

極小葉層について

東北大理 押切 源一

1. 最近、Sullivan [1] は、閉多様体上の foliation に対して、各 leaf を極小部分多様体とするようなリーマン計量が存在するための必要十分条件を与えた。§2 ではこの結果を簡単に紹介する。余次元 1 の foliation $\mathcal{F}$ が non-exponential growth な leaf をもつことと、自明でない $\mathcal{F}$ -invariant measure が存在することとは同値であることが知られているし、この場合はかなり研究されている。しかし、 $\mathcal{F}$ -invariant measure が存在しない場合はあまりわかっておらず、前の場合のようにホモロジカルな議論も適用できないため、例えば、 S^{2n+1} , $n \geq 2$, 上に余次元 1 の C^∞ foliation で、 $\mathcal{F}$ -invariant measure をもたないものが存在するかどうかもわかっていない。Sullivan-Rummler の結果から、この場合は適当なリーマン計量で $\mathcal{F}$ の leaves は極小部分多様体とみなせるので、こういう観点から foliation の構造を調べるのも興味深いことのように思われる。§3 では、リ

一マン計量を与えた時に余次元1の C^∞ foliationがどうなっているかということを簡単な場合に考える。ここでの計量に関する条件は、リッチ曲率が非負という条件で、この場合極小葉層は全測地的で、foliationが現われるのは平坦な部分にしかないことがわかる。証明は、良く知られた Bochner のテクニックを使うだけの elementary な議論で済む。いろいろな曲率に非正や非負の条件をつけたときに、極小葉層や全測地的葉層が「単純」になっているかどうかは、今の所完全にはわかっていない。

以下ではすべて C^∞ として考える。

2. Sullivan-Rummler の定理 [1].

多様体 M の次元を $n = p + q$ とする。

[定義 1] $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が M^n 上の余次元 q (又は、 p 次元) の foliation とは、

- 1) L_α は M の弧状連結な部分集合.
- 2) $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ ($\alpha \neq \beta$) で $\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha = M$.
- 3) M^n の各点 p に対して次のような chart (U, φ) がとれる.
 - a) $p \in U$, $\varphi: U \xrightarrow{\cong} D^p \times D^q \subset \mathbb{R}^n$, D^k は $\mathbb{R}^k$ の開単位球.
 - b) $U \cap L_\alpha \neq \emptyset$ な s . $\varphi(U \cap L_\alpha)$ の連結成分は

$$\{ (x_1, \dots, x_n) \in D^p \times D^q; x_{p+1} = c_{p+1}, \dots, x_n = c_n \}.$$

と表わされる。ここで、 $C_{p+1}, \dots, C_n$ は各連結成分によって決まる定数。

以下、 M は向きづけられた閉多様体とし、 $\mathcal{F}$ の各 leaf も定義 1.(3),(b) に両立するような向きをもつと仮定する。

$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda=1}^l$ を定義 1.(3) のような charts による M の有限被覆で、次を満たすものとする (いつでもとれる)。

1) 各 λ に対して定義 1.(3),(b) を満たす chart $(V_\lambda, \psi_\lambda)$ で、 $\bar{U}_\lambda \subset V_\lambda$, $\psi_\lambda: V_\lambda \xrightarrow{\cong} D_\lambda^p(2) \times D_\lambda^q(2)$, $\psi|_{U_\lambda} = \varphi_\lambda$ を満たすものがとれる。ここで、 $D^*(2)$ は半径 2 の開球。

2) $x \in D_\lambda^q$ に対して、 $P_\lambda(x) := \varphi_\lambda^{-1}(D_\lambda^p \times \{x\})$ とおくとき、任意の μ に対して、 $P_\lambda(x) \cap P_\mu(y) \neq \emptyset$ なる $y \in D_\mu^q$ は高々一個しか存在しない。 $P_\lambda(x)$ を *plaque* という。

このとき、 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ なら、local diffeom. $\gamma_{\lambda\mu}: D_\lambda^q \times \{0\} \rightarrow D_\mu^q \times \{0\}$ が次のようにして定義できる；

$$\gamma_{\lambda\mu}(x) = y, \quad \text{ここで} \quad P_\lambda(x) \cap P_\mu(y) \neq \emptyset.$$

