

Involutory to double characteristics を持つ microdifferential equation
の microlocal singularity の伝播について

東京大・理 戸瀬信之 (Nobuyuki Tose)

この論文で取り扱う microdifferential equation は次の (1) 式で与えられる

$$(1) \quad P(x, D_x)u = (D_1 D_2 + R(x, D_x))u = 0$$

但し, $u = z^n R(x, D)$ に次の仮定を置く。

$$(2) \quad \text{ord } R(x, D_x) \leq 1$$

$$(3) \quad R(x, D_x) \in \mathcal{E}_{\leq n}, (0, \sqrt{dx_3})$$

$u = z^n$, (1) の算の特性多様体は

$$(4) \quad \Lambda_1 = \{ (x, \sqrt{\xi} dx_\infty) \in \sqrt{S^*R^n}; \xi_1 = 0 \}$$

$$(5) \quad \Lambda_2 = \{ (x, \sqrt{\xi} dx_\infty) \in \sqrt{S^*R^n}; \xi_2 = 0 \}$$

と定めると, P の特性多様体の real point は

$$(6) \quad \text{ch}(P) \cap \sqrt{S^*R^n} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

で与えられる。すなわち,

$$(7) \quad \Lambda = \{ (x, \sqrt{\xi} dx_\infty) \in \sqrt{S^*R^n}; \xi_1 = \xi_2 = 0 \}$$

$$= \Lambda_1 \cap \Lambda_2$$

と定める。ここで, microlocal には, Λ の外では elliptic または simple である。従って, 問題となるのは, Λ 上での micro-
 函数解の構造である。後には詳しく述べるが, 方法としては,
 柏原-河合 [1], 柏原-Y. Laurent [2], Laurent [3] など
 による第2超局所化の理論を用いる。超局所化が, base space
 における方向まで Λ の Analysis すると考えれば, Σ 上の
 第2超局所化の方法とは ΓS^*R^n 中 Λ に横断的な方向まで Λ
 の Analysis する事と言えよう。第2超局所的な議論を経た後に,
 次の超局所的な定理1を得る。

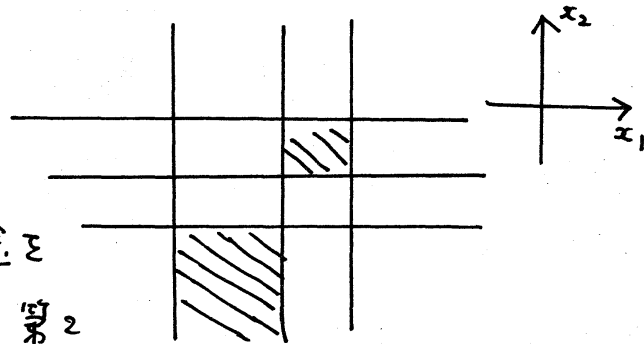
$\Sigma \in \Lambda$ の陪特性帯で p を通るものとする。 Σ は $(\partial x_1, \partial x_2)$
 の積分多様体であるとして,

$$(8) \Sigma = \left\{ (x, \Gamma \xi dx_\infty) \in \Gamma S^*R^n; \xi_1 = \xi_2 = 0, x' = (x_3 \dots x_n) = 0 \right. \\ \left. \xi' = (\xi_3 \dots \xi_n) = (1 0 \dots 0) \right\}$$

と x_1, x_2 で parametrize されることに注意する。

定理1 $C(R^n) \mid \Sigma$ の section 上で $p = (0, \Gamma dx_3 \dots \infty)$ の近傍で
 定義された u が方程式 (1) を満たすと仮定する。この時, Σ 上の
 ∂x_1 の積分曲線の族 $\{b_{t_1}^{(1)}\}_{t_1 \in T_1}$, 及び Σ 上の ∂x_2 の積分
 曲線の族 $\{b_{t_2}^{(2)}\}_{t_2 \in T_2}$ が存在して,
 $\text{supp } u$ は $\Sigma \setminus \left(\bigcup_{t_1 \in T_1} b_{t_1}^{(1)} \cup \bigcup_{t_2 \in T_2} b_{t_2}^{(2)} \right)$ の連結成分のいくつか
 及び $\bigcup_{t_1 \in T_1} b_{t_1}^{(1)}$ 及び $\bigcup_{t_2 \in T_2} b_{t_2}^{(2)}$ の union となる。 $\square$

