

単調フォック空間におけるランダムウォークとブラウン運動

山口大学工学部 村木 尚文 (Naofumi Muraki)

あらまし 時間の集合が持つ単調構造を利用して、ある種の“Fock 空間”(=単調 Fock 空間)を構成する。離散時間から生成される単調 Fock 空間には、非可換ランダムウォークの対 $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が自然に付随する。また、連続時間から生成される単調 Fock 空間には非可換ブラウン運動の対 $\{Q_t\}_{t \geq 0}, \{P_t\}_{t \geq 0}$ が自然に付随する。離散時間の場合、非可換ランダムウォーク $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (および $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) に対して、ド・モアブル-ラプラス型の中心極限定理が成立し、極限分布として標準逆正弦法則が出現する。これに対応して、連続時間の場合、非可換ブラウン運動 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ (および $\{P_t\}_{t \geq 0}$) の真空状態の下での確率分布は、平均 0 かつ分散 t の逆正弦法則となる。非可換ブラウン運動 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ (および $\{P_t\}_{t \geq 0}$) は非可換ランダムウォーク $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (および $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) の自然な極限であるとみなされる。

1. はじめに

量子確率論 (Quantum Probability Theory) において、いくつかの量子確率解析 (Quantum Stochastic Calculus) が知られている [Par, Mey]。特に、重要な典型は Hudson-Parthasarathy のボソン量子確率解析 [HuP]、Applebaum-Hudson (そして Barnett-Streater-Wilde) のフェルミオン量子確率解析 [ApH, BSW]、及び、Kümmerer-Speicher の自由量子確率解析 [KuS] の 3 つである。これらの量子確率解析は、それぞれ、ボソン Fock 空間 Φ_{boson} 、フェルミオン Fock 空間 $\Phi_{fermion}$ 、そして、自由 Fock 空間 Φ_{free} の上で展開される (但し、Fock 空間を生成している 1 粒子空間は時間軸 $\mathbb{R}$ 上の L^2 関数のなす複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ であるとする)。これら 3 つの Fock 空間は、それぞれ、Bose-Einstein 統計 (ボソンの場合)、Fermi-Dirac 統計 (フェルミオンの場合)、Maxwell-Boltzmann 統計 (自由の場合) に従う量子論的粒子の生成・消滅を記述するための空間であり、本来は、1 粒子空間 $\mathcal{H}$ としては 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 上の波動関数の L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 等を考えるのが普通である。しかし、ここでは、1 粒子空間 $\mathcal{H}$ として、(正の) 時間軸 $\mathbb{R}_+$ 上の L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}_+)$ を考えていることに注意する。量子確率解析における Fock 空間の役割は、粒子を記述するためにあるというよりも、量子論的なノイズ (量子ホワイトノイズ、量子ブラウン運動、量子 Poisson 過程等) を記述するための表現空間を提供することにある。各 Fock 空間には、その生成・消滅作用素から定義される生成過程・消滅過程が自然に伴い、更に、ある種のブラウン運動の対 $\{Q_t\}_{t \geq 0}, \{P_t\}_{t \geq 0}$ が自然に伴う。1 粒子ベクトル $h \in \mathcal{H}$ に伴う、ボソン生成・消滅作用素を a_h^+, a_h^- とし、フェルミオン生成・消滅作用素を b_h^+, b_h^- とし、自由生成・消滅演算子を c_h^+, c_h^- とする。特に、1 粒子ベクトル h として区間 $[0, t)$ の定義関数 $\chi_{[0, t)}$ を用いるこ

とにより、ボソン生成・消滅過程 $A_t^+ = a_{\chi_{[0,t]}^+}^+$, $A_t^- = a_{\chi_{[0,t]}^-}$ 、フェルミオン生成・消滅過程 $B_t^+ = b_{\chi_{[0,t]}^+}^+$, $B_t^- = b_{\chi_{[0,t]}^-}$ 、自由生成・消滅過程 $C_t^+ = c_{\chi_{[0,t]}^+}^+$, $C_t^- = c_{\chi_{[0,t]}^-}$ が定義される。そして、更に、ボソン・ブラウン運動の対 $Q_t^{(boson)}$, $P_t^{(boson)}$ 、フェルミオン・ブラウン運動の対 $Q_t^{(fermion)}$, $P_t^{(fermion)}$ 、自由ブラウン運動の対 $Q_t^{(free)}$, $P_t^{(free)}$ が

$$\begin{aligned} Q_t^{(boson)} &= A_t^+ + A_t^-, & P_t^{(boson)} &= i(A_t^+ - A_t^-), \\ Q_t^{(fermion)} &= B_t^+ + B_t^-, & P_t^{(fermion)} &= i(B_t^+ - B_t^-), \\ Q_t^{(free)} &= C_t^+ + C_t^-, & P_t^{(free)} &= i(C_t^+ - C_t^-) \end{aligned}$$

