

スピニングラス問題における積分方程式と 代数方程式

東京電機大学

桂 重俊 佐々木光弘

(Shigetoshi Katsura, Mitsuhiro Sasaki)

⑤ Cayley tree (Bethe 格子) 上のランダムイジングモデルを
考える (図 1)

格子点 i のスピンの熱力学的平均値は z を最近接格子点の数とすると

$$\langle \sigma_i \rangle = \tanh \left[\beta H_i + \sum_{j=1}^z \tanh^{-1} (\tanh \beta J_{ij} \tanh \beta H_j^{(2)}) \right] \quad (1)$$

で与えられる。 H_i は外場, $H_j^{(2)}$ は H_{j-i} と書くべき量で ij ボンドの
 j に働く i 以外の外から働く有効場である。 $H_j^{(2)}$ を定める
式は

$$H_{j-i}^{(2)} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{z-1} \tanh^{-1} (\tanh \beta J_{jk} \tanh \beta H_{k-jk}^{(2)}) \quad (2)$$

である。 (1) (2) の $\sum$ の中の 1 項

$$\tanh^{-1} (\tanh \beta J_{jk} \tanh \beta H_{k-jk}^{(2)}) = h_{jk} \quad (2')$$

は single bond jk において k から j に働く有効場であることを h_{jk}
と記す。

$$H_{j-i}^{(2)} = \sum_{k \neq i} h_{jk} + H_j \quad (3)$$

である。

ランダム系では J の分布が与えられる。例として $\pm J$ モデルでは

$$P(J) = p \delta(J - J_0) + (1-p) \delta(J + J_0) \quad (4)$$

或は Gaussian モデル

$$P(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta_J} \exp \left[-\frac{(J - J_0)^2}{2 \Delta_J^2} \right] \quad (5)$$

等。以下 $\pm J$ モデルの場合を考える。 (1) は

$$H_i^{(1)} = \sum_{j=1}^z h_{ij} + H_i \quad (6)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \tanh \beta H_i^{(1)} \quad (7)$$

のように書ける.

ここに2つのランダム系としてまずランダムに与えられるポンドランダム系を考へる. ランダム系では J の分布のため, $h, H^{(2)}, H^{(1)}$ に分布を与える. その分布関数を $g(h), G^{(1)}(H^{(1)}), G^{(2)}(H^{(2)})$ とする.

(3) および (6) により外場 $H_L = 0$ の場合を考へると

$$G^{(2)}(H^{(2)}) = \int \delta(H^{(2)} - \sum_{k=1}^{Z-1} h_k) \prod_{k=1}^{Z-1} g(h_k) dh_k \quad (8)$$

$$G^{(1)}(H^{(1)}) = \int \delta(H^{(1)} - \sum_{k=1}^Z h_k) \prod_{k=1}^Z g(h_k) dh_k \quad (9)$$

の関係がある, (8)(9) より $g(h)$ の Fourier 変換 $S(k)$ が合れば $G^{(2)}(H^{(2)}), G^{(1)}(H^{(1)})$ は $[S(k)]^{Z-1}, [S(k)]^Z$ の逆 Fourier 変換で与えられることが分る.

(2') と (3) より

$$g(h) = \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \ln^{-1}(\ln \beta J + \ln \beta H^{(2)})) G^{(2)}(H^{(2)}) dH^{(2)} P(J) dJ \quad (10)$$

$$g(h) = \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \ln^{-1}(\ln \beta J + \ln \beta \sum_{k=1}^Z h_k)) \prod_{k=1}^Z g(h_k) dh_k P(J) dJ \quad (11)$$

となる. これが $g(h)$ の満たすべき積分方程式である. $g(h)$ が h の保測度の場合 $P(J)$ は次の積分を除いても差支ない*ので以下この場合を考へる.

$$\S \quad T \rightarrow 0 \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln^{-1}(\ln \beta J + \ln \beta H) = \operatorname{sgn}(J) \operatorname{sgn}(H) \min(|J|, |H|) \quad (12)$$

