

$SL(n; \mathbb{C})$ の Eisenstein 級数と概均値バクトル空間

東大 理院 佐藤文宏

Eisenstein 級数の函数等式について、Langlands の展開した理論が存在している。いま、その函数等式を数論的な方法で得ることを考えてみよう。 $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{C})$ などについては、よく知られている。Rank の高い群については、 $SL(n, \mathbb{R})$ に関して、Serberg の仕事を受けて Maass, A. Teras [6] [10] [11] の研究がなされている。ここでは、Maass の方法を概均値バクトル空間の立場から見直して、ある種の多変数 Dirichlet 級数の函数等式と解析接続を証明する。

(p24. 定理) その最も標準的な場合として、 $SL(n, \mathbb{C})$ の不連続群 $SL(n, \mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は類数 1 の虚二次体の整数環) に関する Eisenstein 級数の函数等式が得られる。

概均値バクトル空間の Zeta 函数の理論は、既約な相対不変式が唯一つに限られる (勿論、定数倍を無視し) 場合を除いて、一般的に議論は存在していない。ここで扱う多変数の Dirichlet 級数は、複

数の既約な相対不変式をもつ空間の Zeta 函数の一例となっている。

§ 1. 概均値ベクトル空間 (G_P, V) の定義

m, n ($1 \leq m < n$) を自然数。 $M(n; \mathbb{C}) \ni A$ に対し、 $|A| = \det A$
 $\|A\| = |\det A|$ 。 $M(n; \mathbb{C}) \ni A$, $M(n, \mu; \mathbb{C}) \ni B$ に対し、 $A[B] = {}^t \bar{B} A B$ 。

ν 個の自然数の組 $P = (p_1, \dots, p_\nu)$ は、 $p_1 + \dots + p_\nu = m$ のとき、
 $\text{rank } \nu$ の m の分割という。 $\mathfrak{S}_\nu$ を ν 次対称群として、 $\mathfrak{S}_\nu$ の P への作用を

$${}^\sigma P = (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(\nu)}) \quad (\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(\nu)) \in \mathfrak{S}_\nu)$$

で定める。

$$k_P^{(i)} = p_1 + \dots + p_i, \quad k_P^{*(i)} = p_{\nu-i+1} + \dots + p_\nu \quad (i=1, \dots, \nu)$$

$$E_P^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{k_P^{(i)}} & \\ & 0^{(k_P^{(i)}, m-k_P^{(i)})} \end{pmatrix}, \quad E_P^{*(i)} = \begin{pmatrix} 0^{(k_P^{*(i)}, m-k_P^{*(i)})} & \\ & E_{k_P^{*(i)}} \end{pmatrix}$$

とおく。ただし、 E_ν を ν 次単位行列、 $0^{(\nu, \mu)}$ を ν 行 μ 列の零行列を表わした。

$GL(m; \mathbb{C})$ の parabolic 部分群 B_P を次のようにとる。

$$B_P = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & b_{\nu\nu} \end{pmatrix} \in GL(m; \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} b_{ij} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C}) \\ b_{ij} = 0 \quad (i < j) \end{array} \right\}$$

H を n 次 正定値 Hermite 行列、 $U(H)$ を H の unitary 群、すなわち、

$$U(H) = \{ g \in GL(n; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} H g = H \}$$

$\tilde{U}(H) = \{ (g, h) \in GL(n; \mathbb{C}) \times GL(n; \mathbb{C}) \mid {}^t h H g = H \}$ とおく
と、 $\tilde{U}(H) \cong GL(n; \mathbb{C})$ である。

$$U(H) \ni g \longmapsto (g, \bar{g}) \in \tilde{U}(H)$$

によって、 $U(H)$ は $\tilde{U}(H)$ の $\mathbb{R}$ -有理点のなす Lie 群とみなせる。

さて、我々の扱う概均質ベクトル空間は、次の空間である。

$$G_P = \tilde{U}(H) \times B_P \times B_P, \quad V = M(n, m; \mathbb{C}) \times M(n, m; \mathbb{C})$$

G_P の V 上の表現 ρ を

$$\rho(a_1, a_2, b_1, b_2)(x_1, x_2) = (a_1 x_1 {}^t b_1, a_2 x_2 {}^t b_2)$$

$$(a_1, a_2) \in \tilde{U}(H), \quad b_1, b_2 \in B_P, \quad x_1, x_2 \in M(n, m; \mathbb{C})$$

で定義すれば、 (G_P, ρ, V) は、正則概均質ベクトル空間となっている。

$i = 1, \dots, \nu$ に対して、

$$P_P^{(i)}(x_1, x_2) = |{}^t x_2 H x_1 [E_P^{(i)}]| \quad (x_1, x_2) \in V$$

$$\chi_P^{(i)}(g) = |b_1 [E_P^{(i)}]| \cdot |b_2 [E_P^{(i)}]| \quad g = (a_1, a_2, b_1, b_2) \in G_P$$

とあけば、

$$P_P^{(i)}(\rho(g)(x_1, x_2)) = \chi_P^{(i)}(g) P_P^{(i)}(x_1, x_2)$$

が成立つ。すなわち、 $P_P^{(i)}$ は、指標 $\chi_P^{(i)}$ に対応する相対不変式であり、さらに、任意の相対不変式は、 $P_P^{(1)}, \dots, P_P^{(\nu)}$ の積として表わされる。

特異点集合は、

$$S_P = \bigcup_{i=1}^k S_P^{(i)}, \quad S_P^{(i)} = \{(x_1, x_2) \in V \mid P_P^{(i)}(x_1, x_2) = 0\}$$

で与えられる。言い換えれば、 $V - S_P$ は G_P の単一の軌道である。

V 上に内積

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} ({}^t x_1 y_2 + {}^t x_2 y_1)$$

を考え、この内積で、 V と双対空間 V^* とを同一視する。このとき反傾表現 ρ^* は、

$$\rho^*(h_1, h_2, b_1, b_2)(y_1, y_2) = ({}^t h_2^{-1} y_1 b_2^{-1}, {}^t h_1^{-1} y_2 b_1^{-1})$$

$$(h_1, h_2) \in \hat{U}(H), \quad b_1, b_2 \in B_P, \quad y_1, y_2 \in M(n, m; \mathbb{C})$$

となる。すなわち、

$$\langle \rho(g)(x_1, x_2), \rho^*(g)(y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle$$

$$g \in G_P, \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$$

を満足する。 (G_P, ρ^*, V) も正則概均質ベクトル空間であり、 $i = 1, \dots, k$ に対し、

$$Q_P^{(i)}(y_1, y_2) = |{}^t y_2 H^{-1} y_1 [E_P^{*(i)}]| \quad (y_1, y_2) \in V$$

$$\chi_P^{*(i)}(g) = |b_1 [E_P^{*(i)}]|^{-1} |b_2 [E_P^{*(i)}]|^{-1} \quad g = (h_1, h_2, b_1, b_2) \in G_P$$

とおけば、

$$Q_P^{(i)}(\rho^*(g)(y_1, y_2)) = \chi_P^{*(i)}(g) Q_P^{(i)}(y_1, y_2)$$

が成立ち、任意の相対不変式は、 $Q_P^{(1)}, \dots, Q_P^{(k)}$ の積として表わされる。

$$S_P^* = \bigcup_{i=1}^L S_P^{*(i)}, \quad S_P^{*(i)} = \{(y_1, y_2) \in V \mid Q_P^{(i)}(y_1, y_2) = 0\}$$

が、 (G_P, P^*, V) の特異点集合である。

相対不変式に対応する指標の直には、

$$\chi_P^{(i)} \cdot (\chi_P^{*(L-i)})^{-1} = \chi_P^{(L)} = (\chi_P^{*(L)})^{-1} \quad (i=1, \dots, L-1)$$

の関係がある。

G_P, V の real structure を、

$$(G_P)_R = U(H) \times B_P \ni (a, b) \longmapsto (a, \bar{a}, b, \bar{b}) \in G_P$$

$$V_R = M(n, m; \mathbb{C}) \ni x \longmapsto (x, \bar{x}) \in V$$

で定める。このとき、 $(G_P, P, V), (G_P, P^*, V)$ は、 $\mathbb{R}$ 上定義された既約実ベクトル空間と考えられる。表現、相対不変式、指標の $\mathbb{R}$ -有理点の空間への制限も同じ記号で表わすことにする。すなわち、

$$\varphi(a, b)x = a \cdot x \cdot {}^t b, \quad \varphi^*(a, b)y = {}^t \bar{a}^{-1} y \bar{b}^{-1}$$

$$P_P^{(i)}(x) = H[x \cdot E_P^{(i)}], \quad Q_P^{(i)}(y) = H^{-1}[y \cdot E_P^{*(i)}]$$

$$\chi_P^{(i)}(a, b) = \|b[E_P^{(i)}]\|^2, \quad \chi_P^{*(i)}(a, b) = \|b[E_P^{*(i)}]\|^{-2}$$

$$(x, y \in M(n, m; \mathbb{C}), (a, b) \in U(H) \times B_P)$$

又、内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の V_R への制限は、

$$\langle x, y \rangle = \langle (x, \bar{x}), (y, \bar{y}) \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{Tr}({}^t x \cdot \bar{y})$$

$$(x, y \in M(n, m; \mathbb{C}))$$

であり、これで、 V_R と V_R^* とが同一視できる。特異点集合について

では、

$$\begin{aligned}(S'_P)_R &= (S'^*_P)_R = (S'^{(x)}_P)_R = (S'^{*(x)}_P)_R \\ &= \{ X \in M(m, m; \mathbb{C}) = V_R \mid \text{rank } X \leq m \}\end{aligned}$$