[定義 2] $X := \coprod_{\lambda=1}^l D_\lambda^q$ (disjoint union) とおく。

1) $\Gamma: \gamma_{\lambda\mu}$ から生成される X 上の pseudogroup. これを holonomy pseudogroup という。

2) μ が $\mathcal{F}$ -invariant measure とは、 X 上の非負 Borel measure で、各コンパクト集合上で有限の値をとり、次の意味で Γ -

不変のものをいう; $S \subset X$ が可測で、 $\gamma \in \Gamma$ に対して $S \subset \text{Dom}(\gamma)$ ならば、 $\mu(S) = \mu(\gamma(S))$.

3) Z_μ : $\mathcal{F}$ -invariant measure μ から定まる foliation cycle. とは p -form φ に対して

$$\langle Z_\mu, \varphi \rangle = \sum_{\lambda=1}^l \int_{D_\lambda^p} \left(\int_{\{*\} \times D_\lambda^p} f_\lambda \varphi \right) d\mu(*)$$

を対応させる p -current をいう。ここで $\{U_\lambda\}_{\lambda=1}^l$ は上で得られた M の被覆, $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^l$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda=1}^l$ に従属した 1 の分解、 $D^p \times D^p$ と D^p の向きは各々 M , $\mathcal{F}$ の向きから得られたものとする。

Z_μ は、 $\{U_\lambda\}$ や $\{f_\lambda\}$ によらず μ によってのみ定まる。また、 Z_μ は closed current になっている。

<例> $L \in \mathcal{F}$ をコンパクトな leaf とするとき、

$$\mu_L(S) = \#(S \cap L), \quad S \subset X \quad (X \subset M \text{ とみなして})$$

で $\mathcal{F}$ -invariant measure μ_L が定義できる。 Z_{μ_L} を μ_L に対応する foliation cycle とすると

$$\langle Z_{\mu_L}, \varphi \rangle = \int_L \varphi$$

が成り立つ。

[定義3] (cf. [1], [3]) $\mathcal{D}_p$ で C^∞ - p -forms 全体, $\mathcal{D}'_p$ で p -currents 全体を表わすことにする。 $\mathcal{D}_p, \mathcal{D}'_p$ は局所凸線型位相空間で、しかも Montel 空間 (有界集合はフレコンパクト) で

あり、互いに双対になっていることをまず注意しておく。

1) C^∞ 写像 $f: N \rightarrow (M, \mathcal{F})$ が $\mathcal{F}$ -tangent とは、任意の $x \in N$ に対して $(df)_x(T_x N) \cup T_{f(x)} \mathcal{F} = (df)_x(T_x N) + T_{f(x)} \mathcal{F}$ が $T_{f(x)} M$ において成り立つことをいう。

2) $\mathcal{F}$ -tangent $(p+1)$ -chains の境界全体からなる空間の $\mathcal{D}_p'$ における closure を $\mathcal{S}$ で表わす。これは $\mathcal{D}_p'$ の閉部分空間になっている。 $(M, \mathcal{F})$ が homologically taut とは、自明でない $\mathcal{F}$ -invariant measure μ に対して、 $\mathcal{Z}\mu \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ が成り立つことをいう。

3) $(M, \mathcal{F})$ が geometrically taut とは、 M 上にリーマン計量が存在して、 $\mathcal{F}$ の各 leaf が極小部分多様体となるときをいう。

Remark, “homological tautness” は次のような幾何学的意味をもつ。

[定理 (Rummler [3])] $(M, \mathcal{F})$ のすべての leaves がコンパクトとすると、homologically taut であるための必要十分条件は、 $\{\text{vol}(L); L \in \mathcal{F}\}$ が有界集合になることである。

次がこの節の目標の定理である。

[定理 (Sullivan-Rummler [1])] $(M, \mathcal{F})$ に対して homological tautness と geometrical tautness は同値。

(証明の概略)

