

位相依存性のないエネルギー変換の定式化の提案

高谷康太郎（京都産業大学）

1 はじめに

2020 年度の異常気象研究会（京都大学防災研究所一般研究集会 2020K-09）において、筆者は「位相依存性のないエネルギー変換」の定式化の提案を行なった。そこでは、「位相依存性のない擾乱エネルギー」 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{2}\psi'q') \quad (1)$$

と定義（ただし、 e は準地衡擾乱エネルギー、 ψ' は準地衡擾乱の流線関数、 q' は準地衡擾乱の渦位）することで、位相依存性のないエネルギー変換が以下の様に導出されることを示した。

$$CK_n = \frac{1}{2}[\{(\psi_x'^2 - \psi' \psi_{xx}') - (\psi_y'^2 - \psi' \psi_{yy}')\} \frac{\partial U}{\partial x} + (\psi_x' \psi_y' - \psi' \psi_{xy}')(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x})] \quad (2)$$

$$CP_n = \frac{f_0^2}{2S^2}\{(\psi_x' \psi_p' - \psi' \psi_{xp}') \frac{\partial U}{\partial p} + (\psi_y' \psi_p' - \psi' \psi_{yp}') \frac{\partial V}{\partial p}\} \quad (3)$$

ここで、 CK_n は順圧エネルギー変換、 CP_n は傾圧エネルギー変換である。ただし、 $(U, V) \equiv \mathbf{U}$ は基本場水平風速、 S^2 は大気安定度に関する量を表す。また、これらは β 平面における p 座標系上の地衡風擾乱に対する定式化である。

その後の考察により、基本場エネルギーと擾乱エネルギーのそれぞれの時間発展の式の整合性を考慮すると、位相依存性のないエネルギーの定義式 (1) 式には修正が迫られることが判明したので、その結果について報告する。なお、上記を正確に説明するためには、詳細かつ精緻な式の導出が必要とされるが、本稿をあまりに長大なものにするのは憚られるため、ここでは

概要を説明するのみに留める。詳細については、現在、準備中の論文にて説明する予定である。

2 位相依存性のないエネルギー変換項導出の重要性

まず、エネルギー変換項を考えることの重要性を簡単に述べる。長周期の大気循環変動の力学的メカニズムを明らかにするための解析手法として、エネルギー変換項を評価することがある (Kosaka and Nakamura 2010, Tanaka et al. 2016 など)。エネルギー変換は、擾乱と基本場との間のエネルギーのやり取りを表し、(2) 式と (3) 式で示したように、運動に伴う順圧成分と、温度に伴う傾圧成分とに分けることが出来る。

先行研究で示されているように、エネルギー変換を調査することは、大気長周期変動の解明の有効な手段になりうるが、その一方で限界も併せ持つ。前回発表時にも説明したが、擾乱から見た順圧エネルギー変換 CK と傾圧エネルギー変換 CP の表式はそれぞれ (β 平面における p 座標系上の地衡風擾乱に対し)、伝統的に

$$CK = (\overline{\psi_x'^2} - \overline{\psi_y'^2}) \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{\psi_x' \psi_y'} (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) \quad (4)$$

$$CP = \frac{f_0^2}{S^2} (\overline{\psi_x' \psi_p'} \frac{\partial U}{\partial p} + \overline{\psi_y' \psi_p'} \frac{\partial V}{\partial p}) \quad (5)$$

と表現されていた。ここで、任意の物理量 P に対し $\overline{P}$ は、十分な長さの P の時間平均を表している。(4) や (5) は擾乱の 2 次の項に基本場風速の勾配を乗じた形となっており、従って、擾乱が $\psi' \approx \sin(kx + ly + mp - \omega t)$ という平面波^{*1}を仮定すると、位相平均しない CK と CP の水

^{*1} 以前も指摘したことだが、 p 座標系にて鉛直 p 方向に平面波を仮定するのは物理的実態をあまり反映しないので好ましくない。ただし本稿では、理論的考察を簡単にすることを優先し、このような仮定を用いた。

平分布は半波長の強い位相依存性を持ってしまうこととなる。この問題を回避するために、「位相依存性のないエネルギー変換項」、すなわち、時間平均や空間平均を取らずとも位相依存性を持たないエネルギー変換項の定式化が必要になるのである。