となる。これは、 $\mathbb{P}$ に依存しないので、単に S と書こう。

以下では、 $\mathbb{R}$ -有理点の空間のみを考えるから、 $(\)_R$ を省略する。

§2. ここでは、後に必要となる幾つかの積分計算について述べる。

$$H^0 = \{ W \in M(m; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{W} = W > 0 \}.$$

$\pi: V-S \rightarrow H^0$ (resp. $\pi^*: V-S \rightarrow H^0$) を $\pi(X) = H[X]$ (resp. $\pi^*(X) = H^{-1}[X]$) と定義する。

$$H^0 \ni W = (w_{ij}) \text{ に対し, } dW = \prod_{i=1}^m dw_{ii} \prod_{i>j} d\text{Re} w_{ij} \cdot d\text{Im} w_{ij}.$$

$$H^0 \ni W_0 \text{ を定めるとき, } dX = \Theta_{W_0} \wedge \pi^{-1}(dW) \text{ (resp.}$$

$$dX = \Theta_{W_0}^* \wedge \pi^{*-1}(dW)) \text{ となる form } \Theta_{W_0} \text{ (resp. } \Theta_{W_0}^*) \text{ が,}$$

$\pi^{-1}(W_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(W_0)$) 上に unique に定まる。 Θ_{W_0} (resp. $\Theta_{W_0}^*$)

で定まる $\pi^{-1}(W_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(W_0)$) 上の measure を、 $|\Theta_{W_0}|$

(resp. $|\Theta_{W_0}^*|$) と記す。

$$\text{補題 1. (i) } \int_{\pi^{-1}(W_0)} |\Theta_{W_0}| = |H|^{-m} |W_0|^{n-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}$$

$$(ii) \int_{\pi^{*-1}(W_0)} |\Theta_{W_0}^*| = |H|^m |W_0|^{n-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}$$

この積分計算はよく知られている。例えば, Siegel [9] で, 対称行列について行っている計算法を応用する。詳細は略す。

$b \in B_P$ を

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{p_1} & 0 \\ b_{xj} & E_{p_x} \end{pmatrix} \quad b_i = b_{xj} \in GL(p_i; \mathbb{C}), \quad b_{xj} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C})$$

と分解する。 $b_{xj} (i \geq j)$ を $b_{xj} = (b^{(k_{xj}, l_{xj})})$ と成分表示して,

$$db = \prod_{i=1}^x \|b_i\|^{-2m+4k_P^{(i-1)}} \prod_{i \geq j} db_{xj}$$

$$db_{xj} = \prod_{\substack{1 \leq k_{xj} \leq p_i \\ 1 \leq l_{xj} \leq p_j}} d\operatorname{Re} b^{(k_{xj}, l_{xj})} d\operatorname{Im} b^{(k_{xj}, l_{xj})}$$

$$k_P^{(0)} = 0$$

とみると, db は B_P の right invariant measure を与える。

$W_0 \in \mathcal{H}^\circ$ に対し,

$$(B_P)_{W_0} = \{ b \in B_P \mid \bar{b} W_0 {}^t b = W_0 \}$$

$$(B_P)_{W_0}^* = \{ b \in B_P \mid {}^t b W_0 \bar{b} = W_0 \}$$

とみる。 $(B_P)_{W_0}$ (resp. $(B_P)_{W_0}^*$) は $(B_P)_{E_m}$ (resp. $(B_P)_{E_m}^*$) と

共役である。簡単な計算で,

$$(B_P)_{E_m} = (B_P)_{E_m}^* = \left\{ \begin{pmatrix} A_1^{(p_1)} & 0 \\ 0 & A_x^{(p_x)} \end{pmatrix} \mid A_i \in U(E_{p_i}) \right\} \\ \cong U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_x})$$

B_P を $\mathcal{H}^\circ$ に $W \mapsto \bar{b} W {}^t b$ (resp. $W \mapsto {}^t b^{-1} W \bar{b}^{-1}$) と作用させる。

$\mathcal{H}^\circ$ 上の B_P -相対不変測度を

$$\widetilde{dW} = \prod_{i=1}^{x-1} |W[E_P^{(i)}]|^{-p_i - p_{i+1}} \cdot |W|^{-p_x} dW$$

$$(\text{resp. } \widetilde{dW}^* = \prod_{i=1}^{k-1} |W[E_p^{(i)}]|^{-p_{x-i}-p_{x-i+1}} \cdot |W|^{-q_1} dW)$$

と定める。このとき, compact群 $(B_p)_{W_0}$ (resp. $(B_p)_{W_0}^*$) の Haar measure $d\nu_{W_0}$ (resp. $d\nu_{W_0}^*$) を

$$db = \widetilde{dW} \cdot d\nu_{W_0} \quad (\text{resp. } db = \widetilde{dW}^* \cdot d\nu_{W_0}^*)$$

と満足するように正規化できる。

$$\text{補題 2.} \quad \int_{(B_p)_{W_0}} d\nu_{W_0} = \int_{(B_p)_{W_0}^*} d\nu_{W_0}^* = \frac{\pi^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k p_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(\frac{j}{2})} \quad (W_0 \in \mathcal{H}^0)$$

(i) 積分値が W_0 のとり方によらないことは, $db, \widetilde{dW}, \widetilde{dW}^*$ の B_p -相対不変性からの結論である。よって, $W_0 = E_m$ としてよい。

$\pi_i : M(p_i; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_0^{(p_i)} = \{W \in M(p_i; \mathbb{C}) \mid {}^t \overline{W} = W > 0\}$ を, $\pi_i(x) = \overline{x}^t x$ で定義し, $dx = \theta_i \wedge \pi_i'(dW)$ ($x \in M(p_i; \mathbb{C}), W \in \mathcal{H}_0^{(p_i)}$) なる form θ_i によって $U(E_{p_i})$ 上の measure $|\theta_i|$ を定める。

$(B_p)_{E_m} = (B_p)_{E_m}^* = U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_k})$ で, 従って,

$$d\nu_{E_m} = d\nu_{E_m}^* = |\theta_1| \cdots |\theta_k|$$

である。従って, 補題 1 によって求める積分値を得る。 //

$V-S$ 上の G_p -相対不変測度, $\omega_p(x), \omega_p^*(x)$ を,

$$\omega_p(x) = \prod_{i=1}^k P_p^{(i)}(x)^{-p_i-p_{i+1}} dx \quad (p_{k+1} = n-m)$$

$$\omega_p^*(x) = \prod_{i=1}^k Q_p^{(i)}(x)^{-p_{x-i}-p_{x-i+1}} dx \quad (p_0 = n-m)$$

$$X = (x_{ij}) \in M(n, m; \mathbb{C}), \quad dx = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} d\operatorname{Re} x_{ij} d\operatorname{Im} x_{ij}$$

とする。

補題3.

$$(i) \int_{V-S} \prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(x) S_i \cdot e^{-\pi \operatorname{tr} H[x]} \omega_P(x) \\ = \frac{\pi^{-\sum_{i=1}^k k_P^{(i)} S_i + mn}}{|H|^m \prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{*(k-i)} - j)$$

$$(ii) \int_{V-S} \prod_{i=1}^k Q_P^{(i)}(x) S_i \cdot e^{-\pi \operatorname{tr} H^{-1}[x]} \omega_P^*(x) \\ = \frac{|H|^m \pi^{-\sum_{i=1}^k k_P^{*(i)} S_i + mn}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{(k-i)} - j)$$

(i') 全く同様式から(i)のみ示す。

$\omega(x) = |W|^{m-m} \widetilde{dW} \cdot |\theta_W|$ 。補題1によつて、

$$\text{積分} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}m(2m-m+1)}}{|H|^m \prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \int_{\mathcal{A}^0} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \prod_{i=1}^k |W[E_P^{(i)}]|^{S_i} \widetilde{dW}$$

$$|\mathcal{A}^0 \ni W \in W = \begin{pmatrix} W^{(m-1)} & 0 \\ 0 & w_m \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E_{m-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (a \in \mathbb{C}^{m-1}, w_m \in \mathbb{R}_+,$$

$W^{(m-1)} = t \overline{W}^{(m-1)} > 0$) と分解すると、 $p_r \geq 2$ ならば、

$$\widetilde{dW} = |W^{(m-1)}| \cdot \widetilde{dW}^{(m-1)} \cdot da \cdot w_m^{-p_r} dw_m$$

そこで、 $\widetilde{dW}^{(m-1)}$ は、 $m-1$ の分割 $(p_1, \dots, p_{r-1}, p_r-1)$ に関して、

$\widetilde{dW}$ と同様に構成する。又、 $a = {}^t(a_1, \dots, a_{m-1})$ に対し、 da

$$= \prod_{i=1}^{m-1} d\operatorname{Re} a_i d\operatorname{Im} a_i \text{ と } \subset \mathbb{R}^m.$$

$$\therefore \int_{\mathcal{A}^0} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \prod_{i=1}^k |W[E_P^{(i)}]|^{S_i} \widetilde{dW}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} \prod_{i=1}^m |w^{(m-1)} [E_{p'}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw}^{(m-1)} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{C}^{m-1}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} [a] \cdot |w^{(m-1)}| da \cdot \int_0^\infty w_m^{s_x - p_x} e^{-\pi w_m} dw_m \\
&= \pi^{-(s_x + p_x + 1)} \Gamma(s_x - p_x + 1) \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} \prod_{i=1}^m |w^{(m-1)} [E_{p'}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw}^{(m-1)}
\end{aligned}$$