1. (Rummler) リーマン計量 g を与えておく。 M^n 上の p -form

$\chi_{\mathcal{F}}$ を、 $\chi_{\mathcal{F}}(\eta_1, \dots, \eta_p) := \det(\langle \xi_i, \eta_j \rangle)$, $\eta_i \in T_x M$ で定義する。ここで、 $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ は $T\mathcal{F}$ の向きづけられた正規直交局所基底。このとき、 $\mathcal{F}$ が $\mathfrak{g}$ で極小葉層になるための必要十分条件は、 $\eta_1, \dots, \eta_{p+1}$ の p 個が $T\mathcal{F}$ に属するなら $d\chi_{\mathcal{F}}(\eta_1, \dots, \eta_p) = 0$ ということである。(このような p -form を $\mathcal{F}$ -closed という。)

2. Purification. V を n 次元ベクトル空間、 F を V の p 次元部分空間で、向きづけられているものとする。 F の向きづけられた基底を $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ とする。 ω は V 上の p -form で、 F 上正、即ち、 $\omega(\xi_1, \dots, \xi_p) > 0$ なるものとする。Purification とは、このような ω に対し、次のようにして新しい p -form $\tilde{\omega}$ を構成することを用いる。まず射影 $P_\omega: V \rightarrow F$ を

$$P_\omega(v) \wedge (\omega/F) = (v \wedge \omega)/F$$

で定義する。ここで $\cdot/F$ は F への制限、 $\wedge$ は contraction を表わす。 p -form $\tilde{\omega} := P_\omega^*(\omega/F)$ を ω の purification という。

3. p -vector v に対して、Dirac current $\delta_v \in \mathcal{Q}'_p$ を

$$\delta_v(\varphi) := \varphi(v) \quad , \quad \varphi \in \mathcal{Q}_p$$

で定義する。また、 $\mathcal{F}$ の structure currents からなる cone を

$$C_{\mathcal{F}} := \mathcal{Q}'_p \text{ の中の closed convex cone spanned by } \{\delta_v; v \in \bigcup_{x \in M} \wedge^p_+ T_x \mathcal{F}\}$$

で定義する。このとき

[定理 (Sullivan [4])] $\mathcal{Z}_p = \{\text{closed } p\text{-currents}\}$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{(M, \mathcal{F}) \text{ の foliation cycles}\}$ とおくと、 $C_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{Z}_p = \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ で、 $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ はコン

パクトな cone になっている。

(hom. tant $\Rightarrow$ geom. tant) 仮定と 3 の定理より $C_{\mathcal{F}} \cap S = \{0\}$.
Hahn-Banach の定理によって、 $\varphi(C_{\mathcal{F}} - \{0\}) > 0$, $\varphi(S) = 0$ となる
p-form φ が存在する。 φ は $\mathcal{F}$ 上正で、 $\mathcal{F}$ -closed になっている。
各点 $z \in M$ ごとに φ に purification をして得られた M 上の p-form
を $\tilde{\varphi}$ とすると、 $\tilde{\varphi}$ は C^∞ であり、 $\mathcal{F}$ 上正、 $\mathcal{F}$ -closed、しかも、
 $\{\text{Ker } P_W\} \subset TM$ は C^∞ -subbundle になっている。 M 上のリーマン
計量 g を、 $\tilde{\varphi}|_{T\mathcal{F}}$ が $T\mathcal{F}$ 上の volume form になり、 $T\mathcal{F}$ と
 $\{\text{Ker } P_W\}$ が直交するように定める。この g に関する $\chi_{\mathcal{F}}$ が $\tilde{\varphi}$
になっている。 $\tilde{\varphi}$ が $\mathcal{F}$ -closed であることから、1 より g が求
める計量であることがわかる。