3 位相依存性のないエネルギーの時間発展方程式

さて、位相依存性のないエネルギー (1) 式の時間発展の方程式を求めると、位相依存しない CK_n , CP_n を求めることができる。まず、 β 平面における p 座標系上の線形化された準地衡渦位方程式

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} + u' \frac{\partial Q}{\partial x} + v' \frac{\partial Q}{\partial y} = s' \quad (6)$$

を考える。ただし、 q' は擾乱渦位、 Q は基本場渦位、 $(u', v') = (-\partial\psi'/\partial y, \partial\psi'/\partial x)$ は擾乱水平風速、 s' は擾乱渦位強制である。(6) 式をもとにして、位相依存性のないエネルギーの時間発展の方程式は以下のように導かれる^{*2}；

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{C}_U \mathcal{E} + \nabla \cdot \mathbf{F} = CK_n + CP_n + D \quad (7)$$

ここで、 CP を基本場流速方向の位相速度として、 $\mathbf{C}_u = C_P \mathbf{U}/|\mathbf{U}|$ と定義される。一方、 $\mathbf{F}$ はエネルギーフラックスで、その水平成分 F_x, F_y と鉛直成分 F_p はそれぞれ、

$$F_x = (\psi'_x \psi'_t - \psi' \psi_{xt}) + U(\psi'_x \psi'_x - \psi' \psi_{xx}) + V(\psi'_x \psi'_y - \psi' \psi_{xy}) \quad (8)$$

$$F_y = (\psi'_y \psi'_t - \psi' \psi_{yt}) + U(\psi'_x \psi'_y - \psi' \psi_{xy}) + V(\psi'_y \psi'_y - \psi' \psi_{yy}) \quad (9)$$

$$F_p = \frac{f_0^2}{S^2} \{ (\psi'_p \psi'_t - \psi' \psi_{pt}) + U(\psi'_x \psi'_p - \psi' \psi_{xp}) + V(\psi'_y \psi'_p - \psi' \psi_{yp}) \} \quad (10)$$

と導出される。重要なことは、ロスビー波の群速度 $\mathbf{C}_g$ としたとき、平面波の極限で

$$\mathbf{F} = (\mathbf{C}_g - \mathbf{C}_U) \mathcal{E} \quad (11)$$

^{*2} 準地衡渦方程式系においては、 ψ' の時間発展方程式は陽には得られないため、 $\mathcal{E}$ の方程式の導出にはそれなりの工夫が必要となる。「工夫」と書けば聞こえは良いが、若干、見通しの良くない式変形であり、かつ複雑なので、導出の詳細は割愛する。

を満たすことである。すなわち $\mathbf{F}$ は、位相速度とともに動く座標系で見たときのロスビー波束の群速度に比例する。また、左辺第2項と第3項を合わせて評価すれば、地上から見た群速度を表現することも理解できる。

右辺の CK_n と CP_n は、それぞれ、(2) 式と (3) 式で定義されたエネルギー変換項であり、 D は非保存項である。従って、(7) 式を用いれば、位相依存性のない擾乱エネルギーの収支を解析できるわけである。また、 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{C}_U \mathcal{E}$ を用いれば、ロスビー波束の群速度伝播も調査することは可能である^{*3}。

また、重要なこととして、停滞性擾乱 $CP = 0$ 及び周波数 $\omega = 0$ に対しては、(7) 式の左辺第2項と (8)~(10) 式で表された $\mathbf{F}$ の各成分の右辺第1項が0となるため、表式が簡単になることが挙げられる。実際、停滞性擾乱にたいするエネルギーフラックス $\mathbf{F}_S$ の各成分は以下の様な形に帰着される。

$$F_{Sx} = U(\psi'_x \psi'_x - \psi' \psi_{xx}) + V(\psi'_x \psi'_y - \psi' \psi_{xy}) \quad (12)$$

$$F_{Sy} = U(\psi'_x \psi'_y - \psi' \psi_{xy}) + V(\psi'_y \psi'_y - \psi' \psi_{yy}) \quad (13)$$

$$F_{Sp} = \frac{f_0^2}{S^2} \{ U(\psi'_x \psi'_p - \psi' \psi_{xp}) + V(\psi'_y \psi'_p - \psi' \psi_{yp}) \} \quad (14)$$