右図に Σ 上の support の
図を別紙に示しておく。



この定理 1 を得る為の筋道を
説明する為は、次節において第 2
超局所化について復習する。

§ 1. 第 2 超局所化について この節においては、以下の
Notation に従う。 $M = \mathbb{R}^{n_0+n_1}_{(x,t)}$, $X = \mathbb{C}^{n_0}_{(z,w)}$ $\in M$ の複素化
とする。 $\Gamma^{\circ*}M$ の正則包含的部分の様体として、次の標準形
をとる。

$$(9) \quad \Lambda := \{ (x,t; \Gamma(\xi dx + \eta dt)) \in \Gamma^{\circ*}M; \xi = 0 \}$$

さらに、 Λ の複素化として

$$(10) \quad \Lambda^{\mathbb{C}} := \{ (z,w; \zeta dz + \theta dw) \in \dot{\Gamma}^*X; \zeta = 0 \}$$

をとる。

定義 1 $\Lambda^{\mathbb{C}}$ の陪持性帯 $\mathcal{Z}$ Λ を通るものの union を $\tilde{\Lambda}$ と記し、
 Λ の部分複素化と呼ぶ。 ▣

すなわち、

$$(11) \quad \tilde{\Lambda} \simeq \mathbb{C}^{n_0}_z \times \Gamma^{\circ*} \mathbb{R}^{n_1}_{(t, \Gamma \eta dt)}$$

と同視する。 $\tilde{\Lambda}$ 上には、 $z \in \mathbb{C}^{n_0}$ 正則 $\mathbb{R}^{n_1}$ $x - t - \dots$ と (2 冊)
micro 函数の層 $\mathcal{C}^{\circ}$ が取れる。以下

$$(12) \quad \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}} := \mathcal{C}^{\circ}$$

と記す。

柏原先生は $\mathcal{O}$ から $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ を構成したのと同様の手続きで $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}$ から $\mathcal{Z}$ に定める 2-hyperfunction β_{Λ}^2 , 2-micro 函数 $\mathcal{C}_{\Lambda}^2$ を構成した。

定義 2 (13) $\beta_{\Lambda}^2 := \mathcal{H}_{\Lambda}^{n_0}(\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})$

(14) $\mathcal{C}_{\Lambda}^2 := \mathcal{H}_{T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}}^{n_0}(\pi_{\Lambda|\tilde{\Lambda}}^{-1} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})^a$

$$\begin{array}{c} \widetilde{\Lambda} \xrightarrow{\sim} \Lambda^* \\ \downarrow \pi_{\Lambda|\tilde{\Lambda}} \\ \Lambda \end{array}$$

なる層を定め、 β_{Λ}^2 の section 及び $\mathcal{C}_{\Lambda}^2$ の section を 2-hyperfunction, 2-micro 函数と呼ぶ。但し $\pi_{\Lambda|\tilde{\Lambda}}$ は右上図の comonoidal 変換とする。 $\square$

注意 1 柏原 - Y. Laurent [2] に於いて証明されたのは抽象的な Edge of the wedge の定理を用いたと上記の cohomology は純余次元的であることが分る。即ち,

(15) $R\Gamma_{\Lambda}(\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) = \beta_{\Lambda}^2[n_0]$

(16) $R\Gamma_{T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}}(\pi_{\Lambda|\tilde{\Lambda}}^{-1} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) = \mathcal{C}_{\Lambda}^2[n_0]$

が成立する。

$\mathcal{C}_{\Lambda}^2$ に関する exact sequence と (2) 以下のものがあつた。

(17) $0 \rightarrow \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Lambda} \rightarrow \beta_{\Lambda}^2 \rightarrow \pi_{\Lambda*}(\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}}) \rightarrow 0$
(exact)

(18) $0 \rightarrow \mathcal{C}_M|_{\Lambda} \rightarrow \beta_{\Lambda}^2$ (exact).