(geom. tant $\Rightarrow$ hom. tant) そうでないと仮定すると、ある
foliation cycle $Z \neq 0$ に対して、 $\mathcal{F}$ -tangent $(p+1)$ -chains からなる列
 $\{C_m\}$ で $\partial C_m \rightarrow Z \ (m \rightarrow \infty)$ in $\mathcal{D}_p'$ なるものが存在する。
仮定によって、あるリーマン計量 g をとると $\chi_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ 上正か
つ $\mathcal{F}$ -closed。 $\partial C_m \rightarrow Z$ より $\langle \partial C_m, \chi_{\mathcal{F}} \rangle \rightarrow \langle Z, \chi_{\mathcal{F}} \rangle$ で
あるが、 $\chi_{\mathcal{F}}$ が $\mathcal{F}$ -closed より $\langle \partial C_m, \chi_{\mathcal{F}} \rangle = \langle C_m, d\chi_{\mathcal{F}} \rangle = 0$ 。
また、 $\mathcal{F}$ 上正より $\langle Z, \chi_{\mathcal{F}} \rangle > 0$ 。よってこれは矛盾。 g.e.d.

特に、余次元 1 の場合は次のようになる。

(系 [1]) $(M, \mathcal{F})$ が geometrically tant であるための必要

十分条件は、各コンパクトな leaf に対して、それと交わる閉横断線が存在することである。

(証明) リーマン計量 g で $\mathfrak{F}$ が極小葉層になったとすると、 $\mathfrak{F}$ に直交する M 上の単位ベクトル場 X は、 $\operatorname{div}(X)=0$ を満たす。Poincaré の巡回定理より、 X の軌道は、 M 上の null-set を除いて non-wandering。よって、各コンパクトな leaf に対して、それと少なくとも 2 度交わる X の軌道が存在する。これから求める閉横断線が得られる。

逆を示すには、 $\mathcal{S} \subset \{\text{exact currents}\}$ より、 $\mu \neq 0$ に対して、 $[\mathcal{Z}_\mu] \neq 0$ を示せばよい。 $\operatorname{supp}(\mu) \cap L$: non-compact な S 、いつでも L と交わる閉横断線がとれるから、 $[\mathcal{Z}_\mu] \neq 0$ 。 $\operatorname{supp}(\mu)$ がコンパクトな leaf のみからなるときは、仮定より $[\mathcal{Z}_\mu] \neq 0$ 。 $\neq$

3. 極小葉層について。

ここでは、リーマン計量 g を与えた場合、余次元 1 の極小葉層がどうなっているかを簡単な場合に考えてみたい。以下、 $(M^{n+1}, \mathfrak{F}, g, N)$ は次のようなものの組とする； M^{n+1} は向きづけられた $(n+1)$ -次元閉多様体， $\mathfrak{F}$ は向きづけられた余次元 1 の foliation， g は M 上のリーマン計量， N は M 上の単位ベクトル場で $\mathfrak{F}$ に直交するもの。

全測地的葉層の時は、例えば次の結果がある。

[定理 (cf. Tanno [5])] $(M, \mathcal{F}, g, N)$ が全測地的葉層で、 (M, g) の断面曲率が非正又は非負とすると、 N は平行ベクトル場である。

この節では次を示す。

[定理] $(M, \mathcal{F}, g, N)$ が極小葉層で、 (M, g) のリッチ曲率が非負とすると、 N は平行ベクトル場である。特に、 N の flow は $\mathcal{F}$ を保つ。

(証明) 次の形の Green の公式を用いる。

$$(*) \quad \int_M \text{Ric}(X, X) dM + \int_M \text{Trace}(A_X^2) dM - \int_M (\delta X)^2 dM = 0.$$

ここで、 $\delta X := -\text{div}(X)$ 、 A_X は $A_X(V) = \nabla_V X$ で定義される $(1, 1)$ テンソル。

1st $\mathcal{F}$ は全測地的。

$T\mathcal{F}$ 上の $(1, 1)$ テンソル $\bar{A}$ を

$$(\bar{A})_x(V) := \nabla_V N, \quad V \in T_x \mathcal{F}, \quad (\bar{A})_x: T_x \mathcal{F} \longrightarrow T_x \mathcal{F}.$$