により定義される（ここで i は虚数単位）。特に、ボソン・ブラウン運動 $Q_t^{(boson)}$ （および $P_t^{(boson)}$ ）は、古典ブラウン運動（即ち、Wiener 過程） $B(t)$ をその道の空間 Ω_{BM} 上の空間に作用する掛け算作用素と見なしたもの $B(t) : L^2(\Omega_{BM}) \ni f \mapsto B(t)f \in L^2(\Omega_{BM})$ とユニタリ同値である（Wiener-Ito-Segal 同型）。よって、もちろん、ボソン・ブラウン運動 $\{Q_t^{(boson)}\}_{t \geq 0}$ はそれ自体では互いに可換な自己共役作用素からなる可換作用素過程である。 $Q_t^{(boson)}$ の真空状態の下での確率分布は、平均 0 分散 t の Gauss 分布となる。作用素ブラウン運動 $\{Q_t^{(boson)}\}_{t \geq 0}$ に正準共役なもう一つの作用素ブラウン運動 $\{P_t^{(boson)}\}_{t \geq 0}$ についても同様である。これに対し、フェルミオン・ブラウン運動 $\{Q_t^{(fermion)}\}_{t \geq 0}$ は相異なる時刻 $t_1 \neq t_2$ で作用素が可換ではない： $Q_{t_1}^{(fermion)} Q_{t_2}^{(fermion)} \neq Q_{t_2}^{(fermion)} Q_{t_1}^{(fermion)}$ 。その真空状態の下での分布は、Gauss 分布どころではなく、平均 0 分散 t の Bernoulli 型の 2 点分布となる [Mey]。また、自由ブラウン運動 $\{Q_t^{(free)}\}_{t \geq 0}$ も非可換なブラウン運動であり、その真空状態の下での確率分布は、平均 0 分散 t の Wigner 半円則に従うことが知られている [Spe]。

ボソン、フェルミオン、自由、の各 Fock 空間において、これらブラウン運動対 Q_t , P_t （というよりも、むしろ、生成・消滅過程対 A_t^+ , A_t^- 等）を基本ノイズとした確率積分および確率微分方程式の理論を展開したものが、それぞれ、ボソン量子確率解析、フェルミオン量子確率解析、自由量子確率解析である。

$$\begin{aligned} \Phi_{boson} &\leadsto \text{Bosonic BM} & Q_t^{(boson)} = A_t^+ + A_t^- &\leadsto \text{Bosonic QSC} \\ \Phi_{fermion} &\leadsto \text{Fermionic BM} & Q_t^{(fermion)} = B_t^+ + B_t^- &\leadsto \text{Fermionic QSC} \\ \Phi_{free} &\leadsto \text{Free BM} & Q_t^{(free)} = C_t^+ + C_t^- &\leadsto \text{Free QSC} \end{aligned}$$

以上のことがらから自然に次のアイデアが思い浮かぶ：何らかの意味での“Fock 空間”の新しい例を構成せよ。そうすれば、非可換ブラウン運動の新しい例、量子確率解析の新しい例を得るであろう。

$$\text{新しい } \Phi \leadsto \text{新しい BM} \leadsto \text{新しい QSC}$$

このごく自然な考えに沿って、新しい“Fock 空間”を導入するために、ボソン、フェルミオン、自由、の各生成・消滅作用素を思い起こしてみる。ボソン Fock 空間 Φ_{boson} 、フェルミ

このベクトル乗法 $\triangleright$ は2つの基底ベクトルに対して

$$\begin{aligned} e_{(i_r > \dots > i_2 > i_1)} \triangleright e_{(j_s > \dots > j_2 > j_1)} \\ = \begin{cases} e_{(i_r > \dots > i_2 > i_1 > j_s > \dots > j_2 > j_1)} & (i_1 > j_s \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

により定義され、 Φ_0 全体に有界双線形に拡張された演算である。但し、もちろん、 $e_\sigma \triangleright e_\Lambda = e_\Lambda \triangleright e_\sigma = e_\sigma$ と約束しておく。各時刻 $i \in T$ に対して、生成作用素 δ_i^+ および 消滅作用素 δ_i^- を次式により定義する。