が成立つことに注意する. (以下 $T \rightarrow 0$ の場合を考へる.) また $J_0 = 1$ とする. (10)(11) より

$$g(h) = \int \delta(h - \operatorname{sgn}(H^{(2)}) \min(|H^{(2)}|, 1)) \delta(H^{(2)} - \sum_{k=1}^Z h_k) dH^{(2)} \\ \times \prod_{k=1}^Z g(h_k) dh_k \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dH^{(2)} dy e^{iy H^{(2)}} \delta(h - \operatorname{sgn}(H^{(2)}) \min(|H^{(2)}|, 1)) \\ \times \prod_{k=1}^Z \int e^{-iy h_k} g(h_k) dh_k \quad (14)$$

* (11) と (4) より

$$g(h) = p \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_0 + \text{th}(\beta \sum' h_k))) \prod g(h_k) dh_k \\ + (1-p) \int \delta(h + \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_0 + \text{th}(\beta \sum' h_k))) \prod g(h_k) dh_k \quad (11')$$

第2項を $h_k = -h'_k$ とおけば $g(h)$ が偶関数だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dh_k g(h_k) = - \int_{-\infty}^{\infty} dh'_k g(-h'_k) = \int_{-\infty}^{\infty} dh'_k g(h'_k)$$

すなわち h'_k を h_k とおけばよい

$$(11') = \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_0 + \text{th}(\beta \sum' h_k))) \prod g(h_k) dh_k$$

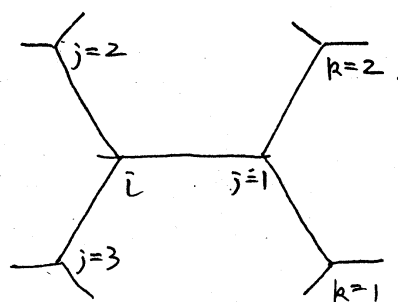


図 1

$$= \frac{1}{2\pi} \int dH^{(2)} e^{i y H^{(2)}} \delta(h - \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)) [S(y)]^{z-1} dy \quad (15)$$

ここから

$$S(x) = \int g(h) e^{-ixh} dh. \quad (16)$$

(16)の左辺に e^{-ixh} をかけ dh で積分すると

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int K(x, y) [S(y)]^{z-1} dy \quad (17)$$

$$K(x, y) = \int e^{i y H^{(2)}} \delta(h - \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)) e^{-ixh} dH^{(2)} dh \quad (18)$$

$$= \int e^{i y H^{(2)}} e^{-ix \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)} dH^{(2)} \quad (18')$$

(18)は非線型積分方程式の標準の形である。

§

ここから

$$S(x) = \sum_{l=-n}^n \mu_l e^{i \frac{l}{n} x} \quad (19)$$

よって

$$g(h) = \sum_{l=-n}^n \mu_l \delta(h - \frac{l}{n}) \quad (20)$$

とすると

$$[S(y)]^{z-1} = \left[\sum_{l=-n}^n \mu_l e^{i \frac{l}{n} y} \right]^{z-1} = \sum a_m e^{i \frac{m}{n} y} \quad (21)$$

$$G(H^{(2)}) = \sum_{m=-(z-1)n}^{(z-1)n} a_m \delta(H^{(2)} - \frac{m}{n}) \quad (21')$$

とすると

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i y H^{(2)}} \sum a_m e^{i \frac{m}{n} y} e^{-ix \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)} \frac{dy}{dH^{(2)}} \quad (21'')$$

dy を $dH^{(2)}$ とすると

$$= \sum a_m \int \delta(H^{(2)} - \frac{m}{n}) e^{i x \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)} dH^{(2)} \quad (21''')$$

$$= \sum_{-n+1}^{n-1} a_m e^{i x \frac{m}{n}} + \left(\sum_{-(z-1)n}^{-n} a_m \right) e^{-ix} + \left(\sum_n^{(z-1)n} a_m \right) e^{ix} \quad (22)$$