$\mathbf{F}$ には時間微分項が陽に含まれ、実際の解析時にやや不便であるが、 $\mathbf{F}_S$ には含まれない。 $\mathbf{F}_S$ が (12)~(14) 式の様に定義されることは、実際の解析に使用しやすいといえ、大きなメリットといえよう。ただし、(12)~(14) 式は停滞性擾乱にのみ適用可能であることに注意する。従って、一般的な考察には、移動性擾乱にも適用可能な (7) 式と (8)~(10) 式を用いるべきである。

^{*3} 移動性擾乱に対し、実際の解析で位相速度 CP を評価するのはかなり困難ではあるが、統計的に求めることは不可能ではない。 $\mathbf{C}_U$ を求めることが難しい場合は、 $\mathbf{F}$ だけでも評価すれば「位相速度に乗って観測した群速度」を解析できることとなる。本文の以下に示すように、停滞性擾乱 $CP = 0$ に対しては、 $\mathbf{F}$ が「地上から見た群速度」と合致することは言うまでもない。

4 基本場エネルギーの時間発展方程式と擾乱エネルギーとの整合性

さて、実はここまでの内容は、2020 年度の異常気象研究会（京都大学防災研究所一般研究集会 2020K-09）までには導出を終えていた（もっとも、その発表会においては、時間の関係で CK_n 、 CP_n の紹介のみにとどまり、エネルギーフラックスの表式（8）～（10）式などについては説明できなかった）。上記までの表式で、一通り、擾乱エネルギーの方程式を導出できた様に（そして早く論文化すればよかった様に）みえるが、実は、(7) 式には多少の問題があり、それは、基本場エネルギーの時間発展方程式との整合性を考察した際に明らかになる。

基本場エネルギー $\bar{E}$ の方程式を、Transformed Eulerian Mean (TEM) 方程式より求めると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}) \bar{E} \\ & \sim \nabla \cdot \mathbf{F}_S - CK_n - CP_n - (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}) \mathcal{E} \end{aligned} \quad (15)$$

のように表される^{*4}。

^{*4} 実は、この表式を求めるためには精緻な議論が要求される。まず、TEM 方程式中に現れる残渣循環の定義には、3次元の場合には任意性が生じてしまう。その困難を回避するためには、Kinoshita and Sato (2013) に従って、残渣循環を（近似的とはいえ）可能な限りラグランジュ運動に近い形に正確に定義する必要がある。さらに、Kinoshita et al. (2019) が指摘した様に、コリオリ項そのものをラグランジュ的に観測した際に現れる項についても考慮する必要がある（これが (15) 式の右辺第4項に反映されている）。ここまでの準備をした上で、基本場エネルギーの時間発展方程式を求める必要がある。これらの議論の詳細の説明には、おそらく、本稿と同じ程度の分量のページを必要とするため、本稿では省略する。なお、(15) のような基本場エネルギーの時間発展方程式の両辺を等号で結ぶためには、式に上記の議論を踏まえた上でないと理解できない項を含める必要がある。しかし、本稿において天下りにその項を与えて等号を成立させて議論を続行するよりは、理解しやすい項のみを明示的に表し、それと引き換えに (15) の両辺を $\sim$ で結ぶ近似的な式とした方が、読者に混乱が少ないと考え、そのように表している。

擾乱エネルギーの式 (7) と基本場エネルギーの式 (15) の両式の両辺を足し合わせて、全エネルギー $\bar{E} + \mathcal{E}$ の式を導出することを考える。エネルギー変換項は、基本場と擾乱場とのやりとりを陽に表すから、両式を足し合わせればキャンセルされることが期待される。一方、エネルギーフラックスすなわち波束伝播の収束発散は基本場に影響を与えうから、これも広義の意味での擾乱と基本場のエネルギーのやり取りと考えられる。すなわち、両式を足し合わせたとき、エネルギーフラックスの効果もキャンセルし合うことが予想される。では実際にどうなるかというと、以下の様な式を得ることができる：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{E} + \mathcal{E}) + \nabla \cdot \begin{pmatrix} U(\bar{E} + \mathcal{E}) \\ V(\bar{E} + \mathcal{E}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \sim -\nabla \cdot \begin{pmatrix} \psi'_x \psi'_t - \psi' \psi_{xt} \\ \psi'_y \psi'_t - \psi' \psi_{yt} \\ \frac{f_0^2}{S^2} (\psi'_p \psi'_t - \psi' \psi_{pt}) \end{pmatrix} \\ & \quad - \nabla \cdot \mathbf{C}_U \mathcal{E} \end{aligned} \quad (16)$$

