

テータ・ワイル和

名大 理 中井喜信

0° 今ユークリッド空間 $\mathbb{R}^h$ 内のベクトルは縦ベクトルで記すものとして、 ω を $\mathbb{R}^h$ 内の有界閉凸多面体とし、又 $\alpha_i, \gamma \in \mathbb{R}^h$ を用意する。今 A を $h \times h$ の実対称行列として、表題に言う所の「テータ・ワイル和」とは次の有限和の事である。

$$\theta(A, \alpha_i; \omega, \gamma) = \sum_{m \in \omega} e\left(\frac{1}{2} A[m+\gamma] + \langle \alpha_i, m \rangle\right),$$

但し、 m は ω 内の極点と動き、 $A[x] = {}^t x A x$ ($x \in \mathbb{R}^h$)、 $\langle, \rangle$ は $\mathbb{R}^h$ のユークリッドの内積、 $e(x) = e^{2\pi i x}$ ($x \in \mathbb{R}$) である。又 A が正則ならば、代りに

$$\theta(A; \omega, \gamma) = \sum_{m \in \omega} e\left(\frac{1}{2} A[m+\gamma]\right)$$

を扱う事にする。この和を、 h 及び ω の頂点の个数は $O(1)$ と見做して、誤差 $O(\{\omega\text{の体積}\}^{\frac{1}{2}})$ 又は $O(\{\omega\text{の}$

直径 $\left\{\frac{h}{2}\right\}$ を許して、Diophantus 的に表示したい。 $h=1$ の場合は [1] に扱われている。ここでは、[2] の続きとして $h=2$ の場合の様子と述べる。

1° 復習として $h=1$ の場合は次のようになっていた。今記号と少しかえ、 α, X, N, γ を実数 ($\alpha \neq 0, N > 0$) とし

$$\theta\left(\frac{1}{\alpha}; N, X, \gamma\right) \equiv \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ X \leq n \leq X+N}} e\left(\frac{1}{2\alpha}(n+\gamma)^2\right)$$

とおく。之に対して次の両者が成立する。

(Lemma 1) $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha} = a + \alpha'$ ($a \in \mathbb{N}, \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' \neq 0$), γ, γ' は実数で $\frac{1}{2}a - \gamma \equiv \alpha'^2 \gamma' \pmod{1}$, と仮定して、更に $N \geq 2\alpha$ と仮定すれば

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}; N, X, \gamma\right) &= e\left(\varepsilon\left\{\frac{1}{8} + \frac{\gamma'^2}{2\alpha'}\right\}\right) \cdot \theta\left(\frac{-\varepsilon}{\alpha'}; \frac{N}{|\alpha|}, \frac{X}{|\alpha|}, \gamma'\right) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + O\left(1 + |\alpha|^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

が成立する。

(Lemma 2) $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha > 0$, $\frac{\alpha}{2} \geq N > 0$ とし、又 $\gamma, \tilde{\gamma}$ は実数で $\tilde{\gamma} \equiv \gamma \pmod{\alpha}$ 及び $[\frac{X}{\alpha}, \frac{X+N}{\alpha}]$ は区間 $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ に含まれているものとする。この時

$$\theta\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}; N, X, Y\right) = e\left(\varepsilon \cdot \frac{Y^2 - \tilde{Y}^2}{2\alpha}\right) \cdot \int_{X+\tilde{Y}}^{X+\tilde{Y}+N} e\left(\frac{\varepsilon}{2\alpha} u^2\right) du + O(1)$$

が成立する。

以上はいずれも古典的であるが、両者を組み合わせて一般の場合の $\theta\left(\frac{1}{\alpha}; N, X, Y\right)$ の誤差 $O(N^{\frac{1}{2}+1})$ を含む Dirichlet 的表示を得る。([1] を参照されたい*) 各誤差項は次節 2° 中の $\Psi_{\varepsilon}(y)$ を使えば、級数の形で表わせる。いさゆる Brahet 分解を使えば ($h=1$ の場合) 形は見易くなる。

