

ある種の二次的作用素とその応用

広 大 理 小 林 貞 一

§ 1. 序

Steenrod の *reduced power operations* に対して成立するカップ積公式を二次的コホモロジー作用素に対して考察する問題については, J. Adem [1], [2], O. Valdivia [8], L. Kristensen [4], [5], R. J. Milgram [6], E. Thomas [7] などが研究している。[1], [2], [8] では *functional operations* が [4], [5] では *cochain operations* が用いられる。[4], [5], [6], [8] は, $\mathbb{Z}_2$ 係数の場合の考察である。以後 p を奇素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を位数 p の巡回群とする。

ρ^i を i th $\text{mod } p$ reduced power operation, Δ を完全系列 $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$ に associate された $\text{mod } p$ Bockstein operation とする。目的は, コホモロジー類 u, v のカップ積 $u \cup v$ に対する ρ^i あるいは Δ の値を求める公式

$$\rho^k(u \cup v) = \sum_{i=0}^k \rho^i u \cup \rho^{k-i} v \quad (\text{Cartan formula})$$

$$\Delta(u \cup v) = \Delta u \cup v + (-1)^{\dim u} u \cup \Delta v$$

を, 1次的作用素の Kernel を定義域としてもち, 1次的作用素の Cokernel を値域としてもつところの 2次的作用素の場合に考えることである。すなわち, 問題は, 安定 2次的作用素 Φ が与えられたとき, 適当な条件を満たす u, v に対し

$$\Phi(u \cup v) \equiv \sum \Phi'(u) \cup \Phi''(v)$$

なる 1次的又は 2次的作用素 Φ', Φ'' を求めよということである。このような公式が存在することは, L. Kristensen, R. J. Milgram, E. Thomas などによって確立された。([4] の主定理及び例は *incorrect* である由)。しかし, 具体的に Φ', Φ'' を求める問題は, Φ を与える都度考える必要がある。

2次的作用素に関するカップ積公式について最初に得られたのは, J. Adem [2] による次の結果である。

定理 (1.1) (J. Adem) 「 $R(s)$ を, $\Delta, \rho^i (i = 0, 1, \dots, p^s)$ によって生成された free associative algebra over $\mathbb{Z}_p$ とし, $R^+(s)$ を, $\Delta, \rho^i (i = 1, \dots, p^s)$ によって生成された $R(s)$ のイデアルとする。 Φ を degree $r+1$ の関係式

$$\sum_{k=1}^n \theta_k \varphi_k = 0 \quad (\theta_k \in R^+(s), \varphi_k \in R^+(s))$$

で定まる安定2次的作用素とする。 $u \in H^l(X; Z_p)$, $v \in H^m(X; Z_p)$ ($l > 0$, $m > 0$) を, $R^+(s) \cdot u = 0$, $R^+(s) \cdot v = 0$ なる元とすれば, $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u \cup v)$ が定義されて,

$$\Phi(u \cup v) \equiv \Phi(u) \cup v + (-1)^{lr} u \cup \Phi(v)$$

modulo $f^* H^{l+m+r}(K(Z_p, l) \times K(Z_p, m); Z_p) +$

$$\sum_{k=1}^n \theta_k H^{l+m+t_k-1}(X; Z_p) \quad (t_k = \text{degree } \varphi_k)$$

が成り立つ。これより, $f: X \rightarrow K(Z_p, l) \times K(Z_p, m)$ は $g^*(\text{fundamental class}) = u$ なる写像 $g: X \rightarrow K(Z_p, l)$ 及び $h^*(\text{fundamental class}) = v$ なる写像 $h: X \rightarrow K(Z_p, m)$ を用いて $f = (g, h)$ で与えられる。

この定理(1.1)は, 一般の Adem 関係式に対して成立するものであるが, u , v に課せられた条件が強いので, 使えない場合が多い。そこで, Adem 関係式を具体的に与えて, より詳しい結論を得ようと試みた。その内の結果の一つは次である。

Φ_i ($i > 1$) を degree $2(p-1)i + 1$ の Adem 関係式

$$(1.2) \quad \rho^1 \Delta \rho^{i-1} - (i-1) \Delta \rho^i - \rho^i \Delta = 0$$