（これに残渣循環によるジオポテンシャルフラックスなども加わる）。(16) 式を全領域で積分すれば、適切な境界条件のもと、全エネルギー $(\bar{E} + \mathcal{E})$ が保存する性質は証明できる。ただ、(16) 式の右辺の物理的解釈が難しく、果たしてこの式が全エネルギーの時間発展を正しく表現できているかが曖昧である。すなわち、(16) 式の右辺は、エネルギーフラックスの一部がキャンセルされずに残っている^{*5}。(16) 式の右辺は、何らかの基本場・擾乱の場の間のフィードバックを表している可能性があり、それが全エネルギーの時間発展方程式に残っているのは不適切なのでは、という懸念である。

5 ではどのような物理量を考えれば良いのか

以下、ここまで説明した問題を解決するための考察を行う。いきなり「位相依存性のない」形式で議論しては数式があまりに膨大になるため、簡単のため、位相依存性のある（伝統的な）表

^{*5} 停滞性擾乱に対しては、右辺は0となる。つまり、停滞性擾乱に関しては、ここで指摘した問題は発生しない。ただし、移動性擾乱に対しては、ここで指摘した問題が発生する。

式に則って議論を行う。

上記の問題の解決方法の一つとして、新しい擾乱物理量を導入する。それは、

$$\mathcal{RE} = -\frac{1}{2} \frac{q'^2}{(\partial Q / \partial \Psi)} = \frac{U q'^2}{2(\partial Q / \partial y)} \quad (17)$$

という物理量である*6。ただし Ψ は基本場流線関数であり、 $\partial Q / \partial \Psi = -U / (\partial Q / \partial y)$ を用いている。(17) 式は、 $\mathcal{RE}$ が擬運動量に西風基本場 U を乗じたものとなっていることを示している。また、 $\mathcal{RE}$ は擾乱エネルギーから擬エネルギー (Andrews 1983 など) を差し引いた物理量に等しい。

$\mathcal{RE}$ の時間発展式は、(6) 式から簡単に得ることが出来て、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathcal{RE} \\ & + \nabla \cdot \left(\begin{array}{l} U(\psi'_x \psi'_y - e) + V \psi'_x \psi'_y \\ U \psi'_x \psi'_y + V(\psi'_y \psi'_y - e) \\ \frac{f_0^2}{S^2} (U \psi'_x \psi'_p + V \psi'_y \psi'_p) \end{array} \right) = CK + CP \end{aligned} \quad (18)$$

と書ける。左辺の第2項のフラックスは、ロスビー波の基本流から見た群速度 ($C_g - U$) と $\mathcal{RE}$ を乗じたものに等しい。また大事な点は、(18) 式の導出過程には位相速度の制限はついていないため、この式が停滞性及び移動性擾乱の双方に適用可能なことである。

一方、基本場エネルギーの式を擾乱の位相に依存「する」形で表すと

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\begin{array}{l} U(\bar{E} + \mathcal{E}) \\ V(\bar{E} + \mathcal{E}) \\ 0 \end{array} \right) \\ & \sim \nabla \cdot \left(\begin{array}{l} U(\psi'_x \psi'_x - e) + V \psi'_x \psi'_y \\ U \psi'_x \psi'_y + V(\psi'_y \psi'_y - e) \\ \frac{f_0^2}{S^2} (U \psi'_x \psi'_p + V \psi'_y \psi'_p) \end{array} \right) \\ & \quad - CK - CP \end{aligned} \quad (19)$$

と書ける*7。(18) と (19) の両辺を足し合わせ、

全エネルギーの式を導けば、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{E} + \mathcal{RE}) + \nabla \cdot \left(\begin{array}{l} U(\bar{E} + \mathcal{RE}) \\ V(\bar{E} + \mathcal{RE}) \\ 0 \end{array} \right) \sim 0 \quad (20)$$