ただし, $p' = (p_1, \dots, p_{x-1}, p_x - 1)$ 。

$p_x = 1$ の場合には, 同様の考察で, $p' = (p_1, \dots, p_{x-1})$ にとし,

$$\begin{aligned}
&\int_{H_0^0} e^{-\pi t w} \prod_{i=1}^x |w [E_p^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw} \\
&= \pi^{-s_x} \Gamma(s_x) \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{x-2} |w^{(m-1)} [E_{p'}^{(i)}]|^{s_i} \cdot |w^{(m-1)}|^{s_{x-1} + s_x - 1} \widetilde{dw}^{(m-1)}
\end{aligned}$$

この2つの漸化式によって, 帰納的に (i) が得られる。 //

§3. 相対不変式の複素中の満足する函数等式

この節では、 $\prod_{i=1}^k P_p^{(i)}(x)^{S_i}$, $\prod_{i=1}^k Q_p^{(i)}(x)^{S_i}$ ($(S_1, \dots, S_k) \in \mathbb{Q}^k$) が、2つの Type の函数等式を持つことを示す。第一の Type は、Fourier 変換に基づくものであり、第二の Type は、本質的には、 $SL(m; \mathbb{C})$ の常球函数の函数等式である。

$\mathcal{S}(V)$ は V 上の急減少函数の空間とする。 $S = (S_1, \dots, S_k) \in \mathbb{Q}^k$, $f \in \mathcal{S}(V)$ に対して、

$$\Phi_p(S, f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k P_p^{(i)}(x)^{S_i} f(x) \omega_p(x)$$

$$\Phi_p^*(S, f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k Q_p^{(i)}(x)^{S_i} f(x) \omega_p^*(x)$$

と定義すれば、 $\Phi_p(S, f)$ (resp. $\Phi_p^*(S, f)$) は、 $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$

(resp. $\operatorname{Re}(S_i) > p_{r-i} + p_{r-i+1}$) ($i=1, \dots, k$) で絶対収束し、さらに、

$\mathbb{Q}^k$ 全体に有理型函数として解析接続される (cf. [14])。

$f \in \mathcal{S}(V)$ の Fourier 変換を、

$$\hat{f}(x) = \int_V f(y) e^{2\pi \sqrt{-1} \langle x, y \rangle} dy$$

で定義する。

命題 1. 次の函数等式が成立つ。

$$\Phi_p(S, \hat{f}) = |H|^{-m} \pi^{-2 \sum_{i=1}^k k_p^{(i)} S_i + m(m-1)}$$

$$\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \sin \pi (S_i + \dots + S_k - m k_p^{(i)} - j) T(S_i + \dots + S_k - m + k_p^{(i)} - j) T(S_i + \dots + S_k - k_p^{*(k-i)} - j) \\ \times \Phi_p^*(S_{k-1}, \dots, S_1, m - S_1, \dots, S_k : f)$$

//

この Type の函数等式は、[4]、[7] で論じられている。空間 (G_p, V) は、そこでの仮定を満足しないが、[7] の才 2 章の議論を修正して、 $\Phi_p(s; \hat{f}) = C(s) \Phi_p^*(s_{x-1}, \dots, s_1, n-s_1, \dots, s_x; f)$ なる $C(s)$ の存在を示せる。([7] p158, 例 9 は図像が深い)。 $C(s)$ の具体的な決定は、補題 3 の指令を利用すれば、

$$\int_V e^{-\pi i h \pi(x)} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy = |H|^m e^{-\pi i h \pi(x)}$$

により実行できる。

Micro local calculus の方法によつて、 (G_p, V) を含む一般的多空間について、相対不変式の複素中の Fourier 変換を求めることは、室田によつて研究されている ([5])。

才 2 の Type の函数等式を記述するため、次の変数変換を行う。

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = z_2 - z_1 + \frac{p_1 + p_2}{2} \\ S_2 = z_3 - z_2 + \frac{p_2 + p_3}{2} \\ \dots \dots \dots \\ S_{x-1} = z_x - z_{x-1} + \frac{p_{x-1} + p_x}{2} \\ S_x = -z_x + \frac{p_x + n-m}{2} \end{array} \right. \quad \text{(b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = z_x - z_{x-1} + \frac{p_{x-1} + p_x}{2} \\ S_2 = z_{x-1} - z_{x-2} + \frac{p_{x-2} + p_{x-1}}{2} \\ \dots \dots \dots \\ S_{x-1} = z_2 - z_1 + \frac{p_1 + p_2}{2} \\ S_x = z_1 + \frac{p_1 + n-m}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$\Phi_p(s; f)$ (resp $\Phi_p^*(s; f)$) は変数変換 (a) (resp (b)) によつて、 $z_1, \dots, z_x$ の函数とみたとき、 $\Phi_p(z_1, \dots, z_x; f)$ (resp $\Phi_p^*(z_1, \dots, z_x; f)$) と記すことにする。

命題2

$\tilde{C}_0(V-S) = \{f \in C_0^\infty(V-S) \mid \text{supp } f \text{ is compact, } f(x^*k) = f(x), \forall x \in V-S, k \in U(E_m)\}$
 とおく。 $f \in \tilde{C}_0(V-S)$ ならば、任意の $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(m)) \in \mathfrak{S}_m$ につい
 て

$$\Phi_P(z_1, \dots, z_m; f) = \Phi_P(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}; f)$$

$$\Phi_P^*(z_1, \dots, z_m; f) = \Phi_P^*(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}; f)$$

が成立つ。

証明のため、次の2つの補題を用意する。

補題4 (Harish-Chandra)

$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R}_+, a_1 \cdots a_m = 1 \right\}$, $A \ni a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ に対して、 $e^{p(\log a)}$
 $= \prod_{i=1}^m a_i^{-m(m-2i+1)/2}$ とする。 $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_{ij} & 1 \end{pmatrix} \mid n_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$, N 上の measure
 $\mathbb{E} \, dn = \prod_{i,j} d\text{Re } n_{ij} d\text{Im } n_{ij}$ と定める。

$SL(m; \mathbb{C})$ 上の台が compact の連続関数 f について、

$$F_f(a) = e^{p(\log a)} \int_N f(am) \, dn \quad a \in A$$

と置く。このとき、 f が、任意の $k \in SU(m)$ に対し、

$$f(kgk^{-1}) = f(g) \quad g \in SL(m; \mathbb{C})$$

を満足すれば、

$$F_f(a^\sigma) = F_f(a) \quad \sigma \in \mathfrak{S}_m$$

但し、 $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(m))$ について、

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = a^\sigma$$

(i) 半単純 Lie 群についての一般的な定理 (例えば [3] Ch. X.

Theorem 1.15) を $SL(m; \mathbb{C})$ について書き下しただけであらう。 //

補題 5. $f \in \tilde{C}_0^\infty(T-S)$, $T-S \ni x_0 \in H[x_0] = E_m$ とする。 dh を $U(H)$ 上の Haar measure とし、 $\int_{U(H)} dh = 1$ と正規化する。

このとき、 $f_t(g) = \int_{U(H)} f(hx_0 {}^t g \cdot t) dh$ ($t \in \mathbb{R}_+$, $g \in SL(m; \mathbb{C})$) と定義すると、 $f_t(g)$ は、 $SL(m; \mathbb{C})$ 上の 1 変数 compact 連続関数で、 $f_t(kgk^{-1}) = f_t(g)$ ($k \in SU(m)$, $g \in SL(m; \mathbb{C})$) を満足する。

(i) f_t が連続であることは明らか。 $U(H) \cdot \text{supp } f = C$ とおくと C は $T-S$ の compact set である。

$$\text{supp}(f_t) \subset \{g \in SL(m; \mathbb{C}) \mid x_0 {}^t g \in C\}$$

この右辺は compact. $\therefore \text{supp}(f_t)$ も compact.

$$f_t(kgk^{-1}) = \int_{U(H)} f(hx_0 {}^t k^{-1} {}^t g \cdot t {}^t k) dh.$$

$k \in SU(m)$ より、 $H[x_0 {}^t k^{-1}] = E_m$ であり、 $h_0 x_0 = x_0 {}^t k^{-1}$ とおき $h_0 \in U(H)$ が存在する。

$$\begin{aligned} \therefore f_t(kgk^{-1}) &= \int_{U(H)} f(hh_0 x_0 {}^t g \cdot t {}^t k) dh \\ &= \int_{U(H)} f(hx_0 {}^t g \cdot t) dh = f_t(g) \end{aligned}$$

//

命題 2 の証明にかえり。

$\mathbb{R}_+ \ni t, \mathbb{R}_+ \ni t = \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}$ と同一視する。

$$B^+(m) = \mathbb{R}_+ \times A \cdot N = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}_+, a_i \in \mathbb{R}_+, n_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

積分 $\mathbb{P}_p(z; f)$ は群 $B^+(m)$ 上の積分に書き直そう。

任意の $u \in U(H)$ に対して、

$$\mathbb{P}_p(s_1, \dots, s_k; f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k \mathbb{P}_p^{(i)}(x)^{s_i} \cdot f(ax) \omega_p(x).$$

$U(H)$ 上で積分すると、

$$\mathbb{P}_p(s_1, \dots, s_k; f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k \mathbb{P}_p^{(i)}(x)^{s_i - p_i - p_{i+1}} \int_{U(H)} f(ax) da \, dx.$$

被積分函数は $U(H)$ -不変であるから、

$$\int_{U(H)} f(ax) da = f_1 \circ \pi(x) \quad (x \in V-S)$$

と満たす $f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{H}_0)$ が存在し、補題1より、

$$\mathbb{P}_p(s_1, \dots, s_k; f) = |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \int_{\mathbb{H}^0} \prod_{i=1}^k |w[\mathbb{E}_p^{(i)}]|^{s_i} f_1(w) \widetilde{dw}$$

