}_{\mathbb{Q} \times [0,1]}(M \times [0,1]).$$

$(2n+1)$ 次元立方体 I^{2n+1} を自然に胞複体 K_0 と見なし、各辺を三等分して得られる 3^{2n+1} 個の立方体の集合を βK_0 とする。

$K_1 = \{e \in \beta K_0 \mid e \cap K_0^{(n)} \neq \emptyset\}$ ($K_0^{(n)}$ は K_0 の n 骨格), $I_1 = \bigcup K_1$ とおく。各 $e \in K_1$ の各辺を三等分して得られる立方体を全て集めた集合を βK_1 とおき、

$K_2 = \{e \in \beta K_1 \mid e \cap K_1^{(n)} \neq \emptyset\}$, $I_2 = \bigcup K_2$ とする。これを繰り返して、単調減少列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ が得られるので、 $\mu^n = \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$ とおき、 n 次元 universal Menger compactum と呼ぶ。各点 $x \in \mu^n$ と同様な近傍を持つ様な局所コンパクト可分距離空間を n 次元 Menger 多様体 (以下 μ^n -多様体) と呼ぶ。

μ^n -多様体の理論 (例えば [B], [ChkT] 等と参照) の、 $\mathbb{Q}$ -多様体の理論の有限次元版としての側面は、現在では非常に良く整備されている。上述の Montejano, Wong の結果において重要な役割を果たす $\mathbb{Q}$ -多様体の "安定性" も、 μ^n -多様体の理論に於ける対応物を持っている。従ってこれらの結果が μ^n -多様体に対してはどのような形で成立するかと問うのは自然であろう。この問いに対して筆者の得た結果を報告する。

以下空間は全て局所コンパクト可分距離空間とする。

まず初めに Q -多様体と μ^n -多様体の理論の中で対応する概念をいくつか挙げる。

Q -多様体	μ^n -多様体
• (単純) ホモトピー • コンパクト多面体 P に対し、 $P \times Q$ は Q-多様体 • Q-多様体 = 局所コンパクト $ANR + DD^n P (\forall n \geq 1)$ • $Q =$ 可縮な Q-多様体 • $Q \times [0, 1)$ • $M \times [0, 1)$	• $(n-1)$ ホモトピー • コンパクト多面体 P に対し、 P と同じ $(n-1)$ ホモトピー形を持つ μ^n-多様体が存在 • μ^n-多様体 = 局所コンパクト n 次元 LC^{n-1} 距離空間 + $DD^n P$ • $\mu^n = (n-1)$ 連結な μ^n-多様体 • $\mu^n \sim \{\text{a point}\}$ • $Ker_{n-1}(M)$

上の表に現われたいくつかの概念を定義してみよう。

定義. $f, g: X \rightarrow Y$ が k -ホモトピック であるとは、任意の k 次元以下の空間 K と任意の $\alpha: K \rightarrow X$ に対し、 $f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$ であることである。 k -ホモトピー同値等も自然に定義される。

定義. 空間 X が $DD^n P$ を持つ とは、任意の $\alpha, \beta: [0, 1]^n \rightarrow X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\alpha', \beta': [0, 1]^n \rightarrow X$ が

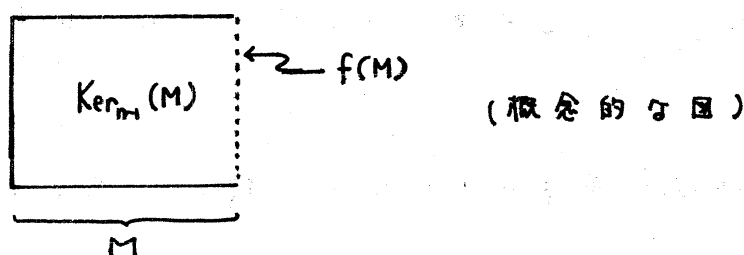
$$d(\alpha, \alpha') < \varepsilon, d(\beta, \beta') < \varepsilon, \alpha'([0, 1]^n) \cap \beta'([0, 1]^n) = \emptyset$$

を満たす様々を取れることである。

定義. M は μ^n -多様体, $f: M \rightarrow M \in M$ をそれ自身への埋め込みで次の条件を満たすものとする: $\forall \varepsilon > 0 \exists d: M \rightarrow M$ s.t. $d(d, Id_M) < \varepsilon$ かつ $d(M) \cap f(M) = \emptyset$.

この時 $M \setminus f(M)$ (同相を除いて) f の取り方に依存せず、これを

(n-1) ホモトピー-核 と呼ぶ ($Ker_{n-1}(M)$ で表わす). ([Ch]).



μ^n -多様体における

上の対応表から見て、(a)に対応する適切な category notion は次のものである ([F] 参照).

$$(d) \quad cat_{n-1}(X) = \min \left\{ k \mid \begin{array}{l} k \text{ 個の元から成る開被覆 } \mathcal{U} \text{ で任意の} \\ \mathcal{U} \in \mathcal{U} \text{ に対して } \mathcal{U} \hookrightarrow X \text{ が定値写像と} \\ (n-1)\text{-ホモトピーックであるものが存在} \\ \text{する} \end{array} \right\}$$

また (c) に対応するものとして、 μ^n -多様体 M に対し $gcat_{\mu^n}(M)$ と次の様に定義する。

$$(e) \quad gcat_{\mu^n}(M) = \min \left\{ k \mid \begin{array}{l} k \text{ 個の元から成る開被覆で、各元} \\ \text{が } \mu^n\text{-球と同相なものが存在する} \end{array} \right\}$$

これらについて次の成立する。

定理. M はコンパクト μ^n -多様体とする. この時

$$\begin{aligned} \text{cat}_{n-1}(M) &= \text{gcat}_{\mu^{n-1}}(M) - 1 \\ &= \text{gcat}_{\mu^{n-1}}(\text{Ker}_{n-1}(M)). \end{aligned}$$

系. M はコンパクト μ^n -多様体とし, $M = U \cup V$, U, V は M の開集合で μ^{n-1} と同相. と仮定する. この時 M は μ^n と同相である.

注) 上の系は位相多様体における次の結果の類似である.

「 M は位相多様体, $M = U \cup V$, U, V は M の開集合で $\mathbb{R}^n$ と同相. と仮定する. M がコンパクトなら M は S^n と同相である。」

この定理がそうである様に, 上の系と Brown の "Monotone union theorem" の類似物から証明することも可能である.

参考文献

[B] M. Bestvina, Characterizing k -dimensional universal Menger compacta, Mem. Amer. Math. Soc. 71 (1988), #380.

[CM] M. Clapp - L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category and minimal covering with contractible sets, Manuscripta Math. 58 (1987), 603-620.

[Ch] A. Chigogidze, Classification of Menger manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 825-832.

- [ChKT] A. Chigogidze, K. Kawamura and E.D. Tymchatyn, Menger manifolds, in Continua with Houston Problem Book, Marcel Dekker (1995), 27-88.
- [F] R.H. Fox, On Lusternik-Schnirelmann category, Ann. of Math. 42 (1941), 333-370.
- [M] L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category and Hilbert cube manifolds, Top. Appl. 27 (1987), 29-35.
- [W] R. Wong, A Hilbert cube LS category, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 720-722.
- [LS] L. Lusternik-L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels Herman et Cie, Paris (1934).