(21) より a_m は $(\sum_{l=-n}^n \mu_l z^l)^{z-1}$ の z^m の係数である. (22)
より

$$\mu_l = \sum_{l_1} \sum_{l_2} \cdots \sum_{l_{z-1}} \mu_{l_1} \mu_{l_2} \cdots \mu_{l_{z-1}} \quad l = -n-1, -n-2, \dots, n-1 \quad (23)$$

$$\sum l_i = l$$

$$\mu_n = \sum_{l=n-1}^{(z-1)n} \sum_{l_1} \sum_{l_2} \cdots \sum_{l_{z-1}} \mu_{l_1} \mu_{l_2} \cdots \mu_{l_{z-1}} \quad (24)$$

$$\sum l_i = l$$

$$\mu_{-n} = \sum_{l=-(z-1)n}^{-n} \sum_{l_1} \sum_{l_2} \cdots \sum_{l_{z-1}} \mu_{l_1} \mu_{l_2} \cdots \mu_{l_{z-1}} \quad (24')$$

という $(2n+1)$ 変数 $(z-1)$ 次 ^{の連立} 代数方程式が得られる.
対称解 $\mu_l = \mu_{-l}$ の場合 $l = 0, 1, \dots, n-1$ についての (23)
と

$$2 \sum_{l=1}^n \mu_l + \mu_0 = 1 \quad (25)$$

が $n+1$ 個の変数に対して十分である.

$z=2$ に対する (23)(25) は

$n=1$

$$\begin{aligned} \mu_0 + 2\mu_1 &= 1 \\ \mu_0^2 + 2\mu_1^2 &= \mu_0 \end{aligned} \quad (26)$$

$n=2$

$$\begin{aligned} \mu_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 &= 1 \\ \mu_0^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 &= \mu_0 \\ \mu_1\mu_2 + 2\mu_0\mu_1 &= \mu_1 \end{aligned} \quad (27)$$

等と T83.

(23), (25) 等) は シンガリ 代数方程式 として知られている式で,
 n が 大 小 なるにつれて 急激に 複雑 と なる. Gröbner basis
の方法を用いると μ_0 についての 2^n 次の 整 数 係 数 代 数 方 程 式
 $F(\mu_0) = 0$ と $2^n - 1$ 次 の 多 項 式 $f_l(\mu_0)$ による $\mu_l =$
 $f_l(\mu_0)$ に 帰 着 される.

例2は"

$$n=1$$

$$3\mu_0^2 - 4\mu_0 + 1 = 0$$

(28)

$$2\mu_1 + \mu_0 - 1 = 0$$

$$n=2$$

$$21\mu_0^4 - 46\mu_0^3 + 34\mu_0^2 - 10\mu_0 + 1 = 0$$

$$4\mu_1 + 42\mu_0^3 - 71\mu_0^2 + 34\mu_0 - 5 = 0$$

(29)

$$4\mu_2 - 42\mu_0^3 + 71\mu_0^2 - 32\mu_0 + 3 = 0$$

等.

μ_0 の方程式 (23) (25) から その解 を求めることは $n=1$, 4 変数の z に対し

$$z$$

$$\mu_0 = \mu_0^{z-1} {}_2F_1\left(\frac{1-z}{2}, 1-\frac{z}{2}; 1; \left(\frac{1-\mu_0}{\mu_0}\right)^2\right)^{1-1/z} \quad (30)$$

と与えられた, 特異は $z=3$ に対しては $\mu_0 = \mu_1 = \mu_{-1} = \frac{1}{3}$. (Katsura et al 1979).

$z=3$ に対し $n=2$ 以上の解の存在は Inawashiro が注意した (1980). $z=3$ に対し $n=1, 2, 3, 4$ を数値計算で Miyamoto が求めた, Gröbner basis による解は Fukuda が理研の SAC2 の subroutine を用いて $n=3$ まで求めた. Gebauer が $n=4$ を Gröbner basis で求めた.²⁾³⁾ この問題の $n=5$ 以上の Gröbner basis を求めることは数式処理研究会のよい例題となってきた. (Moritsugu, 林⁴⁾)

$z=3$ の $F_n(\mu_0) = 0$ は μ_0 の 2^n 次式であるが物理的に意味のあるものは確率分布の意味をもつもので, $1 \geq \mu_l \geq 0$ をみたすものである. その解の数は

n	1	2	3	4	5
物理的に意味のある解	2	3	3	4	3
物理的に意味のない実数解	0	1	3	8	
複素解	0	0	2	4	
全数	2	4	8	16	
$\omega(n)$	1	2	2	3	2