$$\begin{aligned} \delta_i^+ e_{(j_r > \dots > j_2 > j_1)} &= \begin{cases} e_{(i > j_r > \dots > j_2 > j_1)} & (i > j_r \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases} \\ \delta_i^- e_{(j_r > \dots > j_2 > j_1)} &= \begin{cases} e_{(j_{r-1} > \dots > j_2 > j_1)} & (i = j_r \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、もちろん、 $\delta_i^+ \Omega = e_i$, $\delta_i^- \Omega = 0$ と約束しておく。生成作用素 δ_i^+ は単調積 $\triangleright$ に関する左掛け算作用素 $e_\sigma \mapsto e_i \triangleright e_\sigma$ に他ならない。また消滅作用素 δ_i^- は生成作用素 δ_i^+ の adjoint となっている。全時刻での生成・消滅作用素（と恒等作用素 1）の生成する C^* 代数を $\mathcal{A} = C^*(1, \delta_i^+, \delta_i^- | i \in T)$ とおき、時刻の部分集合 $S \subset T$ に対して $\{1, \delta_i^+, \delta_i^- | i \in S\}$ の生成する C^* 代数を $\mathcal{A}(S) = C^*(1, \delta_i^+, \delta_i^- | i \in S)$ とおく。 C^* 代数 $\mathcal{A}$ と真空状態 $\phi(\cdot) = \langle \Omega | \cdot | \Omega \rangle$ との対 $(\mathcal{A}, \phi)$ が我々の扱う C^* 確率空間である。

3. 非可換ランダムウォーク

単調 Fock 空間 Φ 上の生成・消滅作用素 δ_k^+ , δ_k^- ($k \in T$) を用いて、正準対 q_k, p_k を次式により定める：

$$q_k = \delta_k^+ + \delta_k^-, \quad p_k = i(\delta_k^+ - \delta_k^-).$$

ここで i は虚数単位 ($\in \mathbb{C}$) である。この自己共役作用素 q_k, p_k のスペクトルは固有値 $\{-1, 0, +1\}$ だけからなり、しかも、真空状態 ϕ の下での固有値の確率分布は $P\{-1\} = P\{+1\} = \frac{1}{2}$, $P\{0\} = 0$ である。よって、 q_k, p_k は、真空状態 ϕ に関してほとんど確実に、値 ± 1 を等しい確率 $\frac{1}{2}$ でとる。よって、 q_k, p_k は量子 Bernoulli 確率変数と見なすことができる。

ここで C^* 確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ の独立性構造について触れておく。時刻 $i \in T$ での生成・消滅作用素 δ_i^+, δ_i^- （と恒等作用素 1）から生成される C^* 部分代数を $\mathcal{A}_i = C^*(1, \delta_i^+, \delta_i^-)$ としよう。 C^* 部分代数の族 $\{\mathcal{A}_i | i \in T\}$ は次の意味で独立である。

定理 3.1 C^* 部分代数の族 $\{\mathcal{A}_i | i \in T\}$ から任意に選んだ作用素の時間順序積の真空期待値は常に分解する：

$$\phi(A_1 A_2 \cdots A_n) = \phi(A_1) \phi(A_2) \cdots \phi(A_n), \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, \forall A_n \in \mathcal{A}_n.$$

この定理に述べられているような、時間順序積の期待値の分解性として定式化された独立性を Kümmerer の独立性という。これより、直ちに次の系を得る。

定理 3.2 作用素過程 $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ (および $P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$) は真空状態 ϕ に関して独立増分過程である (Kümmerer の独立性の意味で)。

よって、作用素過程 $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ (および $P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$) は量子 Bernoulli 確率変数の“独立和”であるので、量子ランダムウォークと解釈することができる。この量子ランダムウォーク $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (および $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) に対して中心極限定理型の極限分布を求めてみよう。

定理 3.3 (非可換・ドモアブル-ラプラス) 非可換ランダムウォーク $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ に対し、 $\frac{Q_n}{\sqrt{n}}$ の真空状態 ϕ の下での確率分布は標準逆正弦法則 μ に弱収束する：

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}} & (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

証明のスケッチを与える。確率測度の弱収束を証明するためには、モーメント毎の収束 (プラス α) を示せばよい。作用素 $\frac{Q_n}{\sqrt{n}}$ の真空状態 ϕ に関する p 次モーメント $m_p^{(n)}$ は

$$\begin{aligned} m_p^{(n)} &= \phi \left(\left(\frac{Q_n}{\sqrt{n}} \right)^p \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \phi(q_{i_p} \cdots q_{i_2} q_{i_1}) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \langle \Omega | q_{i_p} \cdots q_{i_2} q_{i_1} \Omega \rangle. \end{aligned}$$

ところで、作用素 q_i の基底ベクトル e_σ への作用は

$$q_i e_{(j_r > \cdots > j_2 > j_1)} = \begin{cases} e_{(i > j_r > \cdots > j_2 > j_1)} & (i > j_r \text{ のとき}), \\ e_{(j_{r-1} > \cdots > j_2 > j_1)} & (i = j_r \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

であるから、集合 $\{e_\sigma | \sigma \in \cup_{r=0}^\infty T M_r\} \cup \{0\}$ は q_i の作用で不変である。従って、項 $\langle \Omega | q_{i_p} \cdots q_{i_2} q_{i_1} \Omega \rangle$ のとりうる値は 0 か 1 のみ。よって、

$$m_p^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \# \{ (i_p, \dots, i_2, i_1) \in \{1, \dots, n\}^p | q_{i_p} \cdots q_{i_2} q_{i_1} \Omega = \Omega \}.$$

