

On a characteristic property of periodic entire functions

京都教育大 占部 博信.

定数 $c (\neq 0)$ に対して、次の様な整函数族 $G(c)$ を考える。

$$G(c) \equiv \left\{ f(z) = h(z) + H(z); \quad h, H \text{ は非定数整函数} \right. \\ \left. \text{で、} H(z+c) \equiv H(z) \text{ かつ 位数 } \rho(h) < 1 \right\}.$$

この函数族は Baker-Gross [1] において考えられたものと同じであり、 $J(c)$ (上で $h(z)$ が一次の多項式の場合) 等と共に、整函数の合成を演算とした分解の問題に関し、興味ある函数族である ([1], [7] 等参照)。

このとき、

定理 1. 定数 $c_j (\neq 0, j=1, 2)$ に対して、 $f(z) \in G(c_1)$, $g(z) \in G(c_2)$ とし、重複度も込めて、 $f(z) = 0 \iff g(z) = 0$ が、収束指数が 1 より小である点列集合を除いて、成立しているとは定する。このとき、ある定数 $c (\neq 0)$ が存在して、

$$f(z) \equiv c \cdot g(z)$$

であり、かつ、 c_1/c_2 は有理数である。

今、 $f(z) \in G(b_1)$, $g(z) \in G(b_2)$ を

$$f(z) = h(z) + H(z), \quad g(z) = k(z) + K(z),$$

$H(z+b_1) \equiv H(z)$, $K(z+b_2) \equiv K(z)$, 位数 $\rho(h) < 1$ か $\rho(k) < 1$ と表わすと、定理1の後半の条件は、関係式

$$(1) \quad h(z) + H(z) = (k(z) + K(z)) \cdot R(z) \cdot e^{p(z)}$$

が、ある有理型函数 $R(z)$ ($\neq 0$, 位数 $\rho(R) < 1$) と、ある整函数 $p(z)$ に対して成立していることを意味している。示すべきことは、 $R(z)$ も $p(z)$ も共に定数であることである。そうすれば必然的に b_1/b_2 は有理数でなければならぬことが簡単にわかる。

定理1において、さらにもし、ある z_0 に対して、 $f(z_0) = g(z_0) \neq 0$ であれば、 $f(z) \equiv c \cdot g(z)$ において、 $c = 1$ となり、 $f(z) \equiv g(z)$ が結論される。従って、定理1は、有理型函数についての Nevanlinna の *unicity theorems* ([4] p. 121~128) との関連を言えば、 $G(b)$ に属する函数はその零点集合でほぼ決まることを主張している。

ここで、「非定数周期整函数 $F(z)$ は、不動点 ($F(z) - z$ の零点) を常に無限個持つ。」という Gross [2] の結果を想起したい。不動点は、整函数の合成や *iteration* の理論においても重要な役割を持つ。ところで、定理1より容易に導かれる次

事実、「周期整函数は、(重複度を込めた)不動点の集合で一意的に定まる」ことを示している。

定理 2. $H_j(z)$ ($j=1, 2$) をそれぞれ ℓ_j ($\neq 0$, 定数) を周期とする周期整函数とし、 $H_1(z)$ の不動点の集合 (重複度込み) と、 $H_2(z)$ のそれとが、収束指数が 1 より小である点列集合を除いて、一致したと仮定する。このとき、

$$H_1(z) \equiv H_2(z)$$

ひかつ、 ℓ_1/ℓ_2 は有理数である。

[注意]. 上の結果は、多変数の整函数の場合に、直接的に一般化が可能である。例として、2変数の場合を述べてみよう。そのために、定数 $\ell, \ell' (\neq 0)$ に対して、整函数族

$$G(\ell, \ell') \equiv \left\{ F(z, w) = f(z) + g(w); \right. \\ \left. f(z) \in G(\ell) \text{ かつ } g(w) \in G(\ell') \right\}$$