に *associate* された安定 2 次的作用素とする。 Φ_i は、各空間 X 及び各整数 $q > 0$ に対し、準同型対応

$$\Phi_i : K^q(\Phi_i; X) \rightarrow H^{q+2(p-1)i}(X; \mathbb{Z}_p) / Q^{q+2(p-1)i}(\Phi_i; X)$$

である。ここに、

$$K^q(\Phi_i; X) = \{ u \in H^q(X; \mathbb{Z}_p) \mid \rho^{i-1}u = 0, \rho^i u = 0, \Delta u = 0 \},$$

$$Q^{q+2(p-1)i}(\Phi_i; X) = \rho^1 \Delta H^{q+2(p-1)(i-1)-1}(X; \mathbb{Z}_p)$$

$$- (i-1) \Delta H^{q+2(p-1)i-1}(X; \mathbb{Z}_p) - \rho^i H^q(X; \mathbb{Z}_p)$$

である。このとき、

定理(1.3) 「 k, j を $0 < j < k$ なる整数とする。元 $u \in H^q(X; \mathbb{Z}_p)$, $v \in H^m(X; \mathbb{Z}_p)$ ($l > 0, m > 0$) を *integral classes* の *mod p reductions* とする。もし $j < i \leq k$ なるすべての i に対し $\Phi_i(u)$ が定義され、 $0 \leq i < j$ なるすべての i に対し $\Phi_{k-i}(v)$ が定義されるならば、 $\Phi_k(u \cup v)$ も定義されて次が成立つ。

$$\Phi_k(u \cup v) \equiv \sum_{i=j+1}^k (\Phi_i(u) \cup \rho^{k-i} v) + \sum_{i=0}^{j-1} (\rho^i u \cup \Phi_{k-i}(v))$$

modulo some indeterminacy Q」

§ 2. 定理 (1.3) の証明

2 次的作用素を関数的作用素によって表わす Peterson-Stein の第 2 公式により, 結果は次に述べる (2.1) の証明に帰着される。

与えられた Adem 関係式 (1.2) を次の形で表わしておく。

$$\alpha_i \beta_i = 0 \quad (i > 1)$$

ただし, $\alpha_i = \mathcal{P}^i \Delta - (i-1) \Delta - \mathcal{P}^i$, $\beta_i = (\mathcal{P}^{i-1}, \mathcal{P}^i, \Delta)$ とする。(これらの記号は, $\alpha_i(x, y, z) = \mathcal{P}^i \Delta x - (i-1) \Delta y - \mathcal{P}^i z$, $\beta_i(w) = (\mathcal{P}^{i-1} w, \mathcal{P}^i w, \Delta w)$ を意味する。)

(2.1) 「 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とし, $c \in H^l(Y; \mathbb{Z}_p)$, $d \in H^m(Y; \mathbb{Z}_p)$ ($l > 0$, $m > 0$) を次の条件を満たす元とする。

$$\begin{cases} \Delta c = 0, & \Delta d = 0 \\ f^* \mathcal{P}^i c = 0 & (j \leq i \leq k) \\ f^* \mathcal{P}^{k-i} d = 0 & (0 \leq i \leq j) \end{cases}$$

このとき, 下の両辺にかける関数的作用素が定義されて

$$\begin{aligned} (\alpha_k)_f \beta_k(c \cup d) &\equiv \sum_{i=j+1}^k \{ (\alpha_i)_f \beta_i(c) \cup \mathcal{P}^{k-i} f^* d \} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} \{ \mathcal{P}^i f^* c \cup (\alpha_{k-i})_f \beta_{k-i}(d) \} \end{aligned}$$

(modulo some indeterminacy Q) が成立つ。」

まず, (2.1) を証明する。右辺が定義されることは, 仮定から明らかである。左辺については, 仮定及び Cartan formula より, $\alpha_k \beta_k(c \cup d) = 0$, $f^* \beta_k(c \cup d) = (f^* \rho^{k-1}(c \cup d), f^* \rho^k(c \cup d), f^* \Delta(c \cup d)) = 0$ が得られるから, やはり well-defined である。写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 包含写像と考えよう。仮定より, 元

$$x_i \in H^{\ell+2(p-1)i}(Y, X; \mathbb{Z}_p) \quad \text{such that} \quad j^* x_i = \rho^i c$$

$$y_{k-i} \in H^{m+2(p-1)(k-i)}(Y, X; \mathbb{Z}_p) \quad \text{such that} \quad j^* y_{k-i} = \rho^{k-i} d$$

