

不動点定理と一般均衡理論：最近の発展

東京都立大学 西村和雄

Kazuo Nishimura

(1) はじめに

以下では、簡単化の為に純粋交換モデルを用いることにする。 P' , x , w^i を 価格, それぞれ n 次元の消費量, 初期保有量ベクトルとする。 i 消費者は, quasi-concave で continuous な効用関数 $u^i(x)$ を最大化する問題

$$\begin{aligned} \text{Max } u^i(x) \\ \text{s.t. } Px \leq P \cdot w^i \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

を解いて、需要 $x^i(P)$ を定める。消費者全体について、 $x^i(P) - w^i(P)$ の総和をとると 超過需要

$$z(P) = \sum_i x^i(P) - \sum_i w^i(P)$$

が得られる。 P が与えられると $z(P)$ は、一般に凸集合となる。また

$$(i) \quad \text{Walras' law} \quad P \cdot z(P) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Homogeneity of degree zero} \quad z(\lambda P) = z(P), \lambda > 0$$

が満たされる。ここで均衡価格, 即ち

$$z(P) \leq 0$$

をみたす価格の存在を証明する為に 角谷の不動点定理を用いるというのが従来の方法であった。

(2) 選好関係

R を

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x R y$$

と定義することにして、効用関数で表わされる選好関係の性質をとり出してみると

- ① Completeness $x R y$ or $y R x$
- ② transitivity $x R y$ & $y R z \Rightarrow x R z$ が、任意の (x, y) あるいは (x, y, z) について成り立つ。

更に効用関数の quasi-concavity と continuity は、

(i) $R(x) = \{y \mid y R x\}$ が閉集合

(ii) $R^{-1}(x) = \{y \mid x R y\}$ が閉集合

(iii) $R(x)$ が凸集合

を意味する。

(3) 一般化

効用関数を用いずに 直接選好関係から出発する接近方法をとることによって、上記の ①②, (i)-(iii) を弱めてゆこう。いま X を財の空間として、 $x, y \in X$ に対し $x R y$ ならば x は y より選好されるか無差別であるとする。また、 $x R y$ の否定すなわち $\neg x R y$ が成り立つとき、 $y P x$ と書く。R の completeness を仮定せずに、 X の部分集合 B 上の maximal

elements の集合

$$M(B) = \{x \in B \mid \sim y P x \quad \forall y \in B\}$$

と定義する。このとき

(補題) 任意の $x \in X$ に対して, $P^{-1}(x) = \{y \in X \mid x P y\}$ が開集合で, B が compact で $B \neq \emptyset$ とする。このとき, B の任意の有限集合 $\{x^1, \dots, x^k\}$ が極大元をもつなら, $M(B) \neq \emptyset$ である。

証明 $M(B) \neq \emptyset$ と仮定する。すると, 任意の $x \in B$ と $P^{-1}(x) = \{y \in X \mid x P y\}$ に対して

$$\bigcup_{x \in B} (P^{-1}(x) \cap B) = B$$

よって, ある有限個の $\{x^1, \dots, x^k\} \subset B$ に対し

$$\bigcup_{i=1}^k (P^{-1}(x^i) \cap B) = B$$

となる。このとき, 集合 $\{x^1, \dots, x^k\}$ では, 任意の i に対して, $x^i \in P^{-1}(x^j)$ なる j が存在し, 極大元が存在しなくなる。

(証明終)

いま, R の transitivity に代わる条件として,

③ acyclicity 任意の有限個の $\{x^1, \dots, x^n\}$ に対して,
 $x^1 P x^2, \dots, x^{n-1} P x^n \Rightarrow \sim x^n P x^1$

④ asymmetry $xPy \Rightarrow \sim yPx$

⑤ irreflexivity $\sim xPx$

を考えてみよう。補題を基礎として、次の2個の結果が導出される。

定理1: (Bergstrom 1975) 任意の $x \in X$ に対して、 $P^{-1}(x)$ が閉集合で、 B は compact で $B \neq \emptyset$ とする。このとき P が acyclicity を満たすなら、 $M(B) \neq \emptyset$ である。

定理2: (Sonnenschein 1971) B が、compact な凸集合で $B \neq \emptyset$ とする。任意の $x \in X$ に対し、 $P^{-1}(x)$ は、凸 集合。そして $P(x) = \{y \in X \mid yPx\}$ は、凸集合とする。このとき P が asymmetry を満たすなら、 $M(B) \neq \emptyset$ である。

定理2は、次の Ky-Fan (1961) の定理と比較できる。

定理3: (Ky-Fan 1961) X を linear topological space の compact, convex な non-empty subset, そして $A \subset X \times X$ とする。任意の $x \in X$ に対して

(1) $\{x \in X \mid (x, y) \in A\}$ は閉集合。

(2) $(x, x) \in A$

(3) $\{y \in X \mid (x, y) \notin A\}$ は、凸集合

が成り立つ。このとき、ある $y^0 \in X$ が存在して、 $y^0 \times X \in A$ がある。

さて、 P の irreflexivity のみを仮定したものととして、次の結果が知られている。以下で、 P が lower semi-continuous (l.s.c.) とは、“任意の $x \in P(y)$ なる $(x, y) \in X \times X$ 及び、 $y^n \rightarrow y$ なる点列 $\{y^n\} \subset X$ に対して、ある点列 $\{x^n\} \subset X$ が存在して、 $x^n \in P(y^n)$ かつ $x^n \rightarrow x$ となる” という意味である。

定理 4: (Mas-Colell) P は、l.s.c. で、任意の $x \in X$ に対し $P(x)$ は凸集合となる。また B は、compact, convex で、 $B \neq \emptyset$ である。このとき P が irreflexive ならば、 $M(B) \neq \emptyset$ となる。

証明 任意の $y \in B$ に対して

$$P(y) \cap B \neq \emptyset$$

とする。すると $F: y \rightarrow P(y) \cap B$ に対して、 $F(y) \neq \emptyset$ 、 $F(y)$ は、凸集合として F 自身は l.s.c. となる。よって、Michael (1956) の selection 定理によって、連続関数 f :

$B \rightarrow B$ で, $f(y) = P(y) \cap B$ をみたすものが存在する。このとき, 不動点定理によって

$$y^* = f(y^*) \in P(y^*) \cap B$$

をみたす $y^* \in B$ が存在する。これは

$$y^* P y^*$$

を意味して, P の irreflexivity と矛盾する。よって,

$$P(y) \cap B = \emptyset$$

がある $y \in B$ について成立しなければならない。

証明終り

(4) おわりに

以上は, compact 集合上の極大点の存在に関する一般化であった。しかしこれを, 一般均衡の存在に拡張することは難しくない (Mas-Colell 1974)。

参考文献

Bergstrom, T., "Maximal Elements of Acyclic Relations on Compact Sets," *Journal of Economic Theory*, vol. 10, 1975.

Ky Fan, "A Generalization of Tyconoff's Fixed Point Theorem," *Math. Annalen*, 1961.

Mas-Colell, A., "An Equilibrium Existence Theorem without Complete or Transitive Preferences," *Journal of Mathematical Economics*, vol. 2, 1974

Micheal, E., "Continuous Selection I," *Annals of Math.* vol. 63, 1956.

Sonnenschein, H., "Demand Theory without Transitive Preferences with Applications to the Theory of Competitive Equilibriums," *Preferences, Utility and Demand* (ed. by J. Chipman et. al.) Harcourt Brace Jovanovich, 1971.