まず、奇数次のモーメントが消えること ($m_p^{(n)} = 0$, p : 奇数) が直ちにわかるので、以下、 p は偶数 $2k$ であるとしてよい。

集合 $S_p(n) = \{s = (i_p, \dots, i_2, i_1) \in \{1, \dots, n\}^p | q_{i_p} \cdots q_{i_2} q_{i_1} \Omega = \Omega\}$ に対して直接に極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \# S_p(n)$ を求めることは難しいので、その代わりに、 $S_p(n)$ に属する

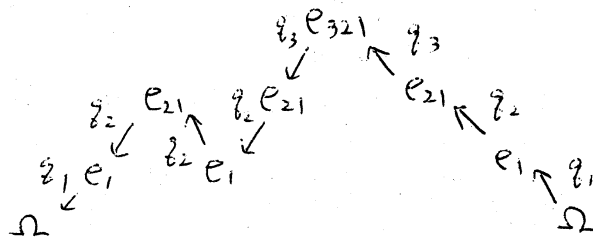
path をそのパターンによっていくつか分類しておき、各パターン毎に極限をとることを考える。

まず、集合 $S_p(n)$ に属する時刻列 $s = (i_p, \dots, i_2, i_1)$ を特徴付けよう。

例えば、 $S_p(n)$ の元 $s = (i_p, \dots, i_2, i_1)$ の例として、 $s = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1) \in S_8(n)$ をとってみると、 $q_1 q_2 q_2 q_2 q_3 q_3 q_2 q_1 \Omega$ の作用の様子は

$$\Omega \xleftarrow{q_1} e_1 \xleftarrow{q_2} e_{21} \xleftarrow{q_2} e_1 \xleftarrow{q_2} e_{21} \xleftarrow{q_3} e_{321} \xleftarrow{q_3} e_{21} \xleftarrow{q_2} e_1 \xleftarrow{q_1} \Omega$$

となっている。 q_i が基底ベクトルに作用する毎に、粒子数がちょうど1個だけ増減し、ちょうどハシゴを1段ずつ上昇・下降していることがわかる。



よって、時刻列 $s = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1) \in S_8(n)$ は up $\uparrow$ と down $\downarrow$ の記号列 $\pi(s) = (\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$ に符号化できる。この符号化 $S_p(n) \ni s = (i_p, \dots, i_2, i_1) \mapsto \pi(s) = (\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$ において出現する $\uparrow, \downarrow$ の記号列 $\pi(s)$ は次の (1), (2) により特徴付けられる：

$$(1) \quad \#\{j|\varepsilon_j = \uparrow\} = \#\{j|\varepsilon_j = \downarrow\};$$

$$(2) \quad \#\{j|l \geq j \geq 1, \varepsilon_j = \uparrow\} \geq \#\{j|l \geq j \geq 1, \varepsilon_j = \downarrow\}, \quad \forall l = 1, 2, \dots, p.$$

また、(左側に増加する順序で) 1列に並んだ p 個の点 $\{p, p-1, \dots, 2, 1\}$ を、次の規則に従って、線でつなぐことにより、 $\pi(s)$ は更に視覚化されてある種の図形 $g(s)$ が得られる。2点 $j, l \in \{p, p-1, \dots, 2, 1\}$, $j > l$, を、次の条件 (a), (b) が満たされるときに限り、線で連結する：

$$(a) \quad \#\{h|l' \geq h \geq l, \varepsilon_h = \uparrow\} > \#\{h|l' \geq h \geq l, \varepsilon_h = \downarrow\}, \quad j > \forall l' \geq l;$$

$$(b) \quad \#\{h|j \geq h \geq l, \varepsilon_h = \uparrow\} = \#\{h|j \geq h \geq l, \varepsilon_h = \downarrow\}.$$

例えば、先ほどの $\uparrow, \downarrow$ の記号列 $\pi(s) = (\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$ は



という図形に視覚化される。

これは、更に、同数個の bra (=左括弧) “(” と ket (=右括弧) “)” を用意すると、括弧の成す “well-formed formula”

$$(() (()))$$

の形にも書ける (更に、別の言い方では、non-crossing pair partition ということ)。時刻列 $s = (i_p, \dots, i_2, i_1) \in S_p(n)$ をその属する図形 $g = g(s)$ によって分類して、図形毎に極限をとろう：

$$V(g) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \# \{s \in S_p(n) | g(s) = g\}.$$

すると、求めるべきモーメント極限 $m_p = \lim_{n \rightarrow \infty} m_p^{(n)}$ は各図形 g に対する値 $V(g)$ の総和として表すことができる：

$$m_p = \sum_{g \in G(p)} V(g)$$

ここで $G(p)$ は長さ p の可能な図形の全体である。簡単な例で $V(g)$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} V(\overline{\downarrow \downarrow \downarrow} \downarrow) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^6 \# \{s \in S_6(n) | g(s) = \overline{\downarrow \downarrow \downarrow} \downarrow\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^6 \frac{n(n-1)}{2} \cdot n = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