が存在する。(ただし, $j: Y \rightarrow (Y, X)$ は包含写像。)

$$\begin{aligned} y = \rho^j \Delta \left\{ \sum_{i=j+1}^k (x_{i-1} \cup \rho^{k-i} d) + \sum_{i=0}^{j-1} (\rho^i c \cup y_{k-i-1}) \right\} \\ - (k-1) \left\{ \sum_{i=j+1}^k (x_i \cup \rho^{k-i} d) + \sum_{i=0}^j (\rho^i c \cup y_{k-i}) \right\} \end{aligned}$$

とかくと, $j^* y = 0$ が示されるから, $\delta((\alpha_k)_f \beta_k(c \cup d)) = y$ を得る。ここに, δ は対 (Y, X) のコホモロジー完全系列のコバウンダリーである。一方, 計算により,

$$\begin{aligned} y = \sum_{i=j+1}^k \left\{ (\rho^j \Delta x_{i-1} - (i-1) \Delta x_i) \cup \rho^{k-i} d \right\} \\ + (-1)^{\ell} \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ \rho^i c \cup (\rho^j \Delta y_{k-i-1} - (k-i-1) \Delta y_{k-i}) \right\} \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
 & \delta \left[\sum_{i=j+1}^k \{ (\alpha_i)_f \beta_i(c) \cup f^* \rho^{k-i} d \} + \sum_{i=0}^{j-1} \{ f^* \rho^i c \cup (\alpha_{k-i})_f \beta_{k-i}(d) \} \right] \\
 &= \sum_{i=j+1}^k \{ \delta((\alpha_i)_f \beta_i(c)) \cup \rho^{k-i} d \} + (-1)^l \sum_{i=0}^{j-1} \{ \rho^i c \cup \delta((\alpha_{k-i})_f \beta_{k-i}(d)) \} \\
 &= y
 \end{aligned}$$

が得られる。これは求める式を意味する。 *indeterminacy* は、証明の中に現れる *indeterminacy* をすべて合せてものである。

次に、(2.1) から定理 (1.3) を導く。 $\gamma \in H^l(K(Z, l); \mathbb{Z}_p)$, $\kappa \in H^m(K(Z, m); \mathbb{Z}_p)$ を *fundamental classes mod p reductions* とする。 $g: X \rightarrow K(Z, l)$, $h: X \rightarrow K(Z, m)$ を $g^* \gamma = u$, $h^* \kappa = v$ なる写像とし, $f: X \rightarrow K(Z, l) \times K(Z, m)$ を, $f = (g, h)$ により定義する。このとき, $f^*(\gamma \times 1) = g^* \gamma = u$, $f^*(1 \times \kappa) = h^* \kappa = v$, $f^*(\gamma \times \kappa) = f^*((\gamma \times 1) \cup (1 \times \kappa)) = u \cup v$ である。 $Y = K(Z, l) \times K(Z, m)$, $c = \gamma \times 1$, $d = 1 \times \kappa$ とおき, Peterson-Steenrod の第2公式 $\Phi_i(f^*(\gamma \times 1)) \equiv -(\alpha_i)_f \beta_i(\gamma \times 1)$ etc. を用いれば, 定理 (1.3) が得られる。

§ 3. 応用例

CP^∞ を無限次元複素射影空間とし, $z \in H^2(CP^\infty; \mathbb{Z}_p)$

$\cong \mathbb{Z}_p$ を生成元とする。

(3.1) 「 $l = N p^{s+1}$, $m = p^s - p^t$, $k = p^s$ ($0 < t < s$, $N > 0$) ならば, indeterminacy 0 で

$$\Phi_k(z^{l+m}) = \sum_{i=2}^k (\Phi_i(z^l) \cup \rho^{k-i} z^m)$$

$$\Phi_i(z^l) = N \Phi_i(z^{p^{s+1}}) \cup z^{l-p^{s+1}} \quad (1 < i \leq k)$$

が得られるので, $\Phi_k(z^{l+m})$ の計算は, $\Phi_i(z^{p^{s+1}})$ の計算に帰着される。例えば, $p = 3$ のとき,