さて、 $\psi: B^+(m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0$ とは homeomorphism $\psi(b) = b^t b$ で定義する。 $d^x t = \frac{dt}{|t|}$, $da = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{da_i}{|a_i|}$ と、 da と dt は $\mathbb{R}_+$, A 上の

Haar measure とおき、このとき、

$$\psi^*(\widetilde{dw}) = 2^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2(k_p^{*(k-i)} + k_p^{*(k-i+1)})} d^x t \, da \, dn.$$

又、

$$\prod_{i=1}^k |w[\mathbb{E}_p^{(i)}]|^{s_i} = t^{-2 \sum_{i=1}^k p_i z_i + m(n+m)} \times \prod_{i=1}^m \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i + (k_p^{*(k-i)} + k_p^{*(k-i+1)})}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi_p(z_1, \dots, z_r; f) &= \frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}(2m-m+1)}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \cdot |H|^{-m} \int_{\mathbb{R}_+} t^{-2 \sum_{i=1}^r p_i z_i + m(n+m)} dx_t \\ &\quad \int_A \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - (k_p^{*(\alpha-i)} + k_p^{*(\alpha-i+1)})} da \int_N f_1(t a \bar{n}^t n a t) dn. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よて, } \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - (k_p^{*(\alpha-i)} + k_p^{*(\alpha-i+1)})} &\cdot e^{-p(\log a)} \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - (k_p^{*(\alpha-i)} + k_p^{*(\alpha-i+1)}) + \{m - 2(k_p^{(i)} - j) + 1\}} \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - p_i + 2j}. \end{aligned}$$

よて, f_1 の定義により, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Phi_p(z_1, \dots, z_r; f) &= \frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}(2m-m+1)}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \cdot |H|^{-m} \int_{\mathbb{R}_+} t^{-2 \sum_{i=1}^r p_i z_i + m(n+m)} dx_t \\ &\quad \times \int_A \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - p_i + 2j} da \cdot e^{p(\log a)} \int_N \int_{U(H)} f(x x_0^t n a t) dx_t dn \end{aligned}$$

ここで x_0 は $\pi(x_0) = H[x_0] = E_m$ ととり $V-S'$ の元である。

補題 4.5 より, $e^{p(\log a)} \int_N \int_{U(H)} f(x x_0^t n a t) dx_t dn$ は, A 上の関数

数として, $(a_1, \dots, a_m)$ の任意の置換で不変である。いま, $\Theta_x \in$

次のようにして Θ_m に埋め込む。すなわち, $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) \in$

$$(1, 2, \dots, p_1, \overbrace{p_1+1, \dots, p_1+p_2}^{p_2}, \dots, \overbrace{k_p^{(\alpha-1)}+1, \dots, m}^{p_r})$$

$$\mapsto (\overbrace{k_p^{(\alpha^{(1)}-1)}+1, \dots, k_p^{(\alpha^{(1)})}}^{p_{\alpha^{(1)}}}, \dots, \overbrace{k_p^{(\alpha^{(r)}-1)}+1, \dots, k_p^{(\alpha^{(r)})}}^{p_{\alpha^{(r)}}}).$$

と同一視して, Θ_m の元とみなす。言いかえれば, $\exists m \in p_1, \dots, p_r$

個の σ -ブロックに分け、各ブロック内で α の順序を変えず、ブロックを入れかえる置換とみなす。

このとき、上の積分表示は、

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$$

$$\mu = (p_1, \dots, p_k) \mapsto (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)}) = \mu$$

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)})$$

の変換で不変である。これは、 $\mathcal{I}_\mu(z_1, \dots, z_k; f) = \mathcal{I}_\mu^*(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}; f)$ หมายความว่า。 $\mathcal{I}_\mu^*$ についても同様である。 //

Rem. 以上の証明は、実質的には、球函数の函数等式の証明（例えば [3] の chap X, Proposition 6-7）を follow したことに他ならない。

§ 4. $(G, \mathbb{V})$ の Zeta 函数

K を類数 1 の虚二次体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環として, $V_{\mathbb{Q}} = M(n, m; K)$

$B_p(\mathbb{Q}) = B_p \cap GL(m; K)$, $B_p(\mathbb{Z}) = B_p \cap GL(m; \mathcal{O}_K)$ とおく。

$V_{\mathbb{Q}}$ の格子 L が, $GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変とは, 任意の $\gamma \in GL(m; \mathcal{O}_K)$ に対し, $L = L \cdot \gamma$ を満足することである。

$\overline{H}_0 = \{W \in M(m; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{W} = W \geq 0\}$, $\overline{H}_0$ 上の連続函数の空間を, $C(\overline{H}_0)$ とかく。 $\pi: V \rightarrow \overline{H}_0$, $\pi^*: V \rightarrow \overline{H}_0$ は, $\pi(x) = H[x]$, $\pi^*(x) = H^{-1}[x]$ で定義される。

定義 1. $GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変な格子 $L \subset V_{\mathbb{Q}}$, $f \circ \pi \in \mathcal{S}(V)$,
(resp. $f \circ \pi^* \in \mathcal{S}(V)$) とする $f \in C(\overline{H}_0)$ に対し

$$Z_p(S; L; f) = \int_{B_p/B_p(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^n \chi_p^{(i)}(b_i)^{S_i} \sum_{\{b\} \in L \cap V-S} f(H[\{b\}]) db$$

$$(\text{resp.}) Z_p^*(S; L; f) = \int_{B_p/B_p(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^n \chi_p^{*(i)}(b_i)^{S_i} \sum_{\{b\} \in L \cap V-S} f(H^{-1}[\{b\}]) db$$

ここで, db は p の如く正規化した B_p の right-invariant measure, 又, $\chi_p^{(i)}, \chi_p^{*(i)}$ は $U(H)$ 上 trivial な指標であるから, 単に B_p の指標と見た。

定義 2. $L: GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変な格子, $L \ni \{b\}, \eta$ について,

$$\{b\} \sim \eta \iff \{b\}^t b = \eta \quad (\{b\} \in B_p(\mathbb{Z}))$$

$$\{b\} \sim^* \eta \iff \{b\} \cdot b^{-1} = \eta \quad (\{b\} \in B_p(\mathbb{Z}))$$

定義3. $GL(m; \mathbb{Q}_K)$ -不変な格子 L について

$$\mathfrak{z}_P(L; S_1, \dots, S_k) = \sum_{X \in L \cap (V-S)/\sim} \prod_{i=1}^k I_P^{(i)}(X)^{-S_i}$$

$$\mathfrak{z}_P^*(L; S_1, \dots, S_k) = \sum_{Y \in L \cap (V-S)/\sim^*} \prod_{i=1}^k Q_P^{(i)}(Y)^{-S_i}$$

Mass[6] に従って.

まず $\checkmark$ 格子 $L_0 = M(m, m; \mathbb{Q}_K)$ について $\mathfrak{z}_P, \mathfrak{z}_P^*$ を計算してみよう。

補題6. m の分割 $\hat{p}, \hat{p}$ を $\hat{p} = (p_1, \dots, p_k, p_{k+1}), \hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k)$

$p_0 = p_{k+1} = m - m$ とする。 $\cup_K$ で $\mathbb{Q}_K$ の単数群を表わす。 $\mathbb{Q}_K - \{0\}$ に対し、 (α) で α の生成するイデアルを表わす。

(i) $L_0 \cap (V-S)/\sim$ の完全代表系として、次がとれる。

$$\left\{ U \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_{1j} \\ & \ddots \\ 0 & a_m \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{Q}_K - \{0\} / \cup_K, a_{ij} \in \mathbb{Q}_K / (\alpha_i) \\ U \in SL(m; \mathbb{Q}_K) / {}^t B_{\hat{p}} \cap SL(m; \mathbb{Q}_K) \end{array} \right\}$$

(ii) $L_0 \cap (V-S)/\sim^*$ の完全代表系として、次がとれる。

$$\left\{ U \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ & \ddots \\ a_{ij} & a_m \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{Q}_K - \{0\} / \cup_K, a_{ij} \in \mathbb{Q}_K / (\alpha_i) \\ U \in SL(m; \mathbb{Q}_K) / B_{\hat{p}} \cap SL(m; \mathbb{Q}_K) \end{array} \right\}$$

(i) K の位数 = 1 と仮定してあるから、単因子論が使える。 $V-S$ の元は、 $\text{rank} = m$ であることに注意すれば、上の Type の元と同値

になることは、易しい。ある $b \in B_P(\mathbb{Z})$ があって、

$$U \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_{1j} \\ & \ddots \\ 0 & a_m \end{pmatrix} \cdot {}^t b = U' \cdot \begin{pmatrix} a'_1 & a'_{1j} \\ & \ddots \\ 0 & a'_m \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、 $U^{-1}U' \in {}^t B_{\hat{p}} \cap SL(m; \mathbb{Q}_K)$ とおきから $U = U'$ 。

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 & a_{ij} \\ 0 & a_m \end{pmatrix} \cdot {}^t b = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_{ij} \\ 0 & a'_m \end{pmatrix} \quad \therefore b \in B_{P_0}(\mathbb{Z}) \quad \text{したがって}$$

$$P_0 = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_{ij} & b_m \end{pmatrix} \text{ と } a_i < \infty, \quad b_i \in \mathcal{O}_K, \quad a_i \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K^\times / \mathcal{O}_K^\times \neq \emptyset.$$

$$a_i = a'_i \quad \therefore b_i = 1. \quad a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i) \text{ より } \text{IX F 係数} \text{ には } b_{ij} = 0$$