2° $h=2$ の場合に上記の Lemma 達に相当する事が得られるが複雑であるので Lemma 1 の類似について結果のみ述べる事とする。ここではすべて誤差項はいさゆる log-因子だけ期待する表示より劣っている。以下の事は [2] を参照されたい。今 $y \geq 0$, $\varepsilon = \pm 1$ に対し

$$\Psi_{\varepsilon}(y) = \int_y^{\infty} e\left(-\frac{\varepsilon}{2} y^2\right) \cdot e\left(\frac{\varepsilon}{2} u^2\right) du$$

*)

[1] の 166 行-2 (2) 式は 次の如くに訂正する。

$$X_{k+2} = (\alpha_0 \cdots \alpha_{k+1})^{-1} X_0 + (-1)^{k+1} \alpha_0^{-1} \gamma_0 A_k + (-1)^{k+1} \frac{1}{2} (-A_k + B_k) + (-1)^k E_k + \frac{1}{2}.$$

従って 171 行-2 (2) の条件偶奇は入れかえる。

とあく。又 A は 2×2 の実対称行列で $\det A \neq 0$, $A \neq 0$.

$b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ は $b_1 \neq b_2$, $k_1, k_2 (k_2 - k_1) \neq 0$ と

し. $IP, \gamma \in \mathbb{R}^2$, $D > 0$ を用意する. 更に $K_1 = A \cdot (IP + \gamma)$,

$K_2 = K_1 + \Delta^{-1} \cdot D \cdot ({}^t 1) \cdot (b_2 - b_1)$ 且 $\Delta = \det(b_2, b_1)$ と

おく. この時

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(A^{-1}; b_2, k_2; b_1, k_1; IP, \gamma, D) \\ &= \sum_m \int_0^D dt \cdot \varphi_m(t - \langle b_1, m - K_1 \rangle) \times |k_2 - k_1|^{\frac{1}{2}} \times \int_{\varphi_m k_1}^{\varphi_m k_2} \left(|k_1|^{\frac{1}{2}} \left| t - \langle b_1, m - K_1 \rangle \right| \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{k_2}{2} \left\{ t - \langle b_2, m - K_1 \rangle \right\}^2 - \langle m, IP \rangle - \frac{1}{2} A^{-1} [m - K_1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \left\{ \langle b_2 - b_1, m - K_1 \rangle \right\}^2 + \frac{1}{2} A^{-1} [K_1] \right) \\ &= \sum_m \varphi_m k_2 \cdot \varphi_m (k_2 - k_1) \cdot \varphi_m \langle b_2 - b_1, m - K_1 \rangle \times \exp \left(\frac{1}{8} \varphi_m k_1 \right) \times \\ &\quad \times \int_{\varphi_m (k_2 - k_1)}^{\varphi_m k_2} \left(\frac{|k_2|}{|k_2 - k_1|^{\frac{1}{2}}} \cdot \left| \langle b_2 - b_1, m - K_1 \rangle \right| \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{1}{2} \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \left\{ \langle b_2 - b_1, m - K_1 \rangle \right\}^2 - \frac{1}{2} A^{-1} [m - K_1] - \langle m, IP \rangle + \frac{1}{2} A^{-1} [K_1] \right) \end{aligned}$$

とあく. ここに 第一の和は $\mathbb{R}^2$ 内の格子点を動き, 第二の和は $\mathbb{R}^2$ 内の格子点で $\prod_{j=1}^2 \langle b_j, m - K_j \rangle \leq 0$ となるものの上の和である. 実際にはこの右辺の無限級数の収束は判定難であるので, [2] の §1 Lemma 2 に従い, $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ はいずれも $|m_j| \leq M_j$ ($j=1, 2$) の範囲に制限して, 有限和として扱うのであるが, そのための修正項を記す事は略す. 従っ

で以下の等式 ($\doteq$) は、すべて Diophantus 的白修正項を追加 (7 後はいめて成立している) のと見られたい。

多辺形 $\mathcal{K}$ の各辺を $IP_1P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} t + IP_1, 0 \leq t \leq D \right\}$ で表わし、又 $A = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ と直交行列で対角化して $\varepsilon_j = \arg \delta_j$ ($j=1, 2$), $0 \neq |\delta_j| \ll 1$ ($j=1, 2$) とする。仮定として、各辺に対し $A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \neq 0$, 及び $\sin(\theta - \varphi) \neq 0$ ならば $|\sin(\theta - \varphi)| \gg 1$ と仮定し、これを φ のとする。

[定理 1] $A^{-1} = R + A'$, R は整数係数の対称行列 ($= \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_3 \end{pmatrix}$), A' は実対称行列 ($\det A \neq 0, \det A' \neq 0$ とすれば)

$$\begin{aligned} \theta(A; \mathcal{K}, \varphi) &\doteq |\det A|^{-\frac{1}{2}} e\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{8}\right) \cdot e\left(\frac{1}{2} A'[\varphi']\right) \times \theta(-A'; A(\mathcal{K} + \varphi), \varphi') \\ &\quad + \sum_{m \in \partial \mathcal{K}} \frac{1}{2} \cdot e\left(\frac{1}{2} A[m + \varphi]\right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\mathcal{K} \text{ の辺}} (\pm) \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}} \times \mathcal{F} \left(A^{-1}; \frac{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}}{A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}}, -A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}; \frac{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}}{\delta_1 \cos(\theta - \varphi)}, \right. \\ \left. , \delta_1 \cos^2(\theta - \varphi); IP, \varphi, D \right)$$

$$+ O \left((1 + |\det A|^{-\frac{1}{2}}) \times \log \text{ (因子)} \right)$$

となる。但し $\varphi' = A^{-1} \cdot \left(\varphi - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right)$ であり IP は $t=0$ における辺 IP_1P_2 の頂点、又 辺 IP_1P_2 上で $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot (\mathcal{K} + \varphi)$ において 水平又は垂直になる時は適当に極限移行により) 4

と考へる。

之は [2] §3 の Proposition 1 の書きかえである。

3° 今 4 の定義の中の二つの級数のうち前者も含む方を φ_I , 含みぬ方を φ_0 とおき、更に φ_0 において m を $\prod_{j=1}^2 \langle l_{b_j}, m - k_j \rangle = 0$ とある時は γ の後に重み $\frac{1}{2}$ をつけた級数を φ_A^* とし、 $\varphi^* = \varphi_I + \varphi_A^*$ とおく。

(Lemma 3) $A^{-1} = R + A'$, (R, A' は定理 1 と同様)
 γ (7) $\Delta = \det(l_{b_2}, l_{b_1}) \neq 0$ と仮定する。この時

(1) $A'[x] = k_2 \cdot \{\langle l_{b_2}, x \rangle\}^2 + \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \{\langle l_{b_2} - l_{b_1}, x \rangle\}^2$, であらば

$$\begin{aligned} & \varphi^*(A^{-1}; l_{b_2}, k_2; l_{b_1}, k_1; IP, \gamma, D) \\ & \doteq |\det A'|^{-\frac{1}{2}} \times e(\frac{1}{2} A'^{-1}[\gamma']) \times \exp\left(k_2 \cdot \check{A}[l_{b_1}] \times ({}^t l_{b_1} \cdot \check{A} \cdot (l_{b_2} - l_{b_1}))\right) \times e(\frac{\xi_1}{8}) \times \\ & \quad \times e(\frac{1}{8} \exp(k_2 - k_1)) \times \\ & \quad \times \varphi^*\left(-A'^{-1}; \frac{\Delta \cdot ({}_1^{-1}) \cdot (l_{b_2} - l_{b_1})}{({}_1^{-1}) \check{A}'[l_{b_2} - l_{b_1}]}, \quad ({}_1^{-1}) \frac{\check{A}'[l_{b_2} - l_{b_1}]}{\Delta^2}; \right. \\ & \quad \left. ; \frac{\Delta \cdot ({}_1^{-1}) \cdot l_{b_1}}{({}^t l_{b_1} \cdot \check{A}' \cdot (l_{b_2} - l_{b_1}))}, \quad ({}_1^{-1}) \frac{\{{}^t l_{b_1} \cdot \check{A}' \cdot (l_{b_2} - l_{b_1})\}^2}{\Delta^2 \cdot \check{A}'[l_{b_1}]} ; \right. \\ & \quad \left. ; -A \cdot (IP + \gamma), -A'^{-1}(\gamma - \frac{1}{2}({}_2^1)) , D \right) \\ & \quad + O(\log - \text{因子}) \end{aligned}$$

となる。但し D は両辺で共通であり、又 $\check{A} = ({}_1^{-1}) \cdot A \cdot ({}_1^{-1})$ 。

$$(D) \quad \frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[l_2] \neq 0, \quad \det A' + \frac{k_2}{k_2 - k_1} (k_1 k_2 \Delta^2 - (k_2 - k_1) \check{A}'[l_2] - k_1 \check{A}'[l_2 - l_1]) \neq 0$$

тогда

$$\psi_I(A^{-1}; l_2, k_2; l_1, k_1; IP, \gamma, D)$$

$$\equiv (\det A')^{-\frac{1}{2}} \cdot e(\frac{1}{2} A'[\gamma]) \cdot \exp\left(\det A' - \frac{\check{A}'[k_2 l_2 - k_1 l_1]}{k_2 - k_1}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot {}^t(l_2 - l_1) \check{A}'(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det A'\right) \times$$

$$\times e\left(\frac{1}{8} \exp\left(\frac{k_2^2 \Delta^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[l_2]\right)\right) \times$$

$$\times \left(e\left(\frac{\xi_1}{8}\right) \times \psi_I \left(-A'^{-1}; \frac{\frac{\Delta k_2^2}{k_2 - k_1} ({}^t(l_2 - l_1) - \check{A}' l_1)}{\frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{A}'[l_2 - l_1] - \det A'}, \frac{\frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{A}'[l_2] - \det A'}{\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[l_2]} \right); \right.$$

$$\left. \frac{\frac{\Delta k_2}{k_2 - k_1} ({}^t(l_2 - l_1) (k_2 l_2 - k_1 l_1) - \check{A}' l_1)}{\frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot {}^t(l_2 - l_1) \check{A}'(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det A'} \right.$$

$$\left. \frac{\left\{ \frac{k_2}{k_2 - k_1} {}^t(l_2 - l_1) \check{A}'(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det A' \right\}^2}{\left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[l_2] \right) \left(\det A' - \frac{1}{k_2 - k_1} \check{A}'[k_2 l_2 - k_1 l_1] \right)} \right.$$

$$\left. ; -A \cdot (IP + \gamma), -A'^{-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} ({}^t l_2) \right), D \right)$$

$$\times e\left(\frac{1}{8} \exp\left(\frac{k_2^2 \Delta^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[l_2]\right)\right) \times \exp\left(\det A' + \frac{k_2}{k_2 - k_1} (k_1 k_2 \Delta^2 - k_1 \check{A}'[l_2] - (k_2 - k_1) \check{A}'[l_2 - l_1])\right)$$

$$\times \psi_I \left(-A'^{-1}; \frac{\frac{\Delta k_1 k_2}{k_2 - k_1} ({}^t(l_2 - l_1) - \check{A}' l_2)}{\frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \check{A}'[l_2 - l_1] - \det A'} \right)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & , (-) k_2 \cdot \frac{\frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \cdot \check{A}'[l_2 - l_1] - \det A'}{\det A' + \frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot (*)} ; \\
 & ; \frac{\frac{\Delta k_2}{k_2 - k_1} (i^{-1}) (k_2 l_2 - k_1 l_1) - \check{A}'[l_1]}{\frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot {}^t(l_2 - l_1) \cdot \check{A}'(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det A'} ; \\
 & , k_1 \cdot \frac{\left(\frac{k_2}{k_2 - k_1} {}^t(l_2 - l_1) \cdot \check{A}'(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det A' \right)^2}{\left(\det A' - \frac{\check{A}'[k_2 l_2 - k_1 l_1]}{k_2 - k_1} \right) \cdot \left(\det A' + \frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot (*) \right)} ; \\
 & ; -A \cdot (p + \gamma), -A'^{-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} (v_2') \right), D
 \end{aligned} \right\}$$

γ である。但し $\check{A} = (-) (i^{-1}) A (i^{-1})$ である。右辺第 2 式中 $(*)$ と略記したものは $k_1 k_2 \Delta^2 - k_1 \cdot \check{A}'[l_2] - (k_2 - k_1) \cdot \check{A}'[l_2 - l_1]$ である。

$$(11) \quad \frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[l_1] \neq 0 \quad \text{である}$$

$$\psi_0^* (A^{-1}; l_2, k_2; l_1, k_1; p, \gamma, D)$$

$$= |\det A'|^{-\frac{1}{2}} e\left(\frac{1}{2} A'^{-1}[\gamma]\right) \cdot \varepsilon_2 \operatorname{sgn}(\check{A}'[l_1]) \operatorname{sgn}({}^t l_1 \cdot \check{A}'(l_2 - l_1)) \cdot e\left(\frac{\varepsilon_1}{\delta}\right) \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned}
 & e\left(\frac{1}{\delta} \operatorname{sgn}(k_2 - k_1)\right) \times \\
 & \times \psi_{II} \left(-A'^{-1}; \frac{\Delta (i^{-1})(l_2 - l_1)}{\check{A}'[l_2 - l_1]}, (-) \frac{\check{A}'[l_2 - l_1]}{\Delta^2} ; \right. \\
 & ; \frac{\Delta (i^{-1}) l_1}{{}^t l_1 \cdot \check{A}'(l_2 - l_1)}, (-) \frac{\{ {}^t l_1 \cdot \check{A}'(l_2 - l_1) \}^2}{\Delta^2 \cdot \check{A}'[l_1]} ; \\
 & ; -A \cdot (p + \gamma), (-) A'^{-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} (v_2') \right), D
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - e \left(\frac{1}{8} \operatorname{sp} \left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[b_1] \right) \right) \times \\ & \times \left(\begin{aligned} & \check{A}^{-1} ; \quad \frac{\frac{\Delta k_2^2}{k_2 - k_1} (i^{-1})(b_2 - b_1) - \check{A}'[b_1]}{\frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{A}'[b_1] - \det A'} , \quad (-) \frac{\frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{A}'[b_1] - \det A'}{\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[b_1]} ; \\ & ; \frac{\Delta (i^{-1}) b_1}{\check{A}'[b_1] \check{A}'(b_2 - b_1)} , \quad (-) \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \cdot \frac{\{ {}^+ b_1 \check{A}'(b_2 - b_1) \}^2}{\check{A}'[b_1] - \left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2 - k_1} - \check{A}'[b_1] \right)} ; \\ & ; -A(11+r) , \quad (-) A^{-1} \left(r - \frac{1}{2} (v_2^2) \right) , \quad D \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}$$

となる。

この Lemma の (1) は (2), (1) の場合が分れるのは、
[2] の Lemma 4, Lemma 5 に対応している。各 φ_I は [2]
の Lemma 7 を使えば、誤差項を許して、 φ_A に似た形の三輪
の級数の和で表わす事が出来る。

4° 今 A を 実対称行列として、 $k \geq 0$ に対し A_k その
他を次の如くに定める。

$$\left\{ \begin{aligned} & A_0 \equiv A \pmod{1} , \\ & k \geq 0 \text{ に対し } \det A_k \neq 0 \text{ なら } A_k^{-1} = R_k + A_{k+1} \\ & \text{但し } R_k = \begin{pmatrix} v_1^{(k)} & v_2^{(k)} \\ v_1^{(k)} & v_2^{(k)} \end{pmatrix} \text{ は 整数係数の対称行列,} \\ & A_{k+1} \text{ は 実対称行列} \end{aligned} \right.$$

又 P_k, Q_k を

$$P_k = R_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2}$$

$$P_0 = R_0, \quad P_{-1} = 1_k$$

$$Q_k = R_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad Q_0 = 1_h, \quad Q_{-1} = (0)_h$$

Y (1) 以下 $\det P_k \neq 0$, $\det Q_k \neq 0$ は仮定する。又

$$\tilde{B}_k = A_k \cdots A_1, \quad (k \geq 1), \quad \tilde{B}_0 = 1_h,$$

$$U_{k+1} = (\det Q_k) \cdot (A_0^{-1} - Q_k^{-1} P_k) \quad (k \geq 0), \quad U_0 = (0)_h$$

Y あら $P^{(0)} = P$, $\gamma^{(0)} = \gamma$ から始めて

$$P^{(k+1)} = (-1) A_k \cdot (P^{(k)} + \gamma^{(k)}) \quad (k \geq 0)$$

$$\gamma^{(k+1)} = (-1) A_{k+1}^{-1} \cdot \left(\gamma^{(k)} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \end{pmatrix} \right) \quad (k \geq 0)$$

Y あく。 $h \geq 3$ ならば $2 = \varepsilon \bar{\varepsilon}$ という行列で“換入操作”を追加すべきであろうが、ここでは略す。

(Lemma 4) $h = 2$ の時 $\|(\cdots)\|$ を行列のユークリッドのノルムとすれば

$$\begin{aligned} \|A_k \cdots A_0\| &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \|A_{k-1} \cdots A_0\| \\ \|A_k\| &\ll 1 \end{aligned} \quad (k \geq 1)$$

Y なるように R_k を選ぶ事が出来る。

上記連分数展開を使い Lemma 3 の (ii), (i) が恒次適用出来る場合は、(ii) の右辺が 1 度の $\frac{1}{2}$ はお互に打ち消しあい、才 2 度の $\frac{1}{2}$ のみ残り、結局 $A_0, \dots, A_k$ とずらしてやけば、次のような“分岐型の反転公式”を得る。

[定理 2] $k \geq 0$ に対し (Lemma 3 の (ii), (i)) が反復適用出来る場合は)

$$\Psi^*(A_0^{-1}; l_2, k_2; l_1, k_1; IP, \gamma, D)$$

$$\equiv |\det(A_{k+1} - A_1)|^{-\frac{1}{2}} \times e\left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2} A_j^{-1} [r^{(j)}]\right) \times$$

$$\times e(\pm) \times e\left(\frac{1}{8} \times \left\{ \begin{smallmatrix} \text{整数} \end{smallmatrix} \right\}\right) \times$$

$$\times \Psi_I / (-1)^{k+1} A_{k+1}^{-1}; (-1) \cdot \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} Q_k(l_2 - l_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{B}_{k+1}^{-1} l_1}{-\det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}[l_2 - l_1]},$$

$$, (-1) \frac{-\det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}[l_2 - l_1]}{\Delta^2 \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \det Q_k - \check{V}_{k+1}[l_2 - l_1]} ;$$

$$; (-1) \cdot \frac{\Delta \frac{k_2}{k_2 - k_1} (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} Q_k(-)(k_2 l_2 - k_1 l_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{B}_{k+1}^{-1} l_1}{\frac{k_2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}(l_2 - l_1) \check{V}_{k+1}(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det \tilde{B}_{k+1}},$$

$$, (-1) \frac{\left\{ \frac{k_2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}(l_2 - l_1) \check{V}_{k+1}(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det \tilde{B}_{k+1} \right\}^2}{\left(\Delta^2 \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \det Q_k - \check{V}_{k+1}[l_2] \right) \left(\frac{1}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}[k_2 l_2 - k_1 l_1] - \det \tilde{B}_{k+1} \right)} ;$$

$$; IP^{(k+1)}, \gamma^{(k+1)}, D$$

↓
没
頁
這
續
()

$$+ (\pm) \cdot e\left(\frac{1}{8} \times \left\{ \begin{smallmatrix} \text{整数} \end{smallmatrix} \right\}\right) \times$$

$$\times \Psi_I / (-1)^{k+1} A_{k+1}^{-1}; (-1) \cdot \frac{\Delta \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} Q_k(-)(l_2 - l_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{B}_{k+1}^{-1} l_2}{\det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}[l_2 - l_1]},$$

$$, (-1) k_2 \cdot \frac{\frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}[l_2 - l_1] - \det \tilde{B}_{k+1}}{\det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2}{k_2 - k_1} (k_1 k_2 \Delta^2 \det Q_k - (k_2 - k_1) \check{V}_{k+1}[l_2] - k_1 \check{V}_{k+1}[l_2 - l_1])},$$

$$; (-1) \cdot \frac{\Delta \frac{k_2}{k_2 - k_1} (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} Q_k(-)(k_2 l_2 - k_1 l_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{B}_{k+1}^{-1} l_1}{\frac{k_2}{k_2 - k_1} \check{V}_{k+1}(l_2 - l_1) \check{V}_{k+1}(k_2 l_2 - k_1 l_1) - \det \tilde{B}_{k+1}},$$

$$\left(\begin{array}{l}
 (-) k_1 \frac{\left\{ \frac{k_2}{k_2 - k_1} + (b_2 - b_1) \check{O}_{k+1}(k_2 b_2 - k_1 b_1) - \det \tilde{B}_{k+1} \right\}^2}{\left(\frac{1}{k_2 - k_1} \check{O}_{k+1}[k_2 b_2 - k_1 b_1] - \det \tilde{B}_{k+1} \right) \times \left(\text{前頁下の(*)の分母に(1)因子} \right)} \\
 ; p^{(k+1)}, \gamma^{(k+1)}, D
 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + (\pm) \times e\left(\frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{2} \text{ 級数} \right)\right) \times \\
 & \times \psi_I \left((-)^{k+1} A_{k+1}^{-1}; (-) \frac{(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \Delta (i^{-1}) Q_k (b_2 - b_1)}{\check{O}_{k+1}[b_2 - b_1]}, (-) \frac{\check{O}_{k+1}[b_2 - b_1]}{\Delta^2 \det Q_k}; \right. \\
 & ; \frac{(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \Delta (i^{-1}) \cdot Q_k \cdot b_1}{b_1 \cdot \check{O}_{k+1} \cdot (b_2 - b_1)}, (-) \frac{\left\{ b_1 \check{O}_{k+1}(b_2 - b_1) \right\}^2}{\Delta^2 \cdot \det Q_k \cdot \check{O}_{k+1}[b_1]} ; \\
 & ; p^{(k+1)}, \gamma^{(k+1)}, D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\pm) \times e\left(\frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{2} \text{ 級数} \right)\right) \times \\
 & \times \psi_I \left((-)^{k+1} A_{k+1}^{-1}; (i^{-1}) \cdot \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \cdot Q_k \cdot (b_2 - b_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{B}_{k+1} (i^{-1}) b_1}{- \det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{O}_{k+1}[b_2 - b_1]}, \right. \\
 & , (-) \frac{(-) \det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \check{O}_{k+1}[b_2 - b_1]}{\Delta^2 \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \cdot \det Q_k - \check{O}_{k+1}[b_2 - b_1]} ; \\
 & ; (i^{-1}) \cdot \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta \cdot Q_k \cdot b_1}{b_1 \cdot \check{O}_{k+1} \cdot (b_2 - b_1)}, \\
 & , (-) \frac{\frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \cdot \left\{ b_1 \check{O}_{k+1}(b_2 - b_1) \right\}^2}{\check{O}_{k+1}[b_1] \cdot \left(\Delta^2 \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \cdot \det Q_k - \check{O}_{k+1}[b_1] \right)} ; p^{(k+1)}, \gamma^{(k+1)}, D
 \end{aligned}$$

$$+ O(\log \cdot \text{因子})$$

となる。

定理 1 の右辺の $\chi(\dots)$ では $A' = A^{-1} (R = (0))$ となる。
 Lemma 3 の (1) の場合になる。

5° Lemma 2 (いわゆる van der Corput 型) に相当する
 事が得られるがここには記さない。和をとる領域 Ω に強い
 制限をつけて Bruhat 分解を使うと式の複雑さは減ずる。
 A が退化する時はまた合併してない。*)

[1] Y. N. Nakai, On a θ -Weyl sum, Nagoya Math. J.,
 Vol. 52, 1973 ¹⁶³/₁₇₂.

[2] 中井喜信, θ -Weyl 和, 数理解析研究所講究録
 222 号, 1974 年, 1010-1019 頁。

*)

短報は第 2 回日米数論報告集(ミシガン大学 1975 年 6 月)にも所載。