一般の g に対しては、一定の規則に従って再帰的に計算できることが、組合せ論的な議論からわかる：

$$\begin{aligned} (i) \quad & V(\overline{\downarrow}) = 1; \\ (ii) \quad & V(\overline{\downarrow g}) = \frac{1}{\#\{\text{lines in } g\} + 1} V(g); \\ (iii) \quad & V(g_1 g_2 \cdots g_l) = V(g_1) V(g_2) \cdots V(g_l). \end{aligned}$$

例えば、 $V(g)$ の計算例として

$$\begin{aligned} V(\overline{\overline{\downarrow \downarrow \downarrow} \downarrow \downarrow \downarrow} \overline{\downarrow \downarrow \downarrow} \downarrow) &= \left\{ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{5} \cdot \left(1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \right) \cdot 1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{960}. \end{aligned}$$

与えられた図形 g を自然にいくつかのブロックに分けることを考えることにより、 p 次モーメント m_p に関する再帰関係式を得る：

$$\begin{cases} m_{2k+1} = 0, \\ m_0 = 1, \\ m_{2k} = \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_j = k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_j \geq 1}} \frac{m_{2(k_1-1)}}{k_1} \frac{m_{2(k_2-1)}}{k_2} \cdots \frac{m_{2(k_j-1)}}{k_j}. \end{cases}$$

偶数次モーメント $\{m_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ に対する (形式的) 母関数を $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{2k} s^k$ とする。その積分を $g(s) = \int_0^s f(s) ds$ とおけば、

$$\begin{aligned} f(s) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_j=k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_j \geq 1}} \frac{m_{2(k_1-1)}}{k_1} \frac{m_{2(k_2-1)}}{k_2} \dots \frac{m_{2(k_j-1)}}{k_j} \right) s^k \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_j=k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_j \geq 1}} \frac{m_{2(k_1-1)}}{k_1} s^{k_1} \frac{m_{2(k_2-1)}}{k_2} s^{k_2} \dots \frac{m_{2(k_j-1)}}{k_j} s^{k_j} \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} g(s)^j \\ &= \frac{1}{1-g(s)}. \end{aligned}$$

これより、 g に対する微分方程式を得る：

$$g'(s) = \frac{1}{1-g(s)}, \quad g(0) = 0.$$

この方程式をもう一度微分し、 $g(s)$ を消去して、 f に対する微分方程式を得る：

$$f'(s) = f(s)^3, \quad f(0) = 1$$

これは変数分離形であり、直ちに解けて、解 $f(s) = \frac{1}{\sqrt{1-2s}}$ を得る。これを 2 項級数へ展開することにより、モーメントの明示式を得る：

$$m_{2k} = \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2)^k.$$

一方、標準逆正弦法則 mu の偶数次モーメントに関する母関数は直接計算により

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{1-sx^2} \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2s}}.$$

となることがわかる。従って、モーメント極限の列 $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ は標準逆正弦法則と同じモーメントを持つ。最後に、Hamburger のモーメント問題の解が一意であるための Carleman の条件を満たすこと、および、モーメント収束から弱収束を結論するための判定条件が満たされていること、の 2 点を確認すればよい。証明終了。

注意. 1. もう一つの非可換ランダムウォーク $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対しても同じ結論が成り立つ。これは Fourier-Wiener 変換のアナログを考えることにより直ちに示される。

2. 単調増加列 $(i_p > \cdots > i_2 > i_1)$ の代わりに単調減少列 $(i_p < \cdots < i_2 < i_1)$ を用いて単調 Fock 空間を定義しても、同様の結果が成り立つ。

3. 逆正弦法則のモーメント $\{m_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ に対する再帰関係式と類似の再帰関係式が Wigner 半円則のモーメント $\{w_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ に対して成立する：

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{2k+1} = 0, \\ w_0 = 1, \\ w_{2k} = \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_j = k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_j \geq 1}} w_{2(k_1-1)} w_{2(k_2-1)} \cdots w_{2(k_j-1)}. \end{array} \right.$$

4. 単調 Fock 空間はスピン系とみなすことができる。即ち、

$$X_k = \delta_k^+ + \delta_k^-, \quad Y_k = i(\delta_k^+ - \delta_k^-), \quad Z_k = \delta_k^- \delta_k^+ - \delta_k^+ \delta_k^-.$$

とおくと、3つ組 $\{X_k, Y_k, Z_k\}$ は角運動量交換関係を満たすことが分かる：

$$[X_k, Y_k] = 2iZ_k, \quad [Y_k, Z_k] = 2iX_k, \quad [Z_k, X_k] = 2iY_k.$$

よって、単調 Fock 空間はスピンの“独立系”とも見ることができる (Kummerer の独立性に関して)。

4. 単調 Fock 空間 (連続時間の場合)