$(i \neq j)$ が言える。

(ii) の証明も同様だから、省略する。 //

補題 7. 数体 K の Dedekind Zeta $\zeta_K(s)$ とする。

$L_0 = M(n, m; \mathcal{O}_K)$ について。

$$(i) \quad \zeta_P(L_0; S_1, \dots, S_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \zeta_K(S_i + \dots + S_k - k_P^{*(k-i)} - j)$$

$$\times \sum_{U \in SL(n; \mathcal{O}_K) / \begin{smallmatrix} \times B_P \\ \cap SL(n; \mathcal{O}_K) \end{smallmatrix}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$(ii) \quad \zeta_P^*(L_0; S_1, \dots, S_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \zeta_K(S_i + \dots + S_k - k_P^{*(k-i)} - j)$$

$$\times \sum_{U \in SL(n; \mathcal{O}_K) / \begin{smallmatrix} \times B_P \\ \cap SL(n; \mathcal{O}_K) \end{smallmatrix}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H^{-1} U [E_P^{*(i)}]|^{-S_i}$$

特に、 $\zeta_P(L_0; S_1, \dots, S_k)$ (resp. $\zeta_P^*(L_0; S_1, \dots, S_k)$) は $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$
 $i=1, \dots, k, \quad p_{k+1} = n-m$ (resp. $\operatorname{Re}(S_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}, \quad i=1, \dots, k, \quad p_0 = n-m$)
 で絶対収束する。

(i) (i) 補題 6 より。

$$\zeta_P(L_0; S_1, \dots, S_k) = \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K^\times / \mathcal{O}_K^\times} \sum_{a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i)} \sum_{U \in SL(n; \mathcal{O}_K) / \begin{smallmatrix} \times B_P \\ \cap SL(n; \mathcal{O}_K) \end{smallmatrix}} (\#)$$

$$\begin{aligned}
(\#) &= \prod_{i=1}^x |H[U, E_P^{(i)}][\begin{pmatrix} a_i & a_{ij} \\ & a_m \end{pmatrix}][E_P^{(i)}]|^{-S_i} \\
&= \prod_{i=1}^x \chi_P^{(i)}\left(\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ & a_{ij} a_m \end{pmatrix}\right) \cdot |H[U][E_P^{(i)}]|^{-S_i} \\
&= \prod_{i=1}^x \prod_{j=0}^{p_i-1} |a_{K_P^{(i)}-j}|^{-2(S_i+\dots+S_x)} \cdot \prod_{i=1}^x |H[U][E_P^{(i)}]|^{-S_i} \\
\therefore \sum_P(L_0; S_1, \dots, S_x) &= \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K^{\times} / \mathcal{O}_K} \sum_{a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i)} \prod_{i=1}^x \prod_{j=0}^{p_i-1} |a_{K_P^{(i)}-j}|^{-2(S_i+\dots+S_x)} \\
&\quad \times \sum_{\substack{U \in \mathrm{SL}(n; \mathcal{O}_K) \\ \not\sim_{\mathcal{B}_P} \mathrm{SL}(n; \mathcal{O}_K)}} |{}^t \bar{U} H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i} \\
&= \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K^{\times} / \mathcal{O}_K} \prod_{i=1}^x \prod_{j=0}^{p_i-1} |a_{K_P^{(i)}-j}|^{-2(S_i+\dots+S_x - K_P^{(i)} - j)} \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{U \in \mathrm{SL}(n; \mathcal{O}_K) \\ \not\sim_{\mathcal{B}_P} \mathrm{SL}(n; \mathcal{O}_K)}} |{}^t \bar{U} H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i} \\
&= \prod_{i=1}^x \prod_{j=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K^{\times} / \mathcal{O}_K} |a_i|^{-2(S_i+\dots+S_x - K_P^{(i)} - j)} \right\} \\
&\quad \times \sum_{\substack{U \in \mathrm{SL}(n; \mathcal{O}_K) \\ \not\sim_{\mathcal{B}_P} \mathrm{SL}(n; \mathcal{O}_K)}} |{}^t \bar{U} H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i}
\end{aligned}$$

K が素数 $\neq 1$ の虚二次体だから、 $\sum_K(S) = \sum_{a \in \mathcal{O}_K^{\times} / \mathcal{O}_K} |a|^{-2S}$ である。
 (i) は証明された。

(ii) も全く同様である。

$\mathrm{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, x$) のとき。

$$\operatorname{Re}(S_1 + \cdots + S_k) - k_p^{*(\alpha-1)} - j \geq k_p^{*(k-1)} + n - m \geq 1$$

よって $\int_k (S_1 + \cdots + S_k - k_p^{*(\alpha-1)} - j)$ は $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) で絶対収束。

$$\sum_{\substack{U \in SL(n; \mathbb{Q}_k) \\ \in B_p \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_p^{(i)}]|^{-S_i} \text{ は } SL(n; \mathbb{Q}) \text{ の Eisenstein 級}$$

数に他ならず、この級数が $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) で絶対収束することは、Goodement の判定条件の結論である。(cf A. Borel [2])

$\sum_p^*(L_0; S_1, \dots, S_k)$ の収束も全く同様である。 //

補題 8. $GL(n; \mathbb{Q}_k)$ -不変な格子 L 、 $f \circ \pi$ (resp. $f \circ \pi^*$) $\in \mathcal{L}(V)$ ならば $f \in C(\overline{H}_0)$ に対し、 $Z_p(S; L; f)$, $\sum_p(L; S)$ (resp. $Z_p^*(S; L; f)$, $\sum_p^*(L; S)$) は $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) (resp. $\operatorname{Re}(S_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}$ ($i=1, \dots, k$)) で絶対収束し、

$$(i) \quad Z_p(S; L; f) = \pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_k^2 + m^2) - mn} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times |H|^m \cdot \sum_p(L; S) \cdot \Phi_p(S; f \circ \pi)$$

$$(ii) \quad Z_p^*(S; L; f) = \pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_k^2 + m^2) - mn} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times |H|^{-m} \cdot \sum_p^*(L; S) \cdot \Phi_p^*(S; f \circ \pi^*)$$

(1') $L \subset V_{\mathbb{Q}}$. したがって、 $\alpha \in \mathbb{Q}_k$ で、 $\alpha L \subset L_0 = M(n, m; \mathbb{Q}_k)$ となるものが存在する。

$$\begin{aligned} \sum_{x \in L \cap V-S} \frac{\prod_{i=1}^k |P_P^{(i)}(x)|^{-\operatorname{Re} S_i}}{\sim} &\leq \sum_{x \in L \cap V-S} \frac{\prod_{i=1}^k |P_P^{(i)}(\alpha^{-1}x)|^{-\operatorname{Re} S_i}}{\sim} \\ &= |\alpha|^{-2 \sum_{i=1}^k k_P^{(i)} \operatorname{Re} S_i} \cdot \xi_P(L; R_0(S_1, \dots, S_k)) \end{aligned}$$

この左辺は、すでに述べたように、 $\operatorname{Re}(S_i) > \rho_i + \rho_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$)
で絶対収束している。よって $\xi_P(L; S_1, \dots, S_k)$ は、同じ範囲で絶対収
束する。 $\xi_P^*(L; S_1, \dots, S_k)$ についても同様である。

次に、 $Z_P(S; L; f)$ を形式的に変形してみる。

$$\begin{aligned} Z_P(S; L; f) &= \int_{B_P/B_P(\mathbb{Z})} \frac{\prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{S_i}}{\sum_{\xi \in L \cap V-S} f(H[\xi^* b])} db \\ &= \sum_{\xi \in L \cap V-S} \int_{B_P} \frac{\prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{S_i}}{\sim} f(H[\xi^* b]) db \\ &= \sum_{\xi \in L \cap V-S} \frac{\prod_{i=1}^k |P_P^{(i)}(\xi)|^{-S_i}}{\sim} \int_{B_P} \frac{\prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(\xi^* b)^{S_i}}{\sim} f(H[\xi^* b]) db \end{aligned}$$

ここで、補題 2 を利用すれば、

$$\begin{aligned} &\int_{B_P} \frac{\prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(\xi^* b)^{S_i}}{\sim} f(H[\xi^* b]) db \\ &= \int_{(B_P)} d\omega_{H[\xi]} \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} \frac{\prod_{i=1}^k |w[E_P^{(i)}]|^{S_i}}{\sim} f(w) \widetilde{dw} \\ &= \frac{\pi^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \rho_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{\rho_i} T(j)} \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} \frac{\prod_{i=1}^k |w[E_P^{(i)}]|^{S_i}}{\sim} f(w) \widetilde{dw} \end{aligned}$$

一方、補題 1 によつて、

$$\begin{aligned}
\Phi_P(S; f \circ \pi) &= \int_{V-S} \prod_{i=1}^k \gamma_P^{(i)}(x)^{S_i - p_i - p_{i+1}} f(H(x)) dx \\
&= \int_{\mathcal{A}^0} \prod_{i=1}^k |W[E_P^{(i)}]|^{S_i - p_i - p_{i+1}} f(w) dw \cdot \int \frac{|dw|}{\pi'(w)} \\
&= |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(m-m+i)} \cdot \int_{\mathcal{A}^0} \prod_{i=1}^k |W[E_P^{(i)}]|^{S_i} f(w) \widetilde{dw}
\end{aligned}$$

以上より、容易に(i)が得られる。 ξ_P, Φ_P の $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots$) での絶対収束性より、以上の計算は正当化される。(ii)に就いても同様である。 //

さて、我々の定理は次のとおりである。

定理 $\xi_P(L; S), \xi_P^*(L; S)$ は、 $\mathbb{C}^k$ 上の有理型函数として解析接続され、次の函数等式を満足する。

(1). L^* は L の双対格子、すなわち、 $L^* = \{x \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \forall y \in L\}$ 。 $v(L^*) = \int_{V/L^*} dx$ 。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}_P(L; S_1, \dots, S_k) &= |H|^{-\frac{m}{2}} \pi^{-\sum_{i=1}^k k_P^{(i)} S_i} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{*(k-i)} - j) \cdot \xi_P(L; S_1, \dots, S_k) \\
\widetilde{\xi}_P^*(L^*; S_1, \dots, S_k) &= |H|^{-\frac{m}{2}} \pi^{-\sum_{i=1}^k k_P^{*(i)} S_i} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{(k-i)} - j) \cdot \xi_P^*(L^*; S_1, \dots, S_k)
\end{aligned}$$