但し, π_{Λ} は projection $\pi_{\Lambda}: T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ である。

上記の $\mathcal{C}_\Lambda^2$ の理論については柏原 - Y. Laurent [] を参照
 した。次に Y. Laurent の Thesis [] に従い、 $\mathcal{C}_\Lambda^2$ に作
 用する operator を定める。

右図を可換とする
 したがって、 $\Lambda^c \in \Lambda^c \times \Lambda^c$
 に埋め込む。つまり、
 Real の場合と同様に、

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^c & \hookrightarrow & T^*X & \xrightarrow{\sim} & T^*_X(X \times X) \\ \downarrow (19) & & & & \downarrow \\ \Lambda^c \times \Lambda^c & \hookrightarrow & & & T^*(X \times X) \end{array}$$

$\Lambda^c \times \Lambda^c$ の隣接性帯で、 Λ^c を通る ε の union を $\widetilde{\Lambda^c}$ と記す。
 $T^*_\Lambda \widetilde{\Lambda^c}$ の座標として $(x, t, \int x dt, \int x^* dx)$ をとると、
 の複素化として $T^*_{\Lambda^c} \widetilde{\Lambda^c}$ の座標を $(z, w, \theta dw, z^* dz)$ とする。

canonical に local cohomology の言葉で 2-microdifferential
 Operator を定義することは出来るが、この議論では Symbol を用
 いて定義する。

定義 3 $T^*_{\Lambda^c} \widetilde{\Lambda^c}$ 上の層 $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2,\infty}$ を次のように定める。
 $\mathcal{U} (\subset T^*_{\Lambda^c} \widetilde{\Lambda^c})$ を開集合として、 $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2,\infty})$ は次の条件
 を満たす symbol 列 $\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} P_{ij}(z, w, z^*, \theta)$ のことである。

(20) P_{ij} は (z^*, θ) について j 次斉次、 z^* に関して i 次斉次

(21) $\forall k \ll \mathcal{U}$ 及び $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists C_k > 0$ (k に
 による) $\exists C_{k,\varepsilon} > 0$ (ε, k による) が存在して、次の評
 価を $\{P_{ij}\}$ が満たす。

- (i) $\forall i \geq 0 \forall k \geq 0 \quad \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_{\varepsilon,k} \frac{\varepsilon^{i+k}}{i! k!}$
(ii) $\forall i \geq 0 \forall k < 0 \quad \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_{\varepsilon,k}^{-k} \varepsilon^i \frac{(-k)!}{i!}$
(iii) $\forall i < 0 \forall k \geq 0 \quad \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_{\varepsilon,k} \varepsilon^k C_{(-i)!/k!}^{-i}$
(iv) $\forall i < 0, \forall k < 0 \quad \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_k^{-i-k} (-i)! (-k)!$

□

以下 $\mathcal{E}_{\wedge^c}^{2,\infty}$ の性質を列挙する。

(I) 積 $P(z, D) = \sum_{i,j} P_{ij}(z, w, D_w, D_z)$
 $Q(z, D) = \sum_{k,l} Q_{k,l}(z, w, D_w, D_z)$

に対して

$$R = PQ = \sum_{\lambda, \mu} R_{\lambda, \mu} \mathcal{E}$$

$$(22) \quad R_{\lambda, \mu} := \sum_{\substack{\lambda = i+k-|\alpha| \\ \mu = j+l-|\alpha| - |\beta|}} \frac{1}{\alpha! \beta!} (\partial_z^\alpha \partial_w^\beta P_{ij}) (\partial_z^\alpha \partial_w^\beta Q_{k,l})$$

と、2 定める時、 $\mathcal{E}_{\wedge^c}^{2,\infty}$ は $\mathbb{R}$ の層となる。

□

(II) 有限階の作用素 $P \in \mathcal{E}_{\wedge^c}^{2,\infty}$ が $P \in \mathcal{E}_{\wedge^c}^2[i_0, j_0]$ とは次の条件 (23), (24) を満たすことを意味する。

$$(23) \quad P_{ij} \equiv 0 \quad (j > j_0; j = j_0 \text{ かつ } i < i_0)$$

$$(24) \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ に対して } \exists \lambda(j) \in \mathbb{Z} \text{ s.t.}$$

$$P_{ij} \equiv 0 \quad (\text{for } i < \lambda(j))$$

更に

$$(25) \quad \mathcal{E}_{\wedge^c}^2 := \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{E}_{\wedge^c}^2[i, j]$$