となつてゐる. 特に物理的に意味のある解の数は n の約数の数を

$\omega(n)$ とすると $\omega(n)+1$ となる居り, n に対する解は n の約数に
 対するすべての解を含んでいる. $n=1, 2, 3, 4$ に対する解 $g(h)$ の
 様子は以前に示したので省略する.^{3) 8)}

§ 連続分布解⁵⁾

図2より $n \rightarrow \infty$ の極限での解は $h=-1, 0, 1$ における δ 関数と
 $-1 < h < 1$ における連続関数の和で与えられることが予想される.
 Morita (1984) は $-1 < h < 1$ を 512 分割して数値計算でこの
 連続関数部分を求め, ここでは解析的に解を求める.

(18) より

$$K(x, y) = \int_1^{\infty} dH^{(2)} e^{iyH^{(2)} - ix} + \int_{-\infty}^{-1} dH^{(2)} e^{iyH^{(2)} + ix} \\ + \int_0^1 dH^{(2)} e^{i(y-x)H^{(2)}} + \int_{-1}^0 dH^{(2)} e^{i(y+x)H^{(2)}} \quad (31)$$

$$= 2\pi \cos x \delta(y) - 2 \cos x \frac{\sin y}{y} + \frac{\sin(y-x)}{y-x} + \frac{\sin(y+x)}{y+x} \quad (32)$$

$S(x)$ を偶関数に限れば (32) の右辺第4項を除き第3項の
 係数を2倍にしてよい. 以下 Bessel 関数の加法定理

$$\frac{\sin(y+x)}{y+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (1+2n) j_n(x) j_n(y) \quad (32)$$

を用いると

$$K(x, y) = 2\pi \cos x \delta(y) - 2j_0(y) \cos x + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1+4n) j_{2n}(x) j_{2n}(y) \quad (33)$$

$S(x)$ を

$$S(x) = a + b \cos x + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{2\ell} j_{2\ell}(x) \quad (34)$$

と仮定 (33)(34) を積分方程式に入れると未知係数の間の代数方
 程式

$$a = a^2 + b^2/2 \quad (35)$$

$$b = 2ab + bc_0 + b^2/2 + c_0^2 - \sum_{\ell} \sum_m c_{2\ell} c_{2m} I_{0,2\ell,2m} \quad (36)$$

$$c_{2n} = 2ac_{2n} + 2b(1+4n) \sum_{\ell} c_{2\ell} I_{2\ell,2m} + (1+4n) \sum_{\ell} \sum_m c_{2\ell} c_{2m} I_{2\ell,2m,2n} \quad (37)$$

を得る。なお

$$a + b + c_0 = 1 \quad (38)$$

が成立つ。ここには

$$I_{2l,2m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy j_{2l}(y) j_{2m}(y) \cos y$$

$$I_{2l,2m,2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy j_{2l}(y) j_{2m}(y) j_{2n}(y) \quad (39)$$

で

$$I_{00} = \frac{1}{2} \quad I_{02} = 0 \quad I_{22} = \frac{7}{80} \quad I_{000} = \frac{3}{4} \quad I_{002} = \frac{1}{16} \quad I_{022} = \frac{1}{160} \quad I_{222} = \frac{9}{256}$$

等である。 $I_{2l,2m}$, $I_{2l,2m,2n}$ は l, m, n の増加と共に急激に小さくなるので (35) を l, m, n を有限で打ち切ってもよい近似が得られると考えられる。これもまた Gröbner basis のよい例題である。規格化条件 (36) があるのを例えは C_2 まで求めるには (37) は C_0 に対する式のみを用いなければならない。 b まで打ち切った場合は前節の $n=1$ の結果を再現する。表 1.2.1 に C_0 まで打ち切った場合および C_2 まで打ち切った場合の Gröbner basis を示す。 C_0 までとつたときと C_2 までとつたときの結果を比較してこの truncation の収束が非常によいことが分る。 C_2 までとつたときの $g(h)$ の図も ref. 1, 8 に示している。前節の場合には任意の n を与えたとき積分方程式の正確解を与えたが、本節では C_l を l で打ち切ったときの解は収束の極めてよい正確解に収束する関数列を与える。

2. 其後の展開.