と表わせば、

$$v(L^*)^{-1} \widetilde{\xi}_P(L; S_1, \dots, S_k) = \widetilde{\xi}_P^*(L^*; S_{k-1}, \dots, S_1, m-S_1, \dots, -S_k)$$

(2). $D \in K$ の判別式、 $\eta_K(s) = \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta_K(s)$ とおく。

$\zeta_P(L; s_1, \dots, s_k)$ (resp. $\zeta_P^*(L; s_1, \dots, s_k)$) を変数変換 (井) (resp. (b)) によって、 $z_1, \dots, z_k$ の函数とみなして、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)$ (resp. $\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)$) と記す。

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k) / \zeta_{P^\sigma}(L; z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$
(resp. $\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k) / \zeta_{P^\sigma}^*(L; z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$) は、 $\eta_K(z_\nu - z_\mu + \frac{p_\mu + p_\nu}{2} - j)$
($j = 0, 1, 2, \dots$) の積で表れる。

特に、巡回置換 $\sigma_0 = (1, 2, \dots, k)$ に対しては、

$$\frac{\zeta_{P^{\sigma_0}}(L; z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)})}{\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)} = \frac{\zeta_{P^{\sigma_0}}^*(L; z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)})}{\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)} = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_K(z_i - z_{i+1} + \frac{p_i + p_{i+1}}{2} - j)$$

置換 $\sigma_i = (i, i+1)$ ($i = 1, \dots, k-1$) に対しては、

$$\frac{\zeta_{P^{\sigma_i}}(L; z_{\sigma_i(1)}, \dots, z_{\sigma_i(k)})}{\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)} = \frac{\zeta_{P^{\sigma_i}}^*(L; z_{\sigma_i(1)}, \dots, z_{\sigma_i(k)})}{\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)} = \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_K(z_i - z_{i+1} + \frac{p_i + p_{i+1}}{2} - j)$$

で与えられる。

Remark. $p_1 = p_2 = \dots = p_k = p$ とする/命題 P について、函数等式 (2)

は、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ について

$$\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq k} \prod_{j=1}^p \eta_K(z_\nu - z_\mu + j) \zeta_P(L; z_1, \dots, z_k) \\ = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq k} \prod_{j=1}^p \eta_K(z_\nu - z_\mu + j) \zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)$$

は、 $(z_1, \dots, z_k) \rightarrow (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$ で変換という形に表とあらわれる。

§5. 定理の証明.

§5-1: 函数等式(1)の証明

$\pi: V \rightarrow \overline{V_0}$ ($\pi(x) = H[x]$), $\pi^*: V \rightarrow \overline{V_0}$ ($\pi^*(x) = H^{-1}[x]$) で, H を 明
示しないときは, π_H, π_H^* とかくことにする.

$\psi \in C(\overline{V_0})$, $g \in GL(n; \mathbb{C})$ に対し, $\pi_{H[g]}(x) = \pi_H(gx)$,

$\psi \circ \pi_{H[g]}(x) = \psi \circ \pi_H(gx)$ が成立つ. よって, ある n 次正定値エル
ミート行列 H_0 に対し, $\psi \circ \pi_{H_0} \in \mathcal{S}(V)$ ならば, 任意の n 次正定値エル
ミート行列 H に対し $\psi \circ \pi_H \in \mathcal{S}(V)$ が成立つ. 特に $\pi_H^* = \pi_H^{-1}$ だ
から $\psi \circ \pi_H^* \in \mathcal{S}(V)$ でもある.

$\mathcal{S}(\overline{V_0}) = \{ \psi \in C(\overline{V_0}) \mid \psi \circ \pi_H \in \mathcal{S}(V) \}$ とおく. これは, H によ
らない.

補題9.

(1) 変型写像 $\mathcal{P}: \mathcal{S}(\overline{V_0}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{V_0})$ ($\psi \mapsto \psi^{\mathcal{P}}$) が存在し,

$$\widehat{\psi \circ \pi_H^*} = |H|^m \cdot \psi^{\mathcal{P}} \circ \pi_H \quad (\psi \in \mathcal{S}(\overline{V_0}))$$

(2) $\psi \in \mathcal{S}(\overline{V_0})$ で次の条件 a), b) を満足するものが存在する.

a) $\psi(\bar{u} w^t u) = \psi(w) \quad (u \in U(E_m), w \in \overline{V_0})$

b) 任意の n 次正定値エルミート行列 $\overset{H}{\lambda}$ に対し,

$$\psi \circ \pi_H^* \Big|_{\mathcal{S}} = 0, \quad \widehat{\psi \circ \pi_H^*} \Big|_{\mathcal{S}} = 0$$

(i) (1) $\psi \in \mathcal{S}(\overline{V_0})$ に対し, Fourier 変換の定義より, $\widehat{\psi \circ \pi_{E_m}^*}$
は, $U(E_m)$ -不変. よって $\psi^{\mathcal{P}} \circ \pi_{E_m} = \widehat{\psi \circ \pi_{E_m}^*}$ とする $\psi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{S}(\overline{V_0})$ が

する。 $\psi \mapsto \psi^g$ が条件を満足する。

$\bar{g}g$ ($g \in GL(n, \mathbb{C})$) とおく。

$$\pi_H^*(x) = \psi \circ \pi_{E_n}^*(\bar{g}^{-1}x)$$

$$\widehat{\pi_H^*}(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_H(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_{E_n}(gx)$$

$= E_n$ のときに条件 b) が満たされるだけよい。

上の定数係数偏微分作用素 $D(x)$ を $D(x) e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$

$e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$ を満たすようにとる。 $D(x)$ は、 $h \in U(E_n)$

$(hx) = D(x)$ を満たすことに注意する。

1) について、

$$1 = D(x) \cdot |\bar{x}x|^{2m+1} \int_{U(E_n)} \psi \circ \pi_{E_n}(x^t u) du$$

(du は、 $U(E_n)$ の Haar measure)

$(hx^t u) = \varphi_\psi(x)$ ($h \in U(E_n)$, $u \in U(E_n)$) が成立つ。

$p = \psi \circ \pi_{E_n}$ とする $\varphi_0 \in S(\bar{\mathcal{A}}_0)$ が存在するか、 φ_0 は、条件

a) は明らかである。 $D(x)$ は、 $2m$ 階の定数係数偏微分作

$\varphi_\psi|_S = 0$ 。又、部分積分により、

$$= \int_V D(x) \{ |\bar{x}x|^{2m+1} \int_{U(E_n)} \psi \circ \pi_{E_n}(x^t u) du \} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

$$= |\bar{y}y| \int_V |\bar{x}x|^{2m+1} \int_{U(E_n)} \psi \circ \pi_{E_n}(x^t u) du \cdot e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx。$$

$\gamma = 0$ 。

//

補題 9 を利用して、函数等式 (1) の証明をしよう。

$\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に、Poisson の和公式を適用すれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L} \widehat{\Phi}(x^t b) = \|b\|^{-2m} \sum_{y \in L^*} \Phi(y \bar{b}^{-1})$$

が成立つ。特に、補題 9 の (2) によって、

$$f \circ \pi^*|_S = 0, \quad \widehat{f \circ \pi^*}|_S = |H|^m \cdot f \circ \pi|_S = 0$$

とたゞ $f \in \mathcal{S}(\bar{b}_0)$ とすれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) = \|b\|^{-2m} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1})$$

とある。

$$Z_P^+(S; L; |H|^m f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(\alpha)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) db.$$

$$Z_P^-(S; L; |H|^m f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(\alpha)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) db$$

$$Z_P^{*+}(S; L^*; f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(\alpha)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1}) db$$

$$Z_P^{*-}(S; L^*; f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(\alpha)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1}) db$$

とある。補題 8 により、 Z_P^+ は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ i=1, \dots, k-1\}$

Z_P^- は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}, \ i=1, \dots, k\}$, Z_P^{*+} は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid$

$\operatorname{Re}(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}, \ i=1, \dots, k-1\}$, Z_P^{*-} は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}, \ i=1, \dots, k\}$

7. 絶対収束する。

$$Z_p(S; L: |H|^m f^q) = Z_p^+(S; L: |H|^m f^q) + Z_p^-(S; L: |H|^m f^q)$$

→ Poisson 和公式によって,

$$\begin{aligned} Z_p^-(S; L: |H|^m f^q) &= \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(x)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^x \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^* b) db \\ &= v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(x)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{x-1} \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_p^{(x)}(b)^{s_x - \eta} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y b^{-1}) db \\ &= v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{*(x)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{x-1} \chi_p^{*(i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_p^{*(x)}(b)^{\eta - s_1 - \dots - s_x} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y b^{-1}) db \\ &= v(L^*) Z_p^{*+}(S_{x-1}, \dots, s_1, \eta - s_1, \dots, -s_x; L^*: f). \end{aligned}$$

$$\therefore Z_p(S; L: |H|^m f^q)$$

$$= Z_p^+(S; L: |H|^m f^q) + v(L^*) Z_p^{*+}(S_{x-1}, \dots, s_1, \eta - s_1, \dots, -s_x; L^*: f).$$

この表示は, $Z_p(S; L: |H|^m f^q)$ が, $\{s \in \mathbb{C}^x \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}, i=1, \dots, x-1\}$