と定めるとき, $E_{\Lambda^c}^2$ の環の層と L^2 部分層となる。 $E_{\Lambda^c}^2$ の section を有限階の 2-microdifferential operator と呼ぶ。

$E_{\Lambda^c}^2$ の sub-Ring と L^2 , $\mathbb{R}$ の σ を構成する。

定義 4 $r = \infty$, または $r > 1$ なる有理数とし,

$P \in E_{\Lambda^c}^2$ が $E_{\Lambda^c}^{2, (r, 1)} [i_0, j_0]$ に属するとは $P = \sum_{i, j} P_{ij}$ と展開するとき, 次の条件 (26) を満たす時である。

$$(26) \left\{ (i, j-i); P_{ij} \neq 0 \right\} \subset \left\{ (i, j-i); \frac{1}{r} i + (j-i) \leq \frac{1}{r} i_0 + (j_0 - i_0) \right. \\ \left. i + j - i \leq i_0 + (j_0 - i_0) \right\}$$

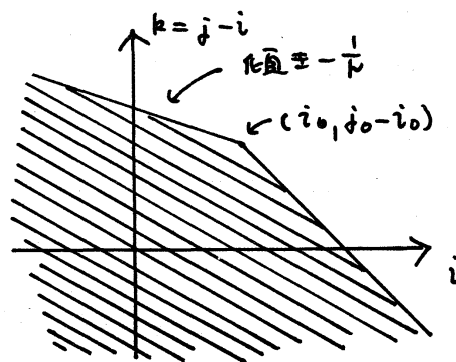
$$(27) \quad E_{\Lambda^c}^{2, (r, 1)} := \bigcup_{i, j} E_{\Lambda^c}^{2, (r, 1)} [i, j]$$

とし定める。



$k = j - i$ とし (26) の右辺の集合は右下図である。

また $E_{\Lambda^c}^{2, (r, 1)}$ は $E_{\Lambda^c}^2$ の sub-Ring となる。



(Ⅲ) 有限階の作用素 (続)

$P = \sum_{i, j} P_{ij} \in E_{\Lambda^c}^2$ に対し P の主要表象 $\sigma_{\Lambda^c}(P)$ を以下の (28) により定める。

$$(28) \quad \sigma_{\Lambda^c}(P) := P_{i_1, j_1} \left(\text{但し } j_1 = \sup \{ j \in \mathbb{Z}; P_{ij} \neq 0 (\exists i) \} \right. \\ \left. i_1 = \inf \{ i \in \mathbb{Z}; P_{i, j_1} \neq 0 \} \right)$$

更に $P \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(r,1)}[i_0, j_0]$ の section $z \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(r,1)}[i_0, j_0]$ よりも
なる $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(r,1)}[i, j]$ に含まれない時

$$(29) \quad \sigma_{\Lambda^c}^{(r,1)}(P) = P_{i_0, j_0}$$

と定める。

2-microdifferential operator の symbol calculus として最も基本的なものは、次の定理である。

定理 (Y. Laurent [3]) $U \subset T_{\Lambda^c}^* \tilde{\Lambda^c}$ を開集合とする。
3. $P \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^2$ の section とする時、

$$(30) \quad P \text{ が } U \text{ 上可逆} \iff \sigma_{\Lambda^c}(P) \neq 0 \text{ on } U$$

更に、 $P \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(r,1)}$ の section とする時、

$$(31) \quad P \text{ が } U \text{ 上 } \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(r,1)} \text{ 中可逆} \iff \sigma_{\Lambda^c}^{(r,1)}(P) \neq 0 \text{ on } U \quad \square$$

例えは D_{z_1} は $\mathcal{E}_X|_{\Lambda^c}$ 中 invertible ではないが、 $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^2$ 中 $\{z_1^* \neq 0\}$ なる所には invertible となる事が知られる。

(IV) Microdifferential Operator • Microcharacteristics.

$$(32) \quad \mathcal{E}_X^\infty|_{\Lambda^c} \longleftrightarrow \mathcal{D}_{\Lambda^c}^{2,\infty} := \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2,\infty}|_{\Lambda^c}$$

なる canonical な埋め込みがある。但し、右辺に於いて $z \in T_{\Lambda^c}^* \tilde{\Lambda^c}$ の 0-section と同一視してゐることに注意する。