で定義すると、 $\text{Trace}(A_N^2) = \text{Trace}(\bar{A}^2) \geq 0$ が成り立つ。しかも、 $\mathcal{F}$ は極小葉層であるから、 $\delta(N) = 0$ 。よって (*) から、

$$\int_M \text{Ric}(N, N) dM + \int_M \text{Trace}(\bar{A}^2) = 0.$$

仮定より、 $\text{Ric}(N, N) \geq 0$ だから、左辺は恒等的に 0 でなくてはならない。よって、 $\text{Ric}(N, N) \equiv 0$ 、 $\text{Trace}(\bar{A}^2) \equiv 0$ 。特に、 $\bar{A} \equiv 0$ で、 $\mathcal{F}$ は全測地的となる。

2nd $\text{Trace}(A_{\nabla N}^2) \geq 0.$

ベクトル場 N , ∇N に対応する 1-forms を ω , θ とすると $d\omega = \omega \wedge \theta$ が成り立つ。 $\{E_1, \dots, E_n, N\}$ を TM の向きづけられた正規直交局所基底とすると、このことから

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla N, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_j} \nabla N, E_i \rangle$$

が成り立つ。よって

$$\text{Trace}(A_{\nabla N}^2) = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla N, E_j \rangle \cdot \langle \nabla_{E_j} \nabla N, E_i \rangle + \langle \nabla_N \nabla N, N \rangle^2$$

で求める結果が得られる。

3rd N は平行ベクトル場。

1st より、 $\nabla N = 0$ を示せばよい。 1st で $\text{Ric}(N, N) \equiv 0$ を示したが、これから $\delta(\nabla N) \equiv 0$ がわかる。 $X = \nabla N$ として (*) を用いると

$$\int_M \text{Ric}(\nabla N, \nabla N) dM + \int_M \text{Trace}(A_{\nabla N}^2) = 0.$$

2nd と $\text{Ric} \geq 0$ より、 $\text{Trace}(A_{\nabla N}^2) \equiv 0$ で、 $\nabla N = 0$ がわかる。

N の flow が子を保つのは、 $L_N \omega = 0$ より明らか。 g.e.d.

M を non-compact にすると、上の定理はもちろん成り立たない。

定理の仮定の下では、Cheeger-Gromoll の分解定理 [6] によって、 (M, g) の普遍被覆空間 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ は

$$(\tilde{M}, \tilde{g}) \cong (\bar{M}, \bar{g}) \times (\mathbb{R}^k, g_0)$$

と分解される。ここで、 $\bar{M}$ は単連結でコンパクトな多様体、 g_0 は $\mathbb{R}^k$ の標準的な計量。これを用いると次を得る。

(系) $(\tilde{M}, \tilde{\alpha}, \tilde{g}, \tilde{N})$ を (M, α, g, N) の $\tilde{M}$ への自然な持ち上げとすると、 $(\tilde{M}, \tilde{\alpha}) \cong \bar{M} \times (\mathbb{R}^k, \alpha_0)$ 。ここで、 α_0 は $\mathbb{R}^k$ の超平面からなる全測地的葉層。

(証明)

$$\tilde{N} = X + Y, \quad X \in P(TM), \quad Y \in P(T\mathbb{R}^k)$$

と分解するとき、 $X \equiv 0$ を示せばよい。 $X \neq 0$ ならば、ある点 $y \in \mathbb{R}^k$ に対して、 $X|_{\bar{M} \times \{y\}}$ は $\bar{M} \times \{y\}$ 上の平行ベクトル場で、しかも零ベクトル場ではない。しかし、 $\bar{M}$ は単連結でコンパクトだからこれは起こり得ない。

REFERENCES

1. D. Sullivan: A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces. *Comment. Math. Helv.* 54 (1979) 218-223.
2. J. F. Plante: Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. of Math.* 102(1975) 327-361.
3. H. Rummier: Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts. *Comment. Math. Helv.* 54(1979) 224-239.
4. D. Sullivan: Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Inventiones math.* 36 (1976) 225-255.
5. S. Tanno: A theorem on totally geodesic foliations and its applications. *Tensor, N.S.* 24(1972) 116-122.
6. J. Cheeger & D. Gromoll: The splitting theorem for manifold of non-negative Ricci curvature. *J. of Diff. Geom.* 6 (1971) 119-128.