連続時間の場合に対して、単調 Fock 空間を定義する。時刻の集合 T として、正実数の全体 $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$ とする。左側に向かって増加する時刻の単調有限列を $\sigma = (s_r > \cdots > s_2 > s_1)$ と略記する。そのような有限単調列 σ であって、長さが r のものの全体を $\Sigma_r = \{\sigma = (s_r > \cdots > s_2 > s_1) | s_i \in T\}$ とする。但し、 $r=0$ のときは、空列 Λ からなる一点集合 $\Sigma_0 = \{\Lambda\}$ とする。集合 Σ_r ($\subset \mathbb{R}^r$) を Lebesgue 測度で測度空間と見なし、その上の L^2 関数全体のなす複素 Hilbert 空間を $\mathcal{H}_r = L^2(\Omega)$ とおく。この Hilbert 空間 $\mathcal{H}_r$ を r 粒子空間と呼び、その Hilbert 空間直和 $\Phi = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{H}_r$ を単調 Fock 空間(monotone Fock space)という。但し、 $r=0$ のときは、 $\Sigma_0 = \{\Lambda\}$ (Λ は空列) とし、その全測度は 1 であるとする。よって、0 粒子空間 (=真空空間) $\mathcal{H}_r = L^2(\Sigma_0)$ は複素数体 $\mathbb{C}$ と同型である。単位元 $1 \in \mathbb{C}$ に対応するベクトルを $\Omega \in \mathcal{H}_0$ とする。この $\Omega \in \Phi$ は真空ベクトルと呼ばれる。 r 粒子ベクトル $u = u(\sigma) \in \mathcal{H}_r$ と s 粒子ベクトル $v = v(\tau) \in \mathcal{H}_s$ の単調積(monotone product) $u \triangleright v$ を

$$(u \triangleright v)(\sigma > \tau) = u(\sigma)v(\tau)$$

により定義する。ここで、 $(\sigma > \tau)$ は $\sigma = (s_r > \cdots > s_2 > s_1)$ と $\tau = (t_s > \cdots > t_2 > t_1)$ に対し $(s_r > \cdots > s_2 > s_1 > t_s > \cdots > t_2 > t_1)$ を意味する (但し、 $s_1 > t_s$ のとき)。こ

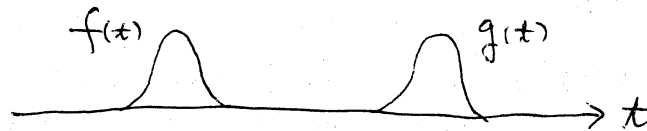
の乗法は r 粒子空間の代数的直和 Φ_0 (Φ で稠密) 上に有界双線形に拡張され、 Φ_0 に結合代数の構造を与える。真空ベクトル Ω はこの単調積に関する単位元である。1 粒子ベクトル $h \in \mathcal{H}_1$ による左掛け算作用素 $\Phi_0 \ni u \mapsto h \triangleright u \in \Phi_0$ の有界線形拡張 $\delta_h^+ : \Phi \rightarrow \Phi$ を、 h に関する生成作用素と呼ぶ。その adjoint $\delta_h^- = (\delta_h^+)^*$ を h に関する消滅作用素と呼ぶ。消滅作用素 δ_h^- の r 粒子ベクトル $u = u(t_r > \cdots > t_2 > t_1)$, $r \geq 1$, への具体的な作用は

$$(\delta_h^- u)(t_{r-1} > \cdots > t_2 > t_1) = \int_{t_r > t_{r-1} > \cdots > t_2 > t_1} dt_r \overline{h(t_r)} u(t_r > t_{r-1} > \cdots > t_2 > t_1)$$

で与えられる。消滅作用素の真空ベクトルへの作用は $\delta_h^- \Omega = 0$ 。また、対応 $h \mapsto \delta_h^+$ は線形であり、対応 $h \mapsto \delta_h^-$ は反線形である。

生成・消滅作用素 δ_h^+, δ_h^- (と恒等作用素 1) が生成する C^* 代数を $\mathcal{A} = C^*(1, \delta_h^+, \delta_h^- | h \in \mathcal{H}_1)$ とおく。 C^* 代数 $\mathcal{A}$ と真空状態 ϕ との対 $(\mathcal{A}, \phi)$ がその上に非可換ブラウン運動を定義すべき C^* 確率空間である。

注意. 単調積 $\triangleright$ の定義, $(u \triangleright v)(\sigma > \tau) = u(\sigma)v(\tau)$, はテンソル積 $\otimes$ に似ているが、これらは異なるものである: $\triangleright \neq \otimes$ 。何故ならば、例えば 1 粒子ベクトル f の“台”が 1 粒子ベクトル g の“台”よりも、数直線上で右側にあるとき (即ち、“小さい”とき)、単調積については $f \triangleright g = 0$ である。しかし一方、一般に (抽象) テンソル積については一般に $f \otimes g \neq 0$ である。