(3.2) 「 $k = 3^s$ ($s > 0$) に対し

$$\Phi_i(z^{3k}) = \begin{cases} \pm z^{5k} & i = k \\ 0 & 1 < i < k \end{cases}$$

が証明されるので, 上の $\Phi_k(z^{l+m})$ は, (符号を除いて) 計算される。

更に, double secondary operations を計算することにより, レンズ空間上のベクトルバンドルの cross sections の問題や, immersion の問題にも適用され, 次の結果が得られる。

(3.3) 「 $r-1 > s > t > 1$, $n = 2 \cdot 3^s + 3^t - 1$ とする。 η を mod 3 レンズ空間 $L^n(3) = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_3$ 上の canonical complex line bundle の real 化とする。このとき, $(3^r - n - 1)\eta$ は, $2 \cdot 3^r + 3^t - 3n$ 個の独立な cross sections をもたない。」

(3.4) 「 $s > t > 1$, $n = 2 \cdot 3^s + 3^t - 1$ とする。このとき,
 $L^n(3)$ は, R^{3n-3^t-1} の中に immerse されない。」

(3.1) - (3.4) の証明は, [3] 参照。

§ 4. 注意.

定理 (1.3) の系として, 次が得られる。

(4.1) 「 $u \in H^l(X; \mathbb{Z}_p)$, $v \in H^m(X; \mathbb{Z}_p)$ ($l > 0$, $m > 0$)

が更に

$$\rho^i u = 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$\rho^i v = 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

を満足するならば, 下の両辺の 2 次的作用素が定義されて,

$$\Phi_k(u \cup v) \equiv \Phi_k(u) \cup v + u \cup \Phi_k(v)$$

(modulo the indeterminacy) が成立つ。」

これは, Adem の結果 (1.1) から得られるものと一致する。

E. Thomas [7] は, Adem 関係式 (1.2) に associate された安定 2 次的作用素 Φ_i に対する別のカップ積公式を与えている。

定理 (4.2) (E. Thomas) 「 $\rho^{p-1} \rho^1 = 0$ に associate された安定 2 次的作用素を Ψ とする。 u, v を

$$\Delta u = 0, \quad \rho^1 u = 0, \quad \rho^p u = 0,$$

$$\Delta v = 0, \quad \rho^p v = 0$$

なる元とすると, 下の両辺における二次的作用素が定義され

$$\begin{aligned} \Phi_{p+1}(u \cup v) \equiv & \Phi_{p+1}(u) \cup v + (-1)^{\dim u} u \cup \Phi_{p+1}(v) \\ & - (-1)^{\dim u} \Psi(u) \cup \Delta \rho^1 v + \sum_{n=1}^{p-1} \Phi_{n+1}(u) \cup \rho^{p-n}(v) \end{aligned}$$

(modulo the common indeterminacy) が成立つ。

§ 5. 文献

- [1] J. Adem, Sobre la formula del producto para operaciones cohomologicas de segundo orden, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 4 (1959), 42-65.
- [2] ———, Sobre operaciones cohomologicas secundarias, ibid. 7 (1962), 95-110.
- [3] T. Kobayashi, On some secondary cohomology operations, Hiroshima Math. J., 1 (1971), 41-73.
- [4] L. Kristensen, On a Cartan formula for secondary cohomology operations, Math. Scand. 16 (1965), 97-115.
- [5] ———, On secondary cohomology operations II, Conference on Algebraic Topology, The University of Illinois at Chicago Circle, 1968, 117-133.
- [6] R. J. Milgram, Cartan formulae (to appear).

- [7] E. Thomas, Whitney-Cartan product formulas,
Math. Zeit., 118 (1970), 115-138.
- [8] O. Valdivia, Algebras de Hopf y formulas del
producto, Bol. Soc. Mat. Mexicana 12 (1967), 1-31.