を考える。このとき、次のことがわかる。

定数 ℓ_j, ℓ'_j ($\neq 0, j=1, 2$) に対して、 $F(z, w) \in G(\ell_1, \ell'_1)$ かつ、 $E(z, w) \in G(\ell_2, \ell'_2)$ とし、もし、2変数 z, w の整函数 $p(z, w)$ が存在して、関係式

$$F(z, w) \equiv E(z, w) \cdot e^{p(z, w)}$$

が成立したとすれば、 $p(z, w)$ は定数であり、かつ、 $\ell_1/\ell_2, \ell'_1/\ell'_2$ は共に有理数である。

定理1の証明には、次の様な Borel 型の *unicity theorem* が使われる (cf. [5])。

補題 A. $G_j(z)$ は超越整函数、 c_j は定数 ($\neq 0$)、 $g(z)$ は整函数 ($\neq 0$) で、条件: $T(r, g) = o(T(r, G_j))$, $r \rightarrow \infty$ ($j=1, \dots, n$) を満たすとする。このとき、

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot G_j(z) \equiv g(z) \Rightarrow \sum_{j=1}^n \delta(0, G_j) \leq n-1$$

が成立する。但し、 $T(r, *)$, $\delta(a, *)$ は Nevanlinna 特性函数及び deficiency を表わす。

また、簡単であるが、次の事実も利用される。

補題 B. $w(z)$ は位数 $\rho(w) < 1$ なる有理型函数とし、定数 $b (\neq 0)$ と c に対して、

$$w(z+b) \equiv e^c \cdot w(z)$$

を満たせば、 $w(z)$ は定数である。

実際、 $w(z)$ が補題 B の仮定を満たせば、

$$F(z) = w(z) \cdot \exp\left[-\frac{c}{b}z\right]$$

を考えると、 $F(z+b) \equiv F(z)$ が成立する。もし、 $w(z)$ が定数でなければ、 $\rho(w) < 1$ ゆえ、 $w(z)$ は零点か極を持つ。そうすると $F(z)$ の周期性より、 $w(z)$ の零点か極の収束指数は ≥ 1 、従って、 $\rho(w) \geq 1$ となり矛盾を生じる。

定理1の証明は非常に長いので、ここでは、 ℓ_1/ℓ_2 が有理数である特別な場合の証明を述べるだけにしたい。即ち、(1)の成立を仮定して、さらに、

$$(2) \quad \ell = m\ell_1 = n\ell_2 \quad (m, n \text{ は整数, } \neq 0)$$

があるとき、

$$(3) \quad p(z) \text{ と } R(z) \text{ は共に定数}$$

を示すことにする。

この場合、

$$(4) \quad H(z+j\ell) \equiv H(z), \quad K(z+j\ell) \equiv K(z)$$

が任意の自然数 j に対して成立している。そこで、さらに、

$$(5) \quad \begin{cases} h_j(z) = h(z+j\ell), & k_j(z) = k(z+j\ell), \\ R_j(z) = R(z+j\ell), & p_j(z) = p(z+j\ell) \end{cases}$$

とおく。

とすると、(4)と記号(5)に注意すると、(1)より

$$h_j - h = (k_j + K(z))R_j e^{p_j} - (k + K(z))R e^p$$

を得る。従って、

$$(6) \quad (R_j e^{p_j} - R e^p) K(z) = (h_j - h) - (k_j R_j e^{p_j} - k R e^p)$$

を得る。(6)式を $j=1, 2$ として使い、 $K(z)$ を消去すると、

$$R_2(h_1 - h) e^{p_2} + R_1 R_2 (k_2 - k_1) e^{p_1 + p_2} - R R_2 (k_2 - k) e^{p + p_2}$$

$$+RR_1(k_1-k)e^{p+p_1}-R_1(h_2-h)e^{p_1}+R(h_2-h_1)e^p=0$$

となるが、この関係式を e^{p_2} で割れば、

$$(7) \quad R_1R_2(k_2-k_1)e^{p_1}-RR_2(k_2-k)e^p+RR_1(k_1-k)e^{p+p_1-p_2} \\ -R_1(h_2-h)e^{p_1-p_2}+R(h_2-h_1)e^{p-p_2}=-R_2(h_1-h)$$

なる恒等式が得られる。ここで、

$$(8) \quad p(z) \neq \text{const.}$$

と仮定して、(7)より矛盾を導こう。そうするとまず、 $p(z)$ は定数じゃなかったことになる。

記号(5)と(8)より、 $p_1 \neq \text{const.}$ であるが、さらに

$$-R_2(h_1-h) \neq 0$$

であることに注意しよう。実際、 $R_2(z)=R(z+2b) \neq 0$ であり、また、 $h(z)$ は位数 $\rho(h) < 1$ なる非定数整函数ゆえ、補題Bにより、 $h_1(z)-h(z)=h(z+b)-h(z) \neq 0$ であるから。

従って、もし、

$$(9) \quad p-p_1, \quad p-p_2, \quad p+p_1-p_2 \neq \text{const.}$$

が示されれば、 $p_1-p_2 \neq \text{const.}$ であるから、補題Aを(7)式に適用すると、矛盾が生じることになる。但し、(7)式へ補題Aを適用する際、

$$(10) \quad R(z) = v(z)/u(z),$$

u, v は整函数, $\neq 0$, 位数 < 1 かつ 共通零点なしと表示できるから、共通分母を掛けておけばよいことに注意したい。

まず、(8)のもとで、自然数 j に対して、

$$(11) \quad p - p_j \neq \text{const.}$$

を示そう。そうでないとして、

$$(12) \quad p_j - p = \text{const.} = c \quad \text{即ち、} e^{p_j} \equiv e^c \cdot e^p$$

と仮定しよう。このとき

$$(13) \quad e^c R_j - R \neq 0$$

であれば、(6)式は

$$(14) \quad K(z) = \frac{h_j - h}{e^c R_j - R} \cdot e^{-p} - \frac{e^c k_j R_j - k R}{e^c R_j - R}$$

と書き替えられる。(4), (5)と(12)に注意すると、(14)より

$$\frac{h_j - h}{e^c R_j - R} = e^{-c} \cdot \frac{h_{2j} - h_j}{e^c R_{2j} - R_j}$$

$$\frac{e^c k_j R_j - k R}{e^c R_j - R} = \frac{e^c k_{2j} R_{2j} - k_j R_j}{e^c R_{2j} - R_j}$$

であり、補題 B により、

$$(h_j - h)/(e^c R_j - R) = \text{const.} = c' (\neq 0)$$

$$(e^c k_j R_j - k R)/(e^c R_j - R) = \text{const.} = c'' (\neq 0)$$

従って、

$$(15) \quad \begin{cases} h_j - h = c'(e^c R_j - R) \\ e^c k_j R_j - k R = c''(e^c R_j - R) \end{cases}$$

が導かれる。そこで、 $R = v/u$ と (10) のように置き、さらに、 $R_j = v_j/u_j$ ($u_j(z) = u(z+j\ell)$, $v_j(z) = v(z+j\ell)$) と書くと、(15) の上の式は、 $c'(e^c u v_j - u_j v) = u u_j (h_j - h)$ となり、この式を u で割ると、

$$(16) \quad -c' \cdot u_j v / u = u_j (h_j - h) - c' e^c v_j$$

と書き直せる。

(16) 式より $u(z) = \text{const.}$ がわかる。実際、 $u(z) \neq \text{const.}$ ならば、位数 $\rho(u) < 1$ ゆえ、 $u(z)$ は零点を持つ。ところで、 u と v は共通零点を持たないのて、 $u(z_0) = 0$ するとき、 $u_j(z_0) = 0$ 、i.e. $u(z_0 + j\ell) = 0$ となり、さらに、必要ならば変数を z から $z + j\ell$ に変えると、再び (16) 式より、 $u(z_0 + 2j\ell) = 0$ となる。これを繰り返すと、任意の自然数 m に対して、 $u(z_0 + mj\ell) = 0$ となる。従って、 $u(z)$ の零点の収束指数は 1 より小ではあり得ない。ゆえに位数 $\rho(u) \geq 1$ であることになるが、これは、 $\rho(u) < 1$ に反する。

$u(z) \equiv \text{const.}$ であるから (10) より $R(z) \equiv v(z)$ と仮定しても一般性を失わないであろう。このとき、(15) の下側の関係

式は、 $e^c k_j v_j - k v = c''(e^c v_j - v)$ 即ち、

$$(c'' - k) v \equiv e^c (c'' - k_j) v_j$$

となる。補題Bより、

$$(17) \quad (c'' - k) v = \text{const.}$$

が結論される。ところが、 k も v も整函数で、 $k \neq \text{const.}$ かつ $v \neq 0$ ゆえ、明らかに (17) は不合理である。従って、(13) は成立し得ないから、

$$e^c R_j - R \equiv 0$$

であることになり、再び補題Bにより、

$$R(z) = \text{const.} = c''' (\neq 0) \quad \text{かつ} \quad e^c = 1$$

である。ところがこの場合には (14) 式は

$$(18) \quad (h_j - h) e^{-p} - c''' (k_j - k) = 0$$

となる。ここで、 $h_j - h$, $k_j - k \neq 0$, $c''' \neq 0$ かつ、 $p \neq \text{const.}$ ゆえ (18) 式は成立し得ない。これは矛盾ゆえ、(11) が成立してゐなければならぬ。

次に、

$$(19) \quad p + p_1 - p_2 = \text{const.} = c$$

と仮定しよう。このとき、(19) を使って、(7) から p_2 を消すと、

$$\begin{aligned} & R_1 R_2 (h_2 - h_1) e^{p_1} - R R_2 (h_2 - h) \cdot e^p - e^c R_1 (h_2 - h) e^{-p} \\ & + e^c R (h_2 - h_1) e^{-p_1} + [e^c R R_1 (h_1 - h) + R_2 (h_1 - h)] = 0 \end{aligned}$$

を得るが、これを e^{p_1} で割ると、

$$(20) \quad -R R_2 (k_2 - k) e^{p-p_1} + [e^c R R_1 (k_1 - k) + R_2 (h_1 - h)] e^{-p_1} \\ - e^c R_1 (h_2 - h) e^{-p-p_1} + e^c R (h_2 - h_1) e^{-2p_1} = -R_1 R_2 (k_2 - k_1)$$

なる関係式が導かれる。ここで、前と同様に、 $-R_1 R_2 (k_2 - k_1) \neq 0$ であり、(8), (11) より、 $p - p_1, -p_1, -2p_1 \neq \text{const.}$ である。さらに、(19) より、 $-(p + p_1) = -p_2 - c \neq \text{const.}$ もわかる。従って、補題 A を (20) に適用することにより、(19) は正しくないことが結論される。

結局 (9) が示されたので、(8) が成立し得ない。即ち、

$$(21) \quad p(z) = \text{const.} = c \text{ (say)}$$

が示された。このとき、 $p_j = c$ であるから、(21) ならば、(6) 式は、

$$(22) \quad e^c (R_j - R) K(z) = (h_j - h) - e^c (k_j R_j - k R)$$

となる。

ところで、 $R_j - R$ 及び、(22) の右辺は共に位数 < 1 であって、 $K(z)$ は仮定より非定数周期整函数であり従ってその位数 $\rho(K) \geq 1$ ゆえ、もし $R_j - R \neq 0$ ならば、(22) の両辺の位数を比較して矛盾を生じる。ゆえに、 $R_j - R \equiv 0$ になければならない。従って、補題 B により、 $R(z) = \text{const.}$

結局、 $p(z)$ も $R(z)$ も定数であることが示されたことになる。

即ち、(3) が示された。

References.

- [1] Baker I.N. and Gross F., *Proc. Symp. Pure Math. Vol. 11* (1968), 30-35.
- [2] Gross F., *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 215-222.
- [3] Hayman W.K., *Meromorphic functions*, (Oxford, 1964).
- [4] Nevanlinna R., *Le théorème de Picard - Borel*, (Gauthier Villars, Paris, 1929).
- [5] Niino K. and Ozawa M., *Kodai Math. Sem. Rep.* 22 (1970), 98-113.
- [6] Ozawa M., *Ibid.* 28 (1977), 311-316.
- [7] Urabe H., *J. Math. Kyoto Univ.* 18 (1978), 95-120.
- [8] Urabe H., *Bull. Kyoto Univ. of Education Ser. B.* 51 (1977), 1-4.
- [9] Urabe H. and Yang C.-C., *Proc. Japan Acad. Ser. A.* 54 (1978), 142-144.