5. 非可換ブラウン運動

C^* 確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ 上に (非可換) ブラウン運動を定義し、その簡単な性質を調べる。まず、生成過程 $\{D_t^+\}_{t \geq 0}$ および 消滅過程 $\{D_t^-\}_{t \geq 0}$ を

$$D_t^+ = \delta_{\chi_{[0,t]}^+}, \quad D_t^- = \delta_{\chi_{[0,t]}^-}$$

により定義する。自己共役作用素 Q_h, P_h , $h \in \mathcal{H}_1$ を $Q_h = \delta_h^+ + \delta_h^-$, $P_h = i(\delta_h^+ - \delta_h^-)$ により定め 正準対 と名付ける。また、作用素過程

$$Q_t = D_t^+ + D_t^-, \quad P_t = i(D_t^+ - D_t^-)$$

をそれぞれ 正準過程 と名付ける。正準過程 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ は有界自己共役作用素の非可換な族である。非可換性 $Q_s Q_t \neq Q_t Q_s$ ($0 < s < t$) は次式からわかる:

$$Q_s Q_t \Omega = \chi_{[0,s]} \triangleright \chi_{[0,t]} + s \Omega,$$

$$Q_t Q_s \Omega = \chi_{[0,t)} \triangleright \chi_{[0,s)} + s \Omega,$$

$$(\chi_{[0,s)} \triangleright \chi_{[0,t)})(t_1 > t_2) = \begin{cases} 1 & (s > t_1 > t_2 \geq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$$(\chi_{[0,t)} \triangleright \chi_{[0,s)})(t_1 > t_2) = \begin{cases} 1 & (t > t_1 > t_2 \geq 0 \text{ かつ } s > t_2 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

同様に、正準過程 $\{P_t\}_{t \geq 0}$ も非可換な作用素過程であることがわかる。以下、正準過程 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ (および $\{P_t\}_{t \geq 0}$) の性質を調べる。今回は、とりあえず、**独立性**および**確率分布**の2点に関して調べる。

まず、生成消滅対 D_t^+, D_t^- の作用素過程は独立増分過程であることがわかる。

定理 5.1 対過程 $\{D_t^+, D_t^-\}_{t \geq 0}$ は真空状態 ϕ に関して、Kümmerer の意味で、独立増分過程である。即ち、時刻 $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$ に対して、増分 $[s_i, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, の生成する C^* 代数 $\mathcal{A}(s_i, t_i) = C^*(1, \delta_{\chi_{[s_i, t_i]}^+}, \delta_{\chi_{[s_i, t_i]}^-})$, $i = 1, \dots, n$, に対して

$$\phi(A_1 A_2 \cdots A_n) = \phi(A_1) \phi(A_2) \cdots \phi(A_n), \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \cdots A_n \in \mathcal{A}_n.$$

これから直ちに次を得る。

系 5.2 正準過程 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ (および $\{P_t\}_{t \geq 0}$) は真空状態 ϕ に関して、Kümmerer の意味で、独立増分過程である。

正準過程 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ の真空状態 ϕ の下での確率分布を求めよう。前に求めた定理 3.3 (非可換ド・モアブル-ラプラス) から予想される様に、その分布は逆正弦法則であることがわかる。

定理 5.3 正準過程 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ の増分 $Q_t - Q_s$ ($0 \leq s < t$) が真空状態 ϕ の下で従う確率法則 $\mu_{s,t}$ は、平均 0 分散 $t - s$ の逆正弦法則である：

$$\frac{d\mu_{s,t}}{d\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{(\sqrt{2(t-s)} + x)(\sqrt{2(t-s)} - x)}} & (-\sqrt{2(t-s)} < x < \sqrt{2(t-s)}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

定理 5.3 の証明は、本質的には定理 3.3 の非可換ド・モアブル-ラプラスのそれと同じ者である。モーメント計算を連続時間で実行すればよい。そのとき真空期待値の計算に積分演算が出現するが、定理 3.3 の証明で出会ったものと同一の再帰関係式が得られるからである。

最後に4つのブラウン運動、即ち、ボソン・ブラウン運動 $Q_t^{(boson)}$ 、フェルミオン・ブラウン運動 $Q_t^{(fermion)}$ 、自由ブラウン運動 $Q_t^{(free)}$ 、そして、単調 Fock 空間上のブラウン運動 $Q_t^{(mono)}$ 、の (真空状態の下での) 確率分布のグラフをあげておく。