以上 $z=3$ の場合についてのべた. $z=4, 5, 6$ に対しては非連続解に対して Inawashiro-Katsura 1980 がある. 連続解に対して Sasaki-Katsura 1988 がある.⁶⁾

3強磁性 bond の濃度(確率) $P(5)$ を (4) の形に与えたとし, p をかえると $g(h)$ がどう変るかという問題は Sasaki-Katsura⁷⁾ がある. このとき (32) は

$$K(x, y) = 2\pi \delta(y) \cos x$$

$$\begin{aligned} & -2p \frac{\sin(y-x)}{y} - 2(1-p) \frac{\sin(y+x)}{y} \\ & + 2p \frac{\sin(y-x)}{y-x} + 2(1-p) \frac{\sin(y+x)}{y+x} \end{aligned} \quad (40)$$

と取り,

$$S(x) = a + b \cos x - ic \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n d_n j_n(x) \quad (41)$$

とおく. h は

$$\begin{aligned} g(h) = & a \delta(h) + \frac{1}{2} \{ (b+c) \delta(h-1) + (b-c) \delta(h+1) \} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} d_{\ell} P_{\ell}(h) \quad (|h| \leq 1) \end{aligned} \quad (42)$$

とおく. $a, b, c, d_0, d_1, d_2, d_3$ は (41), (42) と (17) に代入して $a, b, c, d_0, d_1, d_2, d_3$ までの代数方程式は表 3 のようになる. 解は

- 1) $a=1, \quad b=c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$
- 2) $a=\frac{1}{3}, \quad b=\frac{2}{3}, \quad c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$
- 3) $a=\frac{1}{2p-1}, \quad b=2-\frac{1}{2p-1}, \quad c=[(8p-7)(4p-3)]^{1/2}/(2p-1)$
- 4) $a=0.10683, \quad b=0.43686, \quad d_0=0.45631, \quad d_2=0.05759$
 $c=d_1=d_3=0$
- 5) $a, b, \dots, d_3 \neq 0$ の p の関数である解

に分れる. 今まで得られている 1) - 4) の他 5) が得られた.⁷⁾

$g(h)$ の図は別に発表する.⁷⁾ どの領域でどの解が物理的に実現されるかについては現在検討中である. また energy の極値と積分方程式の解の関係も近く発表する.

References

- 1) (1) (2) の導出は
 S. Katsura and S. Fujiki, J. Phys C. 12 (1979) 1087
 総合報告と12
 S. Katsura, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 87 (1986) 139
 桂, 猪苗代, 木公原, 藤木, 日本物理学会誌 42 (1987) 639.
 S. Katsura, S. Inawashiro and T. Morita, J. Phys A 21
 (1988) 1937.
- 2) B. Buchberger, in Multidimensional Systems Theory
 (N.K. Bore ed.) (1985, Reidel, Dordrecht) 184.
 W. Boerge, R. Grebner, and H. Kredel, J. Symbolic
 Computation 1 (1986) 83.
- 3) S. Katsura, W. Fukuda, S. Inawashiro, N.M. Fujiki
 and R. Grebner, Cell Biophys. 11 (1987) 309.
- 4) S. Moritsugu, On solving a system of algebraic
 equations by using a Gröbner basis, ISSAC 1988
 い村英恒 連立代数方程式の簡易化とその解法, 1986, 9.26
 統研
- 5) 1) の Progress の Supplement 参照
- 6) M. Sasaki and S. Katsura, Physica in press.
- 7) M. Sasaki and S. Katsura, Physica in press.
- 8) 桂 理研シンポジウム 1968, 2月, 数式処理通信 5 No.4
 1988, 11月. p.13.