更に、この埋め込みを通し

$$(33) \quad \mathcal{E}_X|_{\Lambda^c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\Lambda^c}^2 := \mathcal{E}_{\Lambda^c}^2|_{\Lambda^c}$$

なる同型が引き起こされる。symbol の level z は、 Λ^c に沿った Taylor 展開により記述される。

即ち, $P = \sum_j P_j(z, w, D_z, D_w) \in E_X^\infty|_{\Lambda^c}$ に対し, z ,

$$(34) \quad P_j(z, w, \zeta, \theta) = \sum_\alpha P_j^{(\alpha)}(z, w, \theta) \zeta^\alpha$$

と $\Lambda^c := \{0\}$, z Taylor 展開するとき

$$(35) \quad P_{ij}(z, w, z^*, \theta) := \sum_{|\alpha|=i} P_j^{(\alpha)}(z, w, \theta) z^{*\alpha}$$

と定める。 $i=0$ のとき

$$(36) \quad P = \sum_{i,j} P_{ij} \in E_{\Lambda^c}^{2,\infty}$$

と見做せば, 上記の主張は述べた通りである。

定義 5 M は coherent $E_X|_{\Lambda^c}$ module とする。 $i=0$ のとき M の Λ^c に対し, Γ -microcharacteristic とは Γ に定める $ch_{\Lambda^c}^2(M)$ のことを指す。

$$(37) \quad ch_{\Lambda^c}^2(M) := \text{supp} \left(E_{\Lambda^c}^2 \otimes_{\pi^{-1}E_X|_{\Lambda^c}} \pi^{-1}M \right)$$

但し, $i=0$ のときは

$$T_{\Lambda^c}^* \widetilde{\Lambda^c} \xrightarrow{\pi} \Lambda^c$$

なる projection とする。同様に,

$$(38) \quad ch_{\Lambda^c}^{2(r,1)}(M) := \text{supp} \left(E_{\Lambda^c}^{2,(r,1)} \otimes_{\pi^{-1}E_X|_{\Lambda^c}} \pi^{-1}M \right)$$

とする。これは E type $(r,1)$ の microcharacteristic と呼ぶ。 $\square$

以上が以下の小論に必要な相原 - Y. Laurent [2], Y. Laurent [3] の準備である。

§ 2 Propagation of 2-microlocal singularities.

§1 の準備のもと方程式 (1) を考察する。即ち,

$$(1) \quad Pu := (D_1 D_2 + R(x, D_x)) u = 0$$

$$\Lambda = \{(x, \sqrt{\xi} dx) \in T^*\mathbb{R}^n; \xi_1 = \xi_2 = 0\}$$

上の micro 数解の構造を考察する。

$\xi' = (\xi_3, \dots, \xi_n)$, $x' = (x_3, \dots, x_n)$ と定め、 $T^*\Lambda$ の座標を $(x, \sqrt{\xi'} dx'; \sqrt{x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2})$ と定める。この時,

$$(39) \quad \text{ch}_{\Lambda}^2(P) \cap T^*\Lambda = \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

但し,

$$(40) \quad \Sigma_1 = \{(x, \sqrt{\xi'} dx', \sqrt{x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2}); x_1^* = 0\}$$

$$(41) \quad \Sigma_2 = \{(x, \sqrt{\xi'} dx', \sqrt{x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2}); x_2^* = 0\}$$

であることに注意する。

(1) 上 $\dot{p} = (0, \sqrt{\xi} dx_3)$ の近傍を考察する。(1) は 2-microlocal に等しい。

$\dot{p}_1 = (0, \sqrt{\xi} dx_3, \sqrt{\xi} dx_2) \in \Sigma_1$ の近傍では, (1) は

$$(42) \quad (D_1 + R_1(x, D)) u = 0.$$

と, $\dot{p}_2 = (0, \sqrt{\xi} dx_3, \sqrt{\xi} dx_1) \in \Sigma_2$ の近傍では, (1) は

$$(43) \quad (D_2 + R_2(x, D)) u = 0$$

と equivalent であることが分かる。但し, $R_1(x, D) = D_2^{-1} R(x, D)$, $R_2(x, D) = D_1^{-1} R(x, D)$ とする。更に次の定理が成立する。