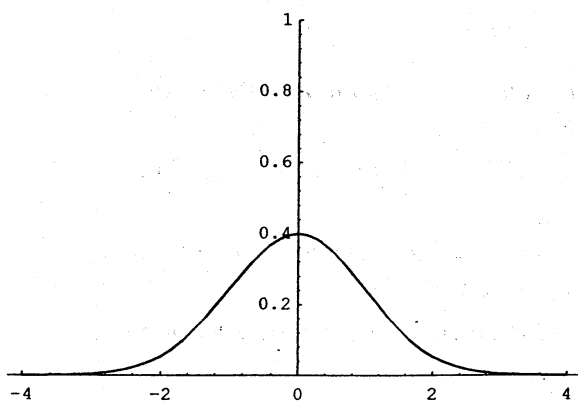


Fig. (1a) Gaussian Law

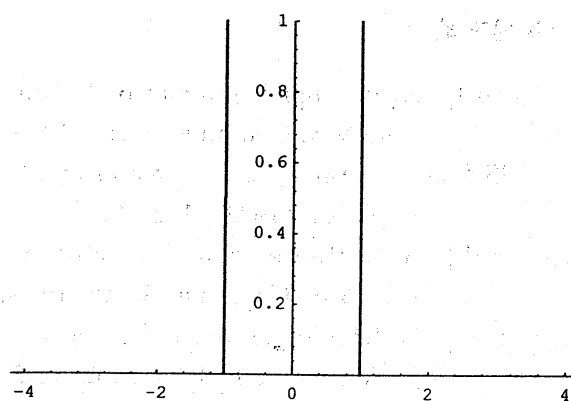


Fig. (1b) Bernoulli Law

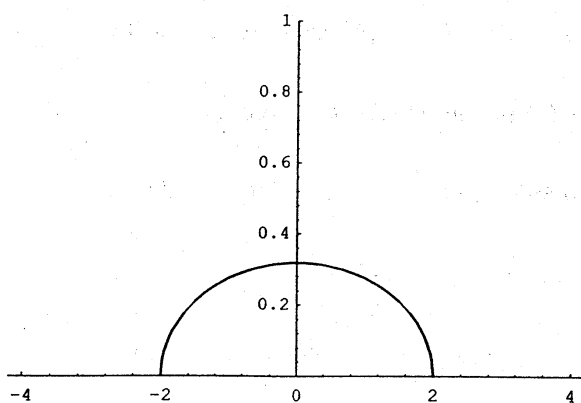


Fig. (1c) Wigner's Semicircle Law

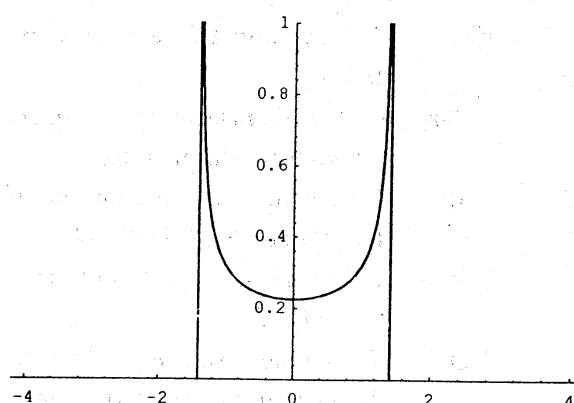


Fig. (1d) (Standard) Arcsine Law

尚、本稿の内容について詳しくは [Mur1], [Mur2] を参照。

参考文献

- [ApH] D. B. Applebaum and R. L. Hudson, *Fermion Ito's formula and stochastic evolution*, Commun. Math. Phys. **96** (1986), 473-496.
- [BSW] C. Barnett, R. F. Streater and I. F. Wilde, *The Ito-Clifford integral*, J. Funct. Anal., **48** (1982), 172-212.
- [HuP] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Quantum Ito's formula and stochastic evolution*, Commun. Math. Phys., **93** (1984), 301-323.
- [KuS] B. Kümmerer and R. Speicher, *Stochastic integration on the Cuntz-algebra O_∞* , J. Funct. Anal., **103** (1992), 372-408.
- [Mey] P. A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Springer LNM, vol. 1538, 1993.
- [Mur1] N. Muraki, *A new example of noncommutative "de Moivre-Laplace theorem,"* preprint.
- [Mur2] N. Muraki, *Noncommutative Brownian motion in the monotone Fock space*, preprint.
- [Oba] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space*, Springer LNM, vol. 1577, 1994.
- [OhP] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Par] K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhäuser, Basel, 1992.
- [Spe] R. Speicher, *A new example of 'independence' and 'white noise,'* Prob. Th. Rel. Fields, **84** (1990), 141-159.
- [Ume] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra*, Tôhoku Math. J., **6** (1954), 177-181.
- [VDN] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema and A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Series, AMS, 1992.

DEPARTMENT OF APPLIED SCIENCE,
 FACULTY OF ENGINEERING,
 YAMAGUCHI UNIVERSITY,
 UBE CITY, YAMAGUCHI 755, JAPAN
E-mail address: muraki@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp