

時間に関係した劣微分項を持つ
双曲型方程式の解の存在について

阪大工学部 丸尾健二 (Kenji Maruo)

0. 序. 障害物の上に膜を張った時 膜の振動方程式
や Klein-Gordon equation は φ を $L_2(\Omega)$ から $(-\infty, \infty]$ への
下半連続な凸関数とし その劣微分を $\partial\varphi$ としたとき

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \partial\varphi u \ni f, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b$$

という形の非線型双曲型方程式で表わされる。

この種の方程式について 高村-小西著 非線型発展方程式
([3]の5p)に述べられている様に難しい問題を含んでいるが
M. Schatzman は, [6], [7], [8] 等の一連の論文で φ が
ある特別な形をした場合について詳しく考察している。

さて Maruo [4]の中で空間次元一次元の障害物の上に弦を
張った時の 弦の振動方程式とも含む様なある特別な条件の
元での解法を示した。

この論文では 上記の振動方程式の問題で障害物が時間と
共に変化する場合を含む様な次の形をした方程式の解法を求

める事が目的である。

$$(0.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + Au + \partial \varphi^t u \ni f(t, u) \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b. \end{cases}$$

ここで H を実ヒルベルト空間として A は正定値自己共役作用素で $f(\cdot, \cdot)$ は十分滑かな関数である。 $\partial \varphi^t$ は時間に関係する下半連続凸関数 φ^t の劣微分とする。

さて $A = (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$, (Dirichlet 問題) in $L^2(0,1)$ として

$$K(t) = \{u \in L_2(0,1); \quad u(x) \geq h(t,x)\} \text{ とおく。}$$

但し $h(t,0) < 0$, $h(t,1) < 0$, $h(\cdot, \cdot) \in C^1([0,T] \times [0,1])$ 。

このとき $I_K(\cdot)$ を $K(t)$ の指示関数 (indicator function) とし $\partial \varphi^t = \partial I_{K(t)}$ とすれば $(0,1)$ の方程式は $[0,1]$ 区間で両端を 0 に固定し時間と共に障害物 $h(t,x)$ が時間と共に動く場合の弦の振動方程式を表す事になる。

又

$$\varphi^t(u) = \int_{\Omega} a(t,x) |u(x)|^{p+1} dx \text{ とすれば}$$

$\partial \varphi^t u = (p+1) a(t,x) |u|^{p-1} u$ となり $(0,1)$ は Klein-Gordon equation で非線型項が時間に関係する場合になっている。

(0.1) は Brezis ([1]; 153p) に言っている様に光の反射の方程式も含む事になり $\frac{d^2 u}{dt^2}$ は $L^2([0,T]; H)$ に入らない。すなわち measure の空間で考える必要が出てくる。 (0.1) の解は任意の $T > 0$ としたとき $[0,T]$ 上の関数である意味での弱解にしかならな

い。我々もこの意味での解を求める事になる。

又正定値自己共役作用素を時間に関係したある下半連続な凸関数 φ^t の劣微分 $\partial\varphi^t$ に置き換えて (0.1) の方程式を考え、その解法について考察をもうする。もちろん φ^t には時間に関係した係数を持つ一様楕円型で Dirichlet 問題を含む様な形で十分条件を入れた物とする。この場合にも (0.1) の解の存在を示す事ができる。

1章で記号と解の定義、仮定、定理を述べ、2章で (0.1) の吉田近似のエネルギー不等式を求め、3章で吉田近似の解の収束を考え、定理を証明する。4章で例を挙げておく。

1. 記号 定義 仮定と定理

まず記号を述べよう。 H は実ヒルベルト空間で内積を $(\cdot, \cdot)$ で表わす。 V, X_1, X_2 は実バナッハ空間とし V の共役空間を V^* とする。 X はノルム空間として $\|\cdot\|_X$ をその空間のノルムとする。 T は任意の正の数で方程式は $[0, T]$ で考える。 $C([0, T]; X), L_p(0, T; X)$ 等は通常の記号とする。 $\partial\phi_\lambda^t, \phi_\lambda^t(\cdot)$ は $\partial\phi^t, \phi^t(\cdot)$ の吉田近似とする。(ie $\partial\phi_\lambda^t = \lambda^{-1}(I - J_\lambda^t) \cdot$ で $\phi_\lambda^t(\cdot) = (2\lambda)^{-1} \| (I - J_\lambda^t) \cdot \|^2 + \phi^t(J_\lambda^t \cdot)$ ここで $J_\lambda^t = (I + \lambda \partial\phi^t)^{-1}$.)

次に仮定を述べよう。まず $\varphi^t, \partial\varphi^t$ の仮定を述べよう。

(see Barbu [2] p292)

A-1) それぞれの $t \in [0, T]$ に対して $\varphi^t(\cdot)$ は V から $[0, \infty)$ への下半連続, coercive, 凸関数として $\partial\varphi^t$ はその V から V^* への単価な劣微分作用素とする. 次の性質を満たしているものとする.

$$(1) \quad \|x\|_V \leq C_1 \text{ ならば } \text{任意の } t \in [0, T] \text{ で } \|\partial\varphi^t x\|_{V^*} \leq C_2$$

$$(2) \quad \text{任意の関数列 } \{u_n\} \text{ such that } u_n \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \\ \text{で } u_n \rightarrow u \text{ in } L_2(0, T; H) \text{ and } u_n \rightarrow u \text{ in } w^*-L^0(0, T; V)$$

とすると 任意の $t_0 \in [0, T]$ に対して $\{\partial\varphi^{t_0} u_n\}$ は $\partial\varphi^{t_0} u$ に $w^*-L^0(0, T; V^*)$ の意味で収束する部分関数列 $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ がとれる.

$$(3) \quad \text{任意の } t, s \in [0, T] \text{ で } x \in V \text{ に対して}$$

$$|\varphi^t(x) - \varphi^s(x)| \leq |a(t) - a(s)| \{ \varphi^t(x) + 1 \}$$

を満たす. ただし $a(t)$ は $[0, T]$ 上連続な総変動量有界な関数である.

次にそれぞれの $t \in [0, T]$ に対して H から $[0, \infty)$ への下半連続 凸関数 $\varphi^t(\cdot)$ についての仮定を述べよう.

A-2)

$$(1) \quad \text{次を満たす } z(\cdot) \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H) \text{ が存在する.}$$

$$(\partial\varphi_\lambda^t x, x - z(t)) \geq \delta \|\partial\varphi_\lambda^t x\|_{X_2} - C_2 \{ \|\partial\varphi_\lambda^t x\| + \|\varphi^t x\| + 1 \}$$

for any $t \in [0, T]$ and $x \in H$. (see [4])

$$(2) \quad \text{任意の } x \in H \text{ に対して } \varphi_\lambda(x) \text{ は絶対連続な関数で}$$

$$\left| \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right| \leq C_2 \{ \varphi^t(x) + 4^t(x) + 1 + 12 \varphi^t x |_{X_2} \}$$

を満足するとする。

空間 V, X_1, X_2 についての仮定をしよう。

A-3) 次の包含関係を持つ。

$$V \subset X_1 \subset H \subset X_2 \quad \text{and} \quad X_2 \subset \{\text{dual space of } X_1\}$$

かつ各々の埋め込みは連続, $V \subset X_1$ compact で X_1 は可分とする。

又 V は H で dense で 回帰的バナハ空間とする。

$f(t, x)$ は $[0, T] \times H$ から H への次を満足するものとする。

A-4)

(1) 任意の $x \in H$ に対して $f(\cdot, x)$ は H で弱連続とする。

(2) 次の不等式を満足す。

$$|f(t, x) - f(t, y)|_H \leq h(t) |x - y|_H \quad \text{for any } x, y \in H$$

$$|f(t, x)|_H \leq h(t) \{1 + |x|_H\}$$

ここで $h(\cdot)$ は $L_1(0, T)$ に入っている関数である。

我々は次の型の方程式を考える

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \partial 4^t u + \partial \varphi^t u = f(t, u) \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b \end{cases}$$

さて方程式 (1.1) の解を次の様に定義しよう。

定義. 関数 $u \in C([0, T]; X_1) \cap W^{1, \infty}(0, T; H)$ が (1.1) の解と

は 次の条件を満すものと言う。

(1) 任意の $t \in [0, T]$ について $\phi^t(uu) + |uu|_V$ は一様有界。

(2) 次を満す $C([0, T]; X_1)$ 上の線型汎関数 F が存在する。

$$F(v-u) \leq \int_0^T \phi^t(vu) \, ds - \int_0^T \phi^t(uu) \, ds$$

for any $v \in C([0, T]; X_1)$,

$$\int_0^T \left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds} \right) ds + \int_0^T (f(s, uu) - \partial \phi^t(uu), vu) \, ds$$

$$+ (b, v(0)) - \left(\frac{du}{dt}(T), v(T) \right) = F(v)$$

for any $v \in C([0, T]; X_1) \cap L_1(0, T; V) \cap W^{1,1}(0, T; H)$.

(3) $u(0) = a$, $b - \frac{d^+}{dt} u(0) \in \partial I_{K_0} a$

ここで $\frac{d^+}{dt}$ は右左弱微分を表し K_0 は $\phi^0(\cdot)$ の領域の閉包で $I_{K_0}(\cdot)$ はその指示関数。又 V と V^* の pairing も $(\cdot, \cdot)$ の形で表現した。

さて定理を述べよう。

定理.

$a \in V \cap D(\phi^0)$, $b \in H$ としよう。今までの仮定のもと (1.1) の解は少なくとも一つは存在する。

2. 吉田近似とエネルギー不等式

まず始めに $\partial \phi^t$ に関する補題をいくつか証明しておこう。

補題 1 任意の $x \in V$ に対して

$$\text{weak-}\lim_{t \rightarrow s} \partial \phi^t x = \partial \phi^s x \text{ in } V^*$$

証明の概略

A-1) の 3) と $\partial_4^t x, \partial_4^t s$ の定義より

$$(\partial_4^t x - \partial_4^t y, y - x) \leq 2|a(t) - a(s)| (4^s(x) + 4^t(x) + 1)$$

がわかる。 $\|\partial_4^t x\|_{V^*}$ は一様有界から $\partial_4^t x \xrightarrow{\text{弱}} \omega$ in V^* が

わかる。 $(\omega - \partial_4^t y, y - x) \leq 0$ があてこる。 ∂_4^s の単調性から

$$(\partial_4^s(x + \theta z) - \partial_4^s x, z) \geq 0. \quad \|\partial_4^s(x + \theta z)\|_{V^*} \leq C \text{ より } \partial_4^s(x + \theta z)$$

$\xrightarrow{\text{弱}} \alpha_\infty$ in V^* . 故に $(\alpha_\infty - \partial_4^s x, z) \geq 0$ から $\alpha_\infty = \partial_4^s x$. 今

$$y = x + \theta z \text{ とおくと } (\omega - \alpha_\infty, z) \leq 0. \text{ 故に } \partial_4^s x = \omega.$$

行き先が一つなので $\partial_4^t x \rightarrow \partial_4^s x$.

補題 2

$g(t, x)$ は A-4) の仮定を満たす関数とし

それぞれの $t_0 \in [0, T]$ に対し 次の方程式の解 $u \in L_\infty(0, T; V) \cap$

$W^{1,\infty}(0, T; H) \cap W^{2,\infty}(0, T; V^*)$ が存在する。

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \partial_4^{t_0} u = g(t, u) & \text{on } [0, T] \times V^* \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b \end{cases}$$

その上に次のエネルギー不等式を満たす。

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right|_H^2 + 4^{t_0}(u(t)) \leq \frac{1}{2} |b|_H^2 + 4^{t_0}(a) + \int_0^t (g(s, u), \frac{du}{ds}(s)) ds$$

for any $t \in [0, T]$ 但し $a \in V, b \in H$.

証明の概略

[5] の Theorem 1 の証明と同じ様な方法でできる。

さて $\varphi_1^t(\cdot), \partial \varphi_1^t$ についての補題を挙げておこう

補題 3

$\partial \varphi_1^t x$ は A-4) の仮定を満たす。

証明の概略. $\partial \varphi_\lambda^t x$ の弱連続のみを仮定する。 λ は
 固定してゐるので定数と見てよい。 まず $x \in V$ とし
 ておく。 $\|\partial \varphi_\lambda^t x\|_{X_2} \leq C \|\partial \varphi_\lambda^t x\|_H \leq C \sqrt{\varphi_\lambda^t(x)} \leq C(1 + \varphi_\lambda^t(x))$ と (3) of
 A-1) から $|\varphi^t(x)| \leq C(1 + \varphi^0(x))$ により (2) of A-2) を使用し
 て $|\frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(x)| \leq C(1 + \varphi_\lambda^t(x))$ が得る。 Gronwall's 不等式より
 $0 \leq \varphi_\lambda^t(x) \leq \text{Const.}$ が得る。 故に $(2\lambda)^{-1} \|x - J_\lambda^t x\|_H^2 \leq \text{Const.}$ より
 $\|\partial \varphi_\lambda^t x\|_H \leq \text{Const.}$ が得る。 $w\text{-}\lim_{t_j \rightarrow \infty} \partial \varphi_{\lambda}^{t_j} x = w_\infty$ in H としおく。
 $|\varphi_\lambda^t(y) - \varphi_\lambda^t(x) - (\partial \varphi_\lambda^t x, y - x)| \leq \frac{1}{2\lambda} \|x - y\|_H^2$ と $\varphi_\lambda^t(x)$ の連続性から
 $|(w_\infty - \partial \varphi_\lambda^t x, y - x)| \leq \frac{1}{\lambda} \|x - y\|_H^2$ を得る。 $y = x + \varepsilon z$, $z \in V$
 とし $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば $w_\infty = \partial \varphi_\lambda^t x$ を得る。 $V \subset H$ で dense
 と $\partial \varphi_\lambda^t$ は Lipschitz 連続を使用して証明はできる。

補題 4. $X(t) \in L_\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; H)$ とするとき
 $\varphi_\lambda^t(X(t))$ は絶対連続で次の式を満たす。

$$\frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(X(t)) = \dot{\varphi}_\lambda^t(X(t)) + (\partial \varphi_\lambda^t X(t), \frac{d}{dt} X(t)) \quad a.e. t \in [0, T]$$

ここで $\dot{\varphi}_\lambda^t(X(t)) = \frac{d}{ds} \varphi_\lambda^s(X(t)) \Big|_{s=t}$ の意味

証明は略。

補題 5. $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$ とし $[0, T]$ を n 等分しその
 分点を t_j^n とかく。 次の方程式の $[t_j^n, t_{j+1}^n]$ 上の解 $u_{j, \lambda}^n(t)$ が
 帰納的に与えられる。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_{j, \lambda}^n}{dt^2} + \partial \varphi_{\lambda}^{t_j^n}(u_{j, \lambda}^n) + \partial \varphi_\lambda^t u_{j, \lambda}^n = f(t, u_{j, \lambda}^n) & \text{on } [t_j^n, t_{j+1}^n] \\ u_{j, \lambda}^n(t_j^n) = u_{j-1, \lambda}^n(t_j^n), \quad \frac{d}{dt} u_{j, \lambda}^n(t_j^n) = \frac{d}{dt} u_{j-1, \lambda}^n(t_j^n) \end{cases}$$

$j = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ で $u_{-1,\lambda}^n(0) = a$, $\frac{d}{dt} u_{-1,\lambda}^n(0) = b$ と 17 おく。

証明の概略

補題の 2, 3 から帰納的に要する。

さて $U_\lambda^n(t) = u_{j,\lambda}^n(t)$ for $t_j^n \leq t \leq t_{j+1}^n$ とおく。

補題 6. λ と λ に無関係な次の不等式を満す定数が存在

する。(ある種のエネルギー不等式)

$$\left| \frac{d}{dt} U_\lambda^n(t) \right|_H^2 + |U_\lambda^n(t)|_V^2 + |\partial \psi^t(U_\lambda^n(t))|_{V^*}^2 + \phi_\lambda^t(U_\lambda^n(t)) \leq \text{Const.}$$

但し $a \in D(\phi^0) \cap V$, $b \in H$ で Const は a, b には関係する。

証明の概略

簡単の為に解 $u_{j,\lambda}^n$ の index n と λ は省く。 補題 2 より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} u_j(t) \right|_H^2 + \psi_j^t(u_j(t)) &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} u_j(t_j) \right|_H^2 + \psi_j^t(u_j(t_j)) + \int_{t_j}^t (f(s, u_j(s)), u_j'(s)) ds \\ &\quad - \int_{t_j}^t (\partial \phi_\lambda^0(u_j(s)), u_j'(s)) ds. \end{aligned}$$

補題 4 より

$$- \int_{t_j}^t (\partial \phi_\lambda^0(u_j(s)), u_j'(s)) ds = \phi_\lambda^{t_j}(u_j(t_j)) - \phi_\lambda^t(u_j(t)) + \int_{t_j}^t \dot{\phi}_\lambda^0(u_j(s)) ds.$$

仮定 A-2 の (2) より

$$\int_{t_j}^t \dot{\phi}_\lambda^0(u_j(s)) ds \leq C_2 \int_{t_j}^t \{ \phi_\lambda^0(u_j(s)) + \psi_\lambda^0(u_j(s)) + 1 + |\partial \phi_\lambda^0(u_j(s))|_{X_2} \} ds.$$

仮定 A-2 の (1) と (2.1) を使用して

$$\begin{aligned} C_2 \int_{t_j}^t |\partial \phi_\lambda^0(u_j(s))|_{X_2} ds &\leq \delta^{-1} C_2 \int_{t_j}^t \{ (f(s, u_j(s)), u_j(s) - z(s)) - (\partial \psi_j^t(u_j(s)), u_j(s) \\ &\quad - z(s)) - (\frac{d^2}{dt^2} u_j(s), u_j(s) - z(s)) \} ds + \delta^{-1} C_2 \int_{t_j}^t \{ \phi_\lambda^0(u_j(s)) + \psi_\lambda^0(u_j(s)) + 1 \} ds. \end{aligned}$$

又

$$- \delta^{-1} C_2 \int_{t_j}^t (\frac{d^2}{dt^2} u_j(s), u_j(s) - z(s)) ds = \delta^{-1} C_2 (\frac{d}{dt} u_j(t_j), u_j(t_j) - z(t_j))$$

$$\begin{aligned}
& -\delta^{-1}c_2 \left(\frac{d}{dt} u_j(t), u_j(t) - z(t) \right) + \delta^{-1}c_2 \int_{t_j}^t \left(\frac{d}{ds} u_j(s), \frac{d}{ds} (u_j(s) - z(s)) \right) ds \\
& + c_3 \delta^{-1} \int_{t_j}^t \{ (f(s, u_\lambda(s)), u_\lambda(s) - z(s)) + \gamma^{t_j}(z(s)) - \gamma^{t_j}(u_j(s)) + 1 \} \\
& + c_2^2 \delta^{-1} \int_{t_j}^t \{ \phi_\lambda^s(u_\lambda(s)) + \gamma_\lambda^s(u_\lambda(s)) \} ds
\end{aligned}$$

上の不等式を組み合せ A-4) を使用すると次の不等式を得る。

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} u_j(t) \right|_H^2 + \gamma^{t_j}(u_j(t)) + \phi_\lambda^t(u_j(t)) + c_2 \delta^{-1} \left(\frac{d}{dt} u_\lambda(t), u_\lambda(t) - z(t) \right) = l_j(t) \quad \text{とおき}$$

仮定 A-1) の (3) を使用し

$$\begin{aligned}
l_j(t) & \leq l_j(t_j) + \text{Const} \int_{t_j}^t l_j(s) - c_2 \delta^{-1} \left(\frac{d}{ds} u_\lambda(s), u_\lambda(s) - z(s) \right) + (1+h(s)) \cdot \\
& \quad |u_j(s)|^2 ds + \text{Const} \int_{t_j}^t (1 + |z'(s)|^2 + |z(s)|^2) ds.
\end{aligned}$$

$$\text{故に } \tilde{l}_j(t) = l_j(t) + \frac{c_2 \delta^{-1}}{2} \cdot \text{Const} |u_\lambda(t) - z(t)|^2 + |u_j(t)|^2 \quad \text{とおき上記の}$$

$$\text{不等式と } |u_j(t)|^2 \leq |u_j(t_j)|^2 + \int_{t_j}^t (|u_j'(s)|^2 + |u_j(s)|^2) ds \quad \text{を使用し}$$

$$\tilde{l}_j(t) \leq \tilde{l}_j(t_j) + C \int_{t_j}^t (1+h(s)) \cdot \tilde{l}_j(s) ds + C |t - t_j|.$$

故に Gronwall の不等式より

$$\tilde{l}_j(t_{j+1}) \leq (\tilde{l}_j(t_j) + C |t_{j+1} - t_j|) e^{C \int_{t_j}^{t_{j+1}} (1+h(s)) ds}.$$

今仮定 A-1) の (3) を使用し

$$\begin{aligned}
\tilde{l}_{j+1}(t_{j+1}) & \leq (1 + |a(t_{j+1}) - a(t_j)|) e^{C \int_{t_j}^{t_{j+1}} (1+h(s)) ds} \tilde{l}_j(t_j) \\
& \quad + (1 + |a(t_{j+1}) - a(t_j)|) e^{C \int_{t_j}^{t_{j+1}} (1+h(s)) ds} C |t_{j+1} - t_j|.
\end{aligned}$$

より

$$\tilde{l}_j(t_j) \leq \text{Const} \tilde{l}_0(t_0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad \text{を得る。}$$

再度 A-1) の (3) を使用し補題を示す事ができる。

3. 吉田近似の解の収束と定理の証明

まず吉田近似の解の収束を示そう。

補題 7. n, λ に無関係な次の不等式を満たす定数が存在する。

$$\int_0^T |\partial \varphi_\lambda^* U_\lambda^n(t)|_{X_2} dt \leq \text{Const.}$$

証明の概略

仮定 A-2) の (1) と (2.1) を組み合わせ 補題 6 を使用すればよい。

命題 8.

次を満たす $\{U_\lambda^{n_i}\} \subset \{U_\lambda^n\}$ (部分列) とその収束極限 u_λ が存在する。

$$(1) \quad U_\lambda^{n_i} \rightarrow u_\lambda \quad \text{in } C([0, T]; H), \quad U_\lambda^{n_i} \xrightarrow{\text{弱}} u_\lambda \quad \text{in } V \quad (\text{各点})$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} U_\lambda^{n_i} \rightarrow \frac{d}{dt} u_\lambda \quad \text{in } W^* - L_\infty(0, T; H), \quad \frac{d^2}{dt^2} U_\lambda^{n_i} \xrightarrow{\text{弱}} \frac{d^2}{dt^2} u_\lambda \quad \text{in } W^* - L_\infty(0, T; V^*)$$

$$(3) \quad \left| \frac{d}{dt} u_\lambda(t) \right|_H^2 + \varphi^t(u_\lambda(t)) + \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \leq \text{Const} \quad (\lambda \text{ に無関係})$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u_\lambda(t) + \partial \varphi^t(u_\lambda(t)) + \partial \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) = f(t, u_\lambda(t)) & \text{in } V^*, \text{ a.e. } t \\ u_\lambda(0) = a \quad u'_\lambda(0) = b & \text{を満す。} \end{cases}$$

$$(5) \quad \int_0^T |\partial \varphi_\lambda^* u_\lambda(t)|_{X_2} dt \leq \text{Const.} \quad (\lambda \text{ に無関係}).$$

証明の概略

(1) は補題 6 と Ascoli-Arzelà の定理より出る。(2) は補題 6 と

$|\partial \varphi^t(u_{j,\lambda}^{n_i}(t))|_{V^*} + |\partial \varphi_\lambda^t(u_{j,\lambda}^{n_i}(t))|_H + |f(t, u_{j,\lambda}^{n_i}(t))|_H \leq \text{Const.}$ が成り立ち、 $|\frac{d^2}{dt^2} u_{j,\lambda}^{n_i}(t)|_{V^*} \leq \text{Const.}$ がわかる事より示す事ができる。(3) は補題 6 と上記

の (1) と (2) より示す事ができる (4) は (1), (2) の収束と (2.1) から得る

る。(5)は補題7と(1)の収束より示せる。

定理の証明

命題8とManno[4]と同じ手法を使用すれば証明する事ができる。

4. Example

例1. $H = L_2(0,1)$, $X_1 = C([0,1])$, $V = W^{1,2}(0,1)$, $X_2 = L_1(0,1)$
 とし、障害物 $h(x,t)$ を $\frac{d}{dt} h(x,t) \in C([0,T] \times [0,1])$, $h(t,0) < 0$
 $h(t,1) < 0$ とする。

$$K(t) = \{u \in L_2(0,1); u(x) \geq h(t,x)\} \text{ とし}$$

$$I_{K(t)}(u) = \begin{cases} 0 & u \in K(t) \\ \infty & u \notin K(t) \end{cases} \text{ とする。}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + (-\Delta)u + \partial I_{K(t)} u \ni f(t,u), \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b. \end{cases} \text{ Dirichlet 境界条件。}$$

仮定 A-2) の (1) は Manno [4] の Example と同じ。

仮定 A-2) の (2) について

$\partial I_{K(t)}$ の吉田近似 $\partial I_{K(t),\lambda} u(x) = \lambda^{-1} \min(u(x) - h(t,x), 0)$ と $I_{K(t),\lambda}(\cdot)$ の
 吉田近似 $I_{K(t),\lambda}(u) = (2\lambda)^{-1} \|\min(u(\cdot) - h(t,\cdot), 0)\|_{L_2(0,1)}^2$ とする。

$$\begin{aligned} I_{K(t+h),\lambda}(u) - I_{K(t),\lambda}(u) &= \lambda^{-1} (P_{K(t)} u - P_{K(t+h)} u, u - \frac{1}{2}(P_{K(t+h)} u + P_{K(t)} u)) \\ &= \text{つまり } P_{K(t)} u = \begin{cases} u(x), & u(x) \geq h(t,x) \\ h(t,x), & u(x) < h(t,x) \end{cases} \end{aligned}$$

又

$$|P_{K(x)} u(x) - P_{K(x+h)} u(x)| \leq |h(t, x) - h(t+h, x)|$$

故に

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} I_K u \right| &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{d}{dt} h(t, x) \right| \cdot \int_0^1 \frac{|u(x) - P_{K(x)} u(x)|}{\lambda} dx \\ &\leq C \cdot \|\partial I_{K, \lambda} u\|_{X_2} \end{aligned}$$

よ) 仮定 A-2) の (2) は満す。

他の仮定は自明

例 2.

$$H = L_2(\Omega), \quad V = \dot{H}_1(\Omega), \quad X_1 = L_{p+1}(\Omega), \quad X_2 = L_q(\Omega), \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q} = 1$$

と 1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有界, $\partial\Omega$ smooth, $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ とす。 $a(t, x) \in C^1([0, T] \times \Omega)$, $a(t, x) \geq \delta_0 > 0$ とす。

$$\varphi_\lambda^t(u) = \frac{1}{p+1} \int_\Omega a(t, x) |u(x)|^{p+1} dx, \quad \partial \varphi_\lambda^t u = a(t, x) |u|^{p-1} u$$

仮定 A-2) の (1) は Manno [4] の Example と同じ。

仮定 A-2) の (2) は " " ?

$$(1 + \lambda \partial \varphi_\lambda^t)^{-1} f = J_\lambda^t f = v(t, x) \text{ とす } \quad \text{と}$$

$$\varphi_\lambda^t f = (2\lambda)^{-1} \|f - v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{p+1} \int_\Omega a(t, x) |v(t, x)|^{p+1} dx \quad \text{と}$$

$$v + \lambda \partial \varphi_\lambda^t v = f = v + \lambda a(t, x) |v|^{p-1} v \quad \text{とす}$$

$$\frac{d}{dt} v = \dot{v} = \frac{\lambda \dot{a} |v|^{p-1} v}{1 + \lambda a |v|^{p-1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t f &= \frac{1}{\lambda} (f - v, \dot{v}) + \frac{1}{p+1} \int_\Omega \dot{a}(t, x) |v(t, x)|^{p+1} dx \\ &\quad + \int_\Omega a(t, x) |v(t, x)|^{p-1} v(t, x) \dot{v}(t, x) dx \end{aligned}$$

$$\text{となる,} \quad -\exists \quad |\dot{v}| \leq C \cdot |v| \quad \text{と} \quad |\dot{v}| \leq \lambda |\dot{a}| |v|^p \leq C |f-v|$$

より

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(f) \right| &\leq \frac{C}{\lambda} \int_\Omega |f-v|^2 dx + C \varphi_\lambda^t(f) + C \varphi_\lambda^t(f) \text{ となる} \\ &\leq C \varphi_\lambda^t(f) \text{ となる.} \quad \text{仮定 A-2 の (2) は 満たされる.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + (-\Delta) u + a(t, x) |u|^{p-1} u = f(t, x) \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b, \quad \text{Dirichlet 境界条件} \end{cases}$$

を考慮すれば他の仮定は自明。

文 献

- [1]. Brezis; Monotonicity meth. in Hilbert sp. and some appl. to nonlinear part. diff. eq., Contributions to Nonlinear Functional Anal. E. Zarantonello (editor), Acad. Press, (1971), 101-179.
- [2] Barbu; Nonlinear semigroup and diff. eq. in Banach space, Noordhoff International, 1976
- [3] 高村-小西; 非線型発展方程式 (基礎微分数学) 岩波書店
- [4] Maruo; Existence of solutions of some nonlinear wave eq. O. J. M. (22) 1985, 21-30.
- [5] Maruo; On certain nonlinear differential equations of second order in time; O. J. M. 23 1986 1-53.
- [6] Schatzman; A class of nonlinear diff. eq of second order in time

Nonlinear Analysis, 2 (1983), 560-595.

- [7] Schatzman - Bamberger ; New results on the vibrating string with a continuous obstacle MRC Technical Summary Report # 2073 1979
- [8] Schatzman ; A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: the vibrating string with a concave obstacle, J. Math. Anal. Appl, 73 (1980), 138-191