表 1. C_0 までのときの Gröbner basis
とその解

```

A>reduce33
in "gro2.red";
off time;

off ratpri$

load "groebner"$

f1:=-a+a**2+b**2/2$

f21:=3/4*c0**2+c0*c2/8+c2**2/160$

f2:=-b+2*a*b+b*c0+b**2/2+c0**2-f21$

f3:=-c0+2*a*c0+b*c0+f21$

f4:=-c2+2*a*c2-7/8*b*c2+5/16*c0**2
+c0*c2/16+45/256*c2**2$

f5:=a+b+c0-1$

c2:=0$

end;

2: groebner((f1,f2,f3,f5),(c0,a,b));

      3      2
(C0 + 27/5*B - 3/2*B - 7/5*B,

      3      2
A - 27/5*B + 3/2*B + 12/5*B - 1,

      4      3      2
B - 4/9*B - 4/9*B + 16/81*B)

3: in "gr01.red";
solve(third(input(2)),b);

(B=0,B=4/9,B=2/3,B= - 2/3)
multiplicities!$;

(1,1,1,1)

```

```
y1:=first(input(2));
```

101

```
Y1 := (54*B3 - 15*B2 - 14*B + 10*C0)/10  
y2:=second(input(2));
```

```
Y2 := (10*A - 54*B3 + 15*B2 + 24*B - 10)/10  
b:=0$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
{C0=0}  
solve(y2,a);
```

```
{A=1}
```

```
clear b$
```

```
b:=4/9$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
{C0=4/9}  
solve(y2,a);
```

```
{A=1/9}
```

```
clear b$
```

```
b:=2/3$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
{C0=0}  
solve(y2,a);
```

```
{A=1/3}
```

```
clear b$
```

```
b:=-2/3$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
{C0=4/3}  
solve(y2,a);
```

```
{A=1/3}
```

```
end;
```


表3 非対称分布の代数方程式

$$a = a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2$$

$$b = \frac{1}{2}b^2 + 2ab + d_0^2 + bd_0 + \frac{1}{2}c^2$$

$$- \left(\frac{3}{4}d_0^2 - \frac{1}{8}d_0d_2 - \frac{5}{48}d_1^2 + \frac{1}{48}d_1d_3 + \frac{1}{160}d_2^2 + \frac{19}{1792}d_3^2 \right)$$

$$c = (2p-1) \left\{ 2ac + bc + \left(cd_0 + \frac{1}{2}bd_1 - \frac{1}{8}bd_3 \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3}d_0d_1 + \frac{7}{120}d_1d_2 - \frac{19}{560}d_2d_3 \right) \right\}$$

$$d_0 = 2ad_0 + \left(bd_0 - \frac{1}{2}cd_1 + \frac{1}{8}cd_3 \right)$$

$$+ \left(\frac{3}{4}d_0^2 - \frac{1}{8}d_0d_2 - \frac{5}{48}d_1^2 + \frac{1}{48}d_1d_3 + \frac{1}{160}d_2^2 + \frac{19}{1792}d_3^2 \right)$$

$$d_1 = (2p-1) \left\{ 2ad_1 + \left(\frac{3}{2}cd_0 - \frac{1}{2}bd_1 - \frac{3}{8}cd_2 + \frac{3}{8}cd_3 \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{8}d_0d_1 - \frac{5}{16}d_1d_2 + \frac{13}{128}d_2d_3 - \frac{1}{16}d_3d_0 \right) \right\}$$

$$d_2 = 2ad_2 + \left(\frac{5}{8}cd_1 - \frac{7}{8}bd_2 + \frac{5}{16}cd_3 \right)$$

$$+ \left(-\frac{5}{16}d_0^2 + \frac{1}{16}d_0d_2 + \frac{25}{96}d_1^2 - \frac{65}{384}d_1d_3 - \frac{45}{256}d_2^2 + \frac{45}{512}d_3^2 \right)$$

$$d_3 = (2p-1) \left\{ 2ad_3 + \left(-\frac{7}{8}cd_0 + \frac{7}{8}bd_1 - \frac{7}{16}cd_2 - \frac{5}{16}bd_3 \right) \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{7}{48}d_0d_1 + \frac{91}{384}d_1d_2 - \frac{63}{256}d_2d_3 - \frac{19}{128}d_3d_0 \right) \right\}$$

$$a + b + d_0 = 1$$