定理2 (A) $\dot{P}_1$ の近傍に $Q_1(x, D) \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty}$ 2' $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty}$ 中 invertible

なもの存在し2

$$(44) \quad Q_1(D_1 + R_2(x, D_x)) Q_1^{-1} = D_1$$

が成立する。従って2

$$(45) \quad \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} (D_1 + R_1(x, D)) \simeq \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} D_1$$

が成立する。

(B) $\dot{P}_2$ の近傍に $Q_2(x, D_x) \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty}$ 2' $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty}$ 中 invertible なもの存在し2

$$(46) \quad Q_2(D_2 + R_2(x, D_x)) Q_2^{-1} = D_2$$

が成立する。従って2,

$$(47) \quad \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} (D_2 + R_2(x, D_x)) \simeq \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} D_2$$

が成立する。 ▣

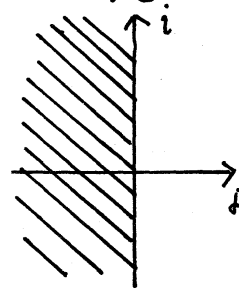
証明は S-K-K [] の第2章定理5.2.1. と同様に行なう。上の Q_1, Q_2 について2, $Q_l = \sum Q_{ij}^{(l)}$ ($l=1, 2$) 2' 2

$$(48) \quad \{(j, i); Q_{ij}^{(l)} \neq 0\} \quad (l=1, 2)$$

は右図に含まれる。本質的には有限階2' 収まり、

2' 113。更に、(1) における $R(x, D)$ に対し2,

Levi条件を課せば、有限階の作用素の範囲2' 2' 話2' 収まる。



定理3 2' (1) の $R(x, D) = \sum_{ij} R_{ij}$ に対し2,

$$(49) \quad R_{0,1}(x, D) \equiv 0$$

が成立するとする。この時,

(A) $\dot{p}_1$ の近傍に $Q_1 \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)}$ かつ $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)}$ 中 invertible なものが存在して (44) を満たす。従って

$$(50) \quad \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} (D_1 + R_1(x, D_x)) \simeq \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} D_1$$

が成立する。

(B) $\dot{p}_2$ の近傍に $Q_2 \in \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)}$ かつ $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)}$ 中 invertible なものが存在して (46) を満たす。よって,

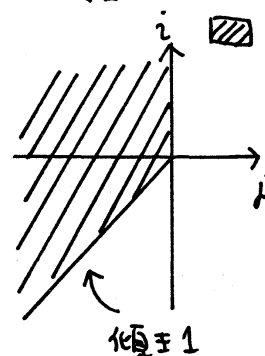
$$(51) \quad \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} (D_2 + R_2(x, D)) \simeq \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2(\infty,1)} D_2$$

なる同型が存在する。

上の Q_1, Q_2 によって $Q_\ell = \sum_{ij} Q_{ij}^{(\ell)}$ とし

$$(52) \quad \{(j,i); Q_{ij}^{(\ell)} \neq 0\} \quad (\ell=1,2)$$

は右図の斜線部に含まれる。



定理 2 及び 2-microfunction に対する de-Rham の定理を用いて次の定理 4 を得る。

定理 4 (A) $\dot{p}_1 = (0, \sqrt{1} dx_3, \sqrt{1} dx_2) \in \Sigma_1$ の近傍で定義された $\mathcal{E}_{\Lambda^c}^2$ の section u (1) を満たすものが考えられる。この時, $\text{supp } u$ は $\{x_1^* = 0\}$ の micro-bicharacteristic $\mathbb{R}P^1$,

$$(53) \quad \{(x_1, x_2, x'; \sqrt{1} \xi' dx'; \sqrt{1} (x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2)); \xi' = \text{const}, x' = \text{const}, x_2 = \text{const}, x_2^* = \text{const}, x_1^* = 0\}$$

の union である。

(B) $\dot{P}_2 = (0; \hbar dx_3, \hbar dx_2) \in \Sigma_2$ の近傍 で定義された $\mathcal{C}_\Lambda^2$ の section $u \in \mathcal{L}^2(1)$ を満足する。この時, $\text{supp } u$ は $\{x_3^* = 0\}$ の micro-bicharacteristic EPTS

$$(54) \left\{ (x, \hbar \xi' dx'; \hbar (x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2)); \begin{array}{l} x' = \text{const}, \xi' = \text{const}, x_1 = \text{const} \\ x_1^* = \text{const}, x_2^* = 0 \end{array} \right\}$$

の union である。 $\square$

この定理 4 と 2-micro 函数における Fundamental exact sequence (17), (18) を用いる時, Introduction に掲げた定理 1 を得る。即ち, $\bigcup_{t_1 \in T_1} b_{t_1}^{(1)}$ 及び $\bigcup_{t_2 \in T_2} b_{t_2}^{(2)}$ は 2-micro local singularities の projection $\pi: \dot{T}_\Lambda^* \tilde{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{L}^2 \Lambda$ に落としたものがあり, その他の 2 次元的な micro local singularity は正則パラメータの一意連続性を通じて現われる。

§3 Multiplicity の高次元場合への拡張

この節では定理 2 を Multiplicity の高次元場合に拡張する。

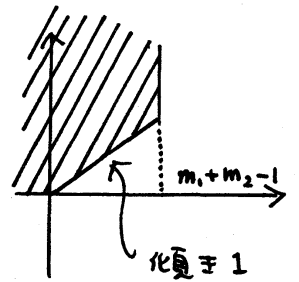
但し, 柏原-大島 [4] の意味で Λ^c に於いて Regular Singularity を持つ場合を扱う。即ち次の方程式 (55) を $(0, \hbar dx_3) \in \dot{T}^* \mathbb{R}^n$ の近傍で考え, (56) (57) の仮定を置く。

$$(55) \quad Pu := (D_1^{m_1} D_2^{m_2} + R(x, D_x)) u = 0$$

但し, 次の条件 (56), (57) を課す。

$$(56) \quad \text{ord } R(x, D_x) \leq m_1 + m_2 - 1.$$

(57) $R(x, D) = \sum_{i,j} R_{ij}(x, D) \quad \text{ただし}$
 $\{(j, i) ; R_{ij} \neq 0\}$ は右上の斜線部に属する。
 この時次の定理5を得る。



定理5 (A) $\dot{p}_1 = (0, \hbar dx_3, \hbar dx_2)$ の近傍で

$$(58) \quad \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty}}{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty} \mathcal{P}} \simeq \left(\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty}}{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty} D_1} \right)^{m_1}$$

(B) $\dot{p}_2 = (0, \hbar dx_3, \hbar dx_1)$ の近傍で

$$(59) \quad \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty}}{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty} \mathcal{P}} \simeq \left(\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty}}{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{2, \infty} D_2} \right)^{m_2}$$

なる同型が存在する。 $\square$

この定理5を用いて, 方程式(55)の $\mathcal{L} = \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$ 上の
 micro 函数解の構造が分る。

§4 複素領域での議論とその応用

この §2 は 以下の Notation に従う。

$$X = \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \quad (n_0 \geq 2)$$

$$\mathcal{L} = \{(z, w, \zeta dz + \theta dw) \in T^*X ; \zeta = 0\}$$

の microdifferential equation $\varepsilon \dot{p} = (0, dw_1)$ の近傍で
 考へる。

$$(60) \quad \mathcal{P}u = (D_{z_1} D_{z_2} + R(x, D)) u = 0$$

但し,

$$(61) \quad \text{ord } R(x, D) \leq 1$$

とする。複素領域に於いて定理 2 は成立する。即ち,
 $\mathring{T}_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}$ の座標 $\Sigma(z, w; \theta dw; z^* dz)$ と $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{P}$ の Λ に沿った
 microcharacteristic は

$$(62) \quad \text{ch}_{\Lambda}^2(\mathbb{P}) = \{(z, w, \theta, z^*) ; z_1^* = 0 \sim z_2^* = 0\}$$

であることに注意する。

定理 6 (A) $(0, dw_1, dz_2) \in \mathring{T}_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}$ の近傍に

$$(63) \quad \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} \mathbb{P} \simeq \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} D_1$$

(B) $(0, \sqrt{1} dw_1, \sqrt{1} dz_1) \in \mathring{T}_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}$ の近傍に

$$(64) \quad \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} \mathbb{P} \simeq \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda}^{2, \infty} D_2$$