となる（これに本当は残渣循環によるジオポテンシャルフラックスなども加わるので、上式の両辺は $\sim$ で繋がれている）。(16) とは異なり、(20) の右辺には、波束伝播（の一部）を表す項は残らず、従って「全エネルギー」 $\bar{E} + \mathcal{RE}$ の保存則が自然に導けることが分かる。すなわち、この枠組みでは、「全エネルギー」を構成する擾乱エネルギー（に対応する物理量）は e ではなく $\mathcal{RE}$ となる。また、エネルギー変換項は、 e というより $\mathcal{RE}$ の時間発展方程式に現れると考えた方が自然であるという結論となる。

6 さいごに；まとめにかえて

新たなる物理量 $\mathcal{RE}$ がなぜ、必要なのだろうか。擬運動量 A が厳密に保存する東西一様基本場で、擬運動量の保存則と TEM 方程式を考え、 $U + A$ の時間発展方程式を得る。その方程式をもとに考えれば、基本場エネルギーに対する擾乱物理量として (UA) を自然に得ることができる。 $\mathcal{RE}$ は、 UA を東西非一様な基本場中の擾乱に拡張したものと考えることができる。なお、(16) 式の右辺の物理的意味を考察すると、全エネルギーの時間発展方程式に $\mathcal{RE}$ が現れることが、これも自然に理解できる。

ここで、次なる課題は、この新たなる物理量 $\mathcal{RE}$ に対応する位相依存性のない物理量を定義し、その時間発展方程式を得ることである。それが達成できれば、位相依存性のないエネルギー

*6 余談だが、この $\mathcal{RE}$ という表記が本当にふさわしいかは良く分からず、今後、変更されるかもしれない。本文で記したように、この量は擾乱エネルギーから擬エネルギーを差し引いた量として定義されているので、「擬き」を差し引いたら残りは「real」だろうという（安直な）考えて、この表記にしている。良い命名があったら教えてください。

*7 なぜ同じ基本場エネルギー $\bar{E}$ なのに、位相依存「し

ない」表式 (15) と「する」表式 (19) の双方で表されるのか。実は、レイノルズ応力を含む基本場フィードバックの方程式から出発すれば、どちらの表式も導くことが可能である。どちらの形式も導かれることは、直感には反するかもしれないが、これは誤りではなく、レイノルズ応力（これ自体は擾乱の位相に依存する）の収束発散が（平面波の極限で、という制限はつくが）実は位相依存しないことから導くことのできる重要な結論なのである。

変換項（と位相依存性のないエネルギーフラックス）を自然に得ることができるであろう。実際、筆者はその表式を得ることに成功しているが、その定式化を説明するには、本稿のここまでの分量の 3 ～ 10 倍程度の分量が必要であることは必定なので、その説明は別の機会に譲ることとしたい。

参考文献

- Andrews, D. G., 1983: A conservation law for small-amplitude quasi-geostrophic disturbances on a zonally asymmetric basic flow. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 85-90.
- Kinoshita, T., and K. Sato, 2013: A formulation of unified three-dimensional wave activity flux of inertia-gravity waves and Rossby waves. *J. Atmos. Sci.*, **70**, 1603–1615.
- Kinoshita, T., K. Takaya and T. Iwasaki, 2019; On the three-dimensional mass-weighted isentropic time mean equation for Rossby waves. *SOLA* **15**, 193-197.
- Kosaka, Y., and H. Nakamura, 2010: Mechanisms of meridional teleconnection observed between a summer monsoon system and a subtropical anticyclone. Part I: The Pacific–Japan pattern. *J. Climate*, **23**, 5085–5108, doi:10.1175/2010JCLI3413.1.
- Tanaka, S., K. Nishii, and H. Nakamura, 2016: Vertical structure and energetics of the western Pacific teleconnection pattern. *J. Climate*, **29**, 6597-6616.
- Takaya, K., and H. Nakamura, 1997: A formulation of a wave-activity flux of stationary Rossby waves on a zonally varying basic flow. *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 2985–2988.
- —, and —, 2001: A formulation of a phase-independent wave-activity flux for stationary and migratory quasi-geostrophic eddies on a zonally varying basic flow. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 608–627.