上の正則函数として延長されることを示している。

同様にして,

$$\begin{aligned} &Z_p^*(S_{x-1}, \dots, s_1, \eta - s_1, \dots, -s_x; L^*: f) \\ &= Z_p^{*+}(S_{x-1}, \dots, s_1, \eta - s_1, \dots, -s_x; L^*: f) + v(L^*)^{-1} Z_p^+(S; L: |H|^m f^q) \end{aligned}$$

が得られる。

従って $\{S \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(S_i) > \rho_i + \rho_{i+1} \ i=1, \dots, k-1\} \neq \emptyset$.

$$v(L^*)^{-1} Z_p(S_1, \dots, S_k; L; |H|f) = Z_p^*(S_{k-1}, \dots, S_1, \rho_{k-1}, \dots, \rho_1; L^*; f).$$

補題 8 の (i), (ii) と 命題 1 とを合わせれば、容易に函数等式 (1) を得る。 //

Rem. ここで、 $Z_p(L; S)$ (resp. $Z_p^*(L^*; S)$) は、 $\operatorname{Re}(S_i) > \rho_i + \rho_{i+1}$ $i=1, \dots, k-1$, (resp. $\operatorname{Re}(S_i) > \rho_{k-i} + \rho_{k-i+1}$ $i=1, \dots, k-1$) の範囲に有理型函数として解析接続された。 $\mathbb{C}^k$ 全体への解析接続は、函数等式 (2) を必要とする。

§ 5-2 : この節では、函数等式 (2) の証明に必要な補題をまとめおく。

補題 10. n の分割 $q = (q_1, \dots, q_{k+1})$ ($k \geq 1$)、 n 次正定値エルミート行列 H に対し、

$$E_q(H; S_1, \dots, S_k) = \sum_{\substack{U \in SL(n; \mathbb{Q}_k) \\ B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_q^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$E_q^*(H; S_1, \dots, S_k) = \sum_{\substack{U \in SL(n; \mathbb{Q}_k) \\ B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_q^{*(i)}]|^{-S_i}$$

とする。 E_q (resp. E_q^*) は、 $\operatorname{Re}(S_i) > \rho_i + \rho_{i+1}$, $1 \leq i \leq k$ (resp.

$\operatorname{Re}(S_i) > \rho_{k-i+1} + \rho_{k-i+2}$, $1 \leq i \leq k$) で絶対収束して、

$$E_q(H; S_1, \dots, S_k) = |H|^{-S_1 - \dots - S_k} E_q^*(H; S_k, \dots, S_1)$$

$$|H \cup [E_q^{(i)}]| = |H| \cdot |U^{-1} H^{-1} U^{-1} [E_q^{*(k-i+1)}]|$$

$$(H; S_1, \dots, S_k) = |H|^{-S_1 - \dots - S_k} \left\{ \sum_{U \in SL(n; \mathbb{Q}_k)} \prod_{i=1}^k |U^{-1} H^{-1} U^{-1} [E_q^{*(k-i+1)}]|^{-S_i} \right\}$$

$t_{B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)}$

$(n; \mathbb{Q}_k) / t_{B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)}$ の完全代表系を動かすと、 t_U^{-1} は、

$B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)$ の完全代表系を動かすことにより、

$$(H; S_1, \dots, S_k) = |H|^{-S_1 - \dots - S_k} E_q^*(H; S_k, \dots, S_1) \quad .$$

4 すでに注意したように Godement の判定条件によらぬ。

命題 2. の証明で利用した記号を再び使う。すなわち、

$$) = \mathbb{R}^x \cdot A \cdot N = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\frac{dt}{t}, da = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{da_i}{a_i}, dn = \prod_{i,j} d\operatorname{Re} n_{ij} d\operatorname{Im} n_{ij}.$$

$$u) = U(E_m) \cap B_p = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_k \end{pmatrix} \mid A_i \in U(E_{p_i}) \right\} \cong \prod_{i=1}^k U(E_{p_i})$$

かつ $B_p = U_p(E_m) \cdot B^+(m)$ と分解できる。 $B_p \ni b$ の対

に $b = u \cdot b^+ (u \in U_p(E_m), b^+ \in B^+(m))$ とする。

の right invariant measure db^+ , $U_p(E_m)$ 上の Haar

du と、それぞれ、

$$db^+ = \prod_{i=1}^m a_i^{q_i} dx_t da dn$$

$$\int_{U_p(E_m)} du = 2^m \cdot \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i} T(j)} \right)$$

と。このとき、

$$db = du db^+$$

は、p.7で与えられた B_p の right invariant measure τ である。

特に、 $X=1$, $P=(m)$ のとき、

$$GL(m; \mathbb{C}) = U(E_m) \cdot B^+(m)$$

$$dg = \frac{\prod_{i,j} d\operatorname{Re} g_{ij} d\operatorname{Im} g_{ij}}{\|g\|^{2m}} = du dt \quad (g = (g_{ij}) \in GL(m; \mathbb{C}))$$

$$\int_{U(E_m)} du = 2^m \frac{\pi^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}$$

補題11. $f \in S(\overline{H_0})$ かつ、 $f(\alpha w^t u) = f(w)$ ($u \in U(E_m)$, $w \in \overline{H_0}$)
を満足するとしよう。このとき、 $GL(m; \mathbb{Q}_K)$ -不変な格子 $L \subset \overline{H_0}$
に対し、

(i) $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, X$, $p_{X+1} = n-m$) とき、

$$Z_p(S; L; f) = \pi^{\frac{p_1^2 + \dots + p_X^2 - m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^X \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_K)} \|g\|^{2S_X} E_p(({}^t \bar{g} g)^{-1}; S_1, \dots, S_X) \sum_{j \in L \cap V_S} f(H[j] g) dg.$$

(ii) $\operatorname{Re}(S_i) > p_{X-i} + p_{X-i+1}$ ($i=1, \dots, X$, $p_0 = n-m$) とき、

$$Z_p^*(S; L; f) = \pi^{\frac{p_1^2 + \dots + p_X^2 - m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^X \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_K)} \|g\|^{-2S_X} E_p^*(({}^t \bar{g} g)^{-1}; S_1, \dots, S_X) \sum_{j \in L \cap V_S} f(H^{-1} j \bar{g}^{-1}) dg$$

(i) (i). 補題 8 より, $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) へ $Z_P(S; L; f)$ は絶対収束して, 以下の変形が許される。

$$\begin{aligned} Z_P(S; L; f) &= \int_{B_P/B_P(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b) S_i \sum_{\{ \in L \cap V-S \}} f(H[\{^t b\}]) db \\ &= \int_{B_P} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b) S_i \sum_{\{ \in L \cap V-S / \sim \}} f(H[\{^t b\}]) db \end{aligned}$$

f の $U(E_m)$ -不変性により,

$$\begin{aligned} &= 2^m \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \right) \cdot \int_{B^+(m)} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b) S_i \sum_{\{ \in L \cap V-S / \sim \}} f(H[\{^t b\}]) db \\ &= \pi^{\frac{p_1^2 + \dots + p_k^2 - m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \\ &\quad \times \int_{GL(m; \mathbb{C})} \|g\|^{2S_k} \prod_{i=1}^k |(\bar{g}g)^{-1} [E_P^{(i)}]|^{-S_i} \sum_{\{ \in L \cap V-S / \sim \}} f(H[\{^t g\}]) dg. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= C_P \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \|g\|^{2S_k} \sum_{U \in GL(m; \mathbb{Q}_k) / B_P(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^k |(\bar{g}g)^{-1} [U^{-1} E_P^{(i)}]|^{-S_i} \\ &\quad \times \sum_{\{ \in L \cap V-S \}} f(H[\{^t U g\}]) dg. \end{aligned}$$

$L \cap V-S$ が $GL(m; \mathbb{Q}_k)$ -不変となることに注意すれば,

$$= C_P \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \|g\|^{2S_k} E_P((\bar{g}g)^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\{ \in L \cap V-S \}} f(H[\{^t g\}]) dg$$

ここで、簡単に、 $\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_k^2 - m^2)} \cdot \prod_{i=1}^m T(i) \cdot \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} T(i) \right)^{-1}$ を C_P と書
いた。(ii) も全く同じ議論で証明できる。 //

Remark: $Z_P^+(S; L; f)$, $Z_P^{*-}(S; L; f)$ を p-28 と同様に定義すれば、

$\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-1$) で、

$$Z_P^+(S; L; f) = C_P \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) / \\ GL(m; \mathbb{O}_k) \\ \|g\| \geq 1}} \|g\|^{2S_k} E_P(tgg^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\gamma \in L \cap V-S} f(H[\gamma g]) dg$$

$\operatorname{Re}(S_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}$ ($i=1, \dots, k-1$) で、

$$Z_P^{*-}(S; L; f) = C_P \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) / \\ GL(m; \mathbb{O}_k) \\ \|g\| \leq 1}} \|g\|^{-2S_k} E_P^*(tgg^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\gamma \in L \cap V-S} f(H^{-1}[\gamma g^{-1}]) dg$$

が、補題11と同じ仮定の下で成立する。

§5-1 で示したように、 $\psi \in S(\overline{H_0})$ が、 $\psi \cdot \pi|_S = 0$, $\widehat{\psi \cdot \pi}|_S = 0$ を
満たすならば、 $Z_P(S; L; \psi)$ は $\{(S_1, \dots, S_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1} (i=1, \dots, k-1)\}$
上の正則関数とみなせ、次の不等式が成立する。すなわち、

