

1 点の *stabilizer* の *socle* が可解でない 2 重可移群について.

大阪教育大学

平峰 豊

O'Nan [1] により, 2 重可移群の 1 点の *stabilizer* の極小正規部分群全体の積は, アーベル群であるが, 又は, アーベル群と 1 つの非可換単純群の直積に同型になっていることが証明されている。

次のような問題を考える。

(問題) M を非可換単純群とするとき, 2 重可移群 G^{Δ_0} で $G_{\alpha} \supseteq N$, $N \simeq M$ となるものが存在するか?

今までに知られているものでこのような形のものは, S_n , A_n , $Sp(2n, 2)$, $PSL(2, 11)$ (degree 11), A_7 (degree 15), M_{11} (degree 11), M_{11} (degree 12), M_{12} (degree 12), M_{22} (degree 22), $Aut(M_{22})$ (degree 22), M_{23} (degree 23), M_{24} (degree 24), HiS (degree 176), Co_3 (degree 276) があるが Sporadic な単純群で, 今までに知られている 2 重可移表現をもつことが分かっているものは, 全てこの中に含まれていることは興味深い。

$M \cong \text{PSL}(2, 2^n), \text{Sz}(2^n), \text{PSU}(3, 2^n)$ としての結果が [2] に与えられている。次に $\text{PSL}(2, q) \cong M$ ($q = p^n$, p : 奇素数) の場合を考える。この形としているものは、先にあげたものの中には S_6, A_6 ($M \cong \text{PSL}(2, 5)$), S_7, A_7 ($M \cong \text{PSL}(2, 9)$), $\text{PSL}(2, 11)$ ($M \cong \text{PSL}(2, 5)$), A_7 ($M \cong \text{PSL}(2, 7)$), M_{11} ($M \cong \text{PSL}(2, 11)$, degree 12) がある。

条件付きで、次の結果が得られている。

定理. G^{Ω} : 2-trans. $|\Omega|$: even $\alpha \in \Omega$

$$G_{\alpha} \supseteq N^{\alpha} \cong \text{PSL}(2, q) \quad q: \text{odd} \quad N_{\beta}^{\alpha} \neq \text{dihedral} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$\Rightarrow$

(i) G^{Ω} は regular normal subgroup をもつ

(ii) $G^{\Omega} = M_{11}$, $|\Omega| = 12$, $N^{\alpha} \cong \text{PSL}(2, 11)$

又は (iii) $G^{\Omega} = A_6$ or S_6 , $|\Omega| = 6$, $N^{\alpha} \cong \text{PSL}(2, 5)$

証明は [2] と同様である。すなわち、 $|\Omega - \{\alpha\}|$ が奇数であることより、 $|N^{\alpha} : N_{\beta}^{\alpha}|$ が奇数となり、 G^{Ω} の 2 重可移性より N^{α} の 3 の orbit 達の上への可能な置換表現を決めて、更に N^{α} -orbits の数 r を決めて、もとの G^{Ω} を決定するというやり方が用いられる。 N_{β}^{α} が dihedral の場合は、いまのところまだ完全には出来ていない。

References

- [1] M. E. O'Nan : Normal structure of the one-point stabilizer of a doubly-transitive permutation group II , Trans. Amer. Math. Soc. 214 (1975) 43-74
- [2] Y. Hiramane : On doubly transitive permutation groups, to appear in Osaka J. of Math.