が同型が成立する。 $\square$

この定理 6 を用いて次の命題 1, 2 を得る。まず, 次の (65)
 $\Sigma \mathbb{P} = (0, \sqrt{1} dx_3) \in \sqrt{1} \mathring{T}^* \mathbb{R}^n$

$$(65) \quad \mathbb{P} u = \{D_1(D_1 + \sqrt{1} D_2) + R(x, D_2)\} u = 0$$

但し,

$$(66) \quad \text{ord } R(x, D_2) \leq 1$$

と仮定する。microlocal に問題とすると

$$(67) \quad \Lambda = \{(x, \sqrt{1} \xi dx) \in \mathring{T}^* \mathbb{R}^n ; \xi_1 = \xi_2 = 0\}$$

Γ の micro 微分方程式の構造である。従って, 我々は (67) に Σ , Σ

2-microlocalize する。すると, $(D_1 + \sqrt{1} D_2)^{-1}$ から $\mathring{T}_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$

の fibre 全てで存在することには注意すれば,

$$(68) \quad \text{ch}_{\Lambda^c}^2(L) \cap \tilde{T}_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} = \{(x, \hbar \xi' dx', \hbar(x_2^* dx_2 + x_1^* dx_1); x_1^* = 0)\}$$

2" あり 2" あり。

$\tilde{q}_1 = (0, \hbar dx_3, \hbar dx_2) \in \text{ch}_{\Lambda^c}^2(L)$ の近傍 2" 定理 6 を用いる時,

$$(69) \quad \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} L \simeq \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} / \mathcal{E}_{\Lambda^c}^{2, \infty} D_1$$

が成立する。

Λ の bicharacteristic 2" $\tilde{p}$ を通る $\xi_1 \in \Sigma$ とする。この時, 以上の考察により,

命題 1 $u \in \tilde{p}$ の近傍 2" 定義された $C(R^n) \mid \Sigma$ の section 2"

(65) を満たすとする。この時, Σ 上の ∂x_1 の積分曲線の族

$\{b_{t_1}^{(u)}\}_{t_1 \in T_1}$ が存在して,

$\text{supp } u$ は $\Sigma \setminus \bigcup_{t_1 \in T_1} b_{t_1}^{(u)}$ の連結成分の 11 かつ $b_{t_1}^{(u)}$ の union となる。

$\bigcup_{t_1 \in T_1} b_{t_1}^{(u)}$ の union となる。 $\square$

すなわち, 以下の microdifferential eq. $\in \tilde{p} = (0, \hbar dx_4)$ の近傍 2" 考える。

$$(70) \quad (D_1(D_2 + \hbar D_3) + R(x, D_x)) u = 0$$

但し,

$$(71) \quad \text{ord } R(x, D_x) \leq 1$$

と仮定する。(65) と同様に 問題となるのは

$$(72) \quad \Lambda = \{(x, \hbar \xi dx) \in \hbar \tilde{T}^* \mathbb{R}^n; \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0\}$$

の近傍の micro 函数解の構造 2" あり。11 に 36, 2 4 2 超局所化 12 考える。

以上の議論は $\square$ については詳細に $\square$ して $\square$ の修士論文 [7] に見られたい。 (以上)

文献

1. 柏原-河合 : Second Microlocalization and Asymptotic Expansions, Lecture Note in Physics NO. 126, pp 21-76
2. 柏原-Y. Laurent : Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalization, Prepublication d'Orsay.
3. Y. Laurent : Théorie de la deuxième microlocalization dans le domaine complexe : opérateur 2-microdifférentiels, Thesis presented to Université Paris Sud, Centre d'Orsay.
4. 柏原-大島 : Systems of Microdifferential Equations with Regular Singularities and their Boundary Value Problems, Acta Math, 106, pp 145-200
5. 佐藤-柏原-河合 : Hyperfunctions and Pseudodifferential Equations, Lecture Note in Math. No. 287, 1973.
6. A. Grigis - R. Laquer : Équations locales d'un système de sous-variétés involutives. C.R. Acad. Sc. Paris, t 287 série A p.p. 503 ~ 506.
7. 戸瀬 : 修士論文 (1985年1月提出予定)