補題12 $\psi \in S(\overline{H_0})$ が、 $\psi \cdot \pi^*|_S = 0$, $\widehat{\psi \cdot \pi^*}|_S = 0$ を満たすならば、領域
 $D_M = \{(S_1, \dots, S_k) \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1} (i=1, \dots, k-1), |\operatorname{Re}(S_k)| < M\}$ ($M > 0$) 上で

$$|Z_P(S; L; \psi)| \leq Z_P(\operatorname{Re}(S_1), \dots, \operatorname{Re}(S_{k-1}), M; L; \psi_1)$$

$$+ v(L^*) Z_P^*(\operatorname{Re}(S_1), \dots, \operatorname{Re}(S_1), n+M-\operatorname{Re}(S_1), \dots, \operatorname{Re}(S_{k-1}); L^*; \psi_2)$$

を満たす $\psi_1, \psi_2 \in S(\overline{H_0})$ が存在する。

$$\begin{aligned}
 (i) \quad Z_P(S; L; \Psi^3) &= \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \geq 1}} \frac{\prod_{i=1}^s \chi_P^{(i)}(b)^{S_i}}{\sum_{X \in L \cap V-S}} \widehat{\Psi \cdot \pi^*}(X^e b) db \\
 &+ \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \leq 1}} \frac{\prod_{i=1}^s \chi_P^{(i)}(b)^{S_i}}{\sum_{Y \in L^* \cap V-S}} \chi_P^{(i)}(b)^{-\alpha_i} \cdot v(L^*) \widehat{\Psi \cdot \pi^*}(Y^e b^{-1}) db
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore |Z_P(S; L; \Psi^3)| &\leq \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \geq 1}} \frac{\prod_{i=1}^s \chi_P^{(i)}(b)^{R_0(S_i)}}{\sum_{X \in L \cap V-S}} |\widehat{\Psi \cdot \pi^*}(X^e b)| db \\
 &+ v(L^*) \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \leq 1}} \frac{\prod_{i=1}^s \chi_P^{(i)}(b)^{R_0(S_i)}}{\sum_{Y \in L^* \cap V-S}} \chi_P^{(i)}(b)^{-\alpha_i} |\widehat{\Psi \cdot \pi^*}(Y^e b^{-1})| db
 \end{aligned}$$

$\therefore D_1$ 上では.

$$\begin{aligned}
 |Z_P(S; L; \Psi^3)| &\leq \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \geq 1}} \frac{\prod_{i=1}^{s-1} \chi_P^{(i)}(b)^{R_0(S_i)}}{\sum_{X \in L \cap V-S}} \chi_P^{(s)}(b)^M |\widehat{\Psi \cdot \pi^*}(X^e b)| db \\
 &+ v(L^*) \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \leq 1}} \frac{\prod_{i=1}^{s-1} \chi_P^{(i)}(b)^{R_0(S_{i-1})}}{\sum_{Y \in L^* \cap V-S}} \chi_P^{(s)}(b)^{M+M-R_0(S_1)-\dots-R_0(S_{s-1})} |\widehat{\Psi \cdot \pi^*}(Y^e b^{-1})| db \\
 &\leq \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \geq 1}} \frac{\prod_{i=1}^{s-1} \chi_P^{(i)}(b)^{R_0(S_i)}}{\sum_{X \in L \cap V-S}} \chi_P^{(s)}(b)^M |\widehat{\Psi \cdot \pi^*}(X^e b)| db \\
 &+ v(L^*) \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \leq 1}} \frac{\prod_{i=1}^{s-1} \chi_P^{(i)}(b)^{R_0(S_{i-1})}}{\sum_{Y \in L^* \cap V-S}} \chi_P^{(s)}(b)^{M+M-R_0(S_1)-\dots-R_0(S_{s-1})} |\widehat{\Psi \cdot \pi^*}(Y^e b^{-1})| db.
 \end{aligned}$$

ここで, $\Psi_1, \Psi_2 \in S(\bar{H}_0)$, $\Psi_1 \cdot \pi(x) \geq |\widehat{\Psi_1 \cdot \pi^*}(x)|$, $\Psi_2 \cdot \pi^*(x) \geq |\widehat{\Psi_2 \cdot \pi^*}(x)|$
 $(\forall x \in V)$ なるようにとれる (Weil [12] lemma 5.). よって, 補
 題は成立つ. //

§5-3 : 函数等式 (2) の証明.

§5-3-1 巡回置換に対する不変性

$f \in \mathcal{S}(\overline{K_0})$ を補題 9 の (2) の条件 a), b) を満足するようにとり、
 9 時、補題 11 によって、

$$Z_p(S; L; |H|^m f^p) = c_p \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{O}_K)}} \|g\|^{2S} E_p((g\bar{g})^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\{g\} \in L \cap V-S} |H|^m f^p(H[g\bar{g}]) dg$$

が、 $Re(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$, $p_{k+1} = n-m$) で成立つ。

又、Poisson の和公式の形として、

$$(*)_1 \quad v(L^*)^{-1} \sum_{\{g\} \in L \cap V-S} |H|^m f^p(H[g\bar{g}]) = \|g\|^{-2u} \sum_{\{g\} \in L^* \cap V-S} f(H^*[\{g\bar{g}^{-1}]) \quad (g \in GL(m; \mathbb{C}))$$

が得られる。

さて、 $E_p((g\bar{g})^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1})$ は、補題 7, 8 によって、いま考えている Type の概均値ベクトル空間の Zeta 函数の主要な因子として得られる。詳しく言えば、次のようには。

$\mathbb{P}_1 = (p_1, \dots, p_{k-1})$ は、 $k_P^{(k-1)}$ の rank $k-1$ の分割。 $G_{\mathbb{P}_1}^{(g)} = U((g\bar{g})^{-1}) \times B_{\mathbb{P}_1}$ ($g \in GL(m; \mathbb{C})$), $V_1 = M(m, k_P^{(k-1)}; \mathbb{C})$, $S_1 = \{X \in V_1 \mid \text{rank } X \leq k_P^{(k-1)}\}$, $L_1 = M(m; k_P^{(k-1)}; \mathbb{O}_K)$ とおく。

$\overline{H}_1 = \{w \in M(k_P^{(k-1)}; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{w} = w \geq 0\}$, $\mathcal{H}_1 = \{w \in \overline{H}_1 \mid w \neq 0\}$ とおく。 $\widetilde{dw}$, $\widetilde{dw}^*$ は、分割 $\mathbb{P}_1$ に対して、p. 7, 8 と同様に定義される $\mathcal{H}_1$ 上の $G_{\mathbb{P}_1}^{(g)}$ -相対不変測度。 $\pi_g: V_1 \rightarrow \overline{H}_1$, $\pi_g^*: V_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ は

$\pi_g(x) = ({}^t\bar{g}g)^{-1}[x]$, $\pi_g^*(x) = ({}^t\bar{g}g)[x]$ ($x \in V_1$) ($g \in GL(m; \mathbb{C})$) で定める。

任意の $g \in GL(m; \mathbb{C})$ に対し, $\psi \circ \pi_g^*|_S = 0$, $\widehat{\psi \circ \pi_g^*}|_S = 0$ とする $\psi \in S(\bar{H}_1)$, $\psi \neq 0$ がある。補題 9 によってこのような ψ は存在している。

$e_{\mathbb{R}_1} = \pi^{\frac{1}{2}}(p_1^2 + \dots + p_{k-1}^2 + k_{\mathbb{R}}^{(k-1)}) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{p_i} T(j) \right)^{-1}$, $\sigma_0 = (1, 2, \dots, k)$ とおく。このとき, 補題 7, 8, 及び, 補題 1, より,

$$\begin{aligned}
 (*)_2. \quad Z_{\mathbb{R}_1}^{(g)}(s_1, \dots, s_{k-1}; L_1; \|g\|^{-2k_{\mathbb{R}}^{(k-1)}}; \psi) \\
 &= \int_{\mathbb{B}_{\mathbb{R}_1}/\mathbb{B}_{\mathbb{R}_1}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{R}_1}^{(i)}(b_i)^{s_i} \sum_{x \in L_1 \cap V_1 S_1} \|g\|^{2k_{\mathbb{R}}^{(k-1)}} \psi \circ \pi_g(x \bar{b}_1) db_1 \\
 &= e_{\mathbb{R}_1} \cdot \|g\|^{-2k_{\mathbb{R}}^{(k-1)}} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} J_K(s_i + \dots + s_{k-1} - k_{\mathbb{R}}^{*(k-i-1)}; -j) \\
 &\quad \cdot \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-1} |\omega[E_{\mathbb{R}_1}^{(i)}]|^{s_i} d\omega \cdot E_{\mathbb{R}}({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*)_3. \quad Z_{\mathbb{R}_1}^{*(g)}(s_1, \dots, s_{k-1}; L_1^*; \psi) \\
 &= \int_{\mathbb{B}_{\mathbb{R}_1}/\mathbb{B}_{\mathbb{R}_1}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{R}_1}^{*(i)}(b_i)^{s_i} \sum_{y \in L_1^* \cap V_1 S_1} \psi \circ \pi_g^*(y \bar{b}_1^{-1}) dy \\
 &= e_{\mathbb{R}_1} \cdot \left(\frac{|D|}{4}\right) \prod_{i=1}^{k-1} k_{\mathbb{R}}^{*(i)} s_i \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} J_K(s_i + \dots + s_{k-1} - k_{\mathbb{R}}^{(k-i-1)}; -j) \\
 &\quad \cdot \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-1} |\omega[E_{\mathbb{R}_1}^{*(i)}]|^{s_i} d\omega \cdot E_{\mathbb{R}_0}^*({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1}).
 \end{aligned}$$

ただし、 D は虚二次体 K の判別式である。 $(*)_3$ を導く際には、

$$L_1^* = M(m, k_p^{(2-1)}, 2\theta^{-1}) \quad (\theta \text{ は } K \text{ の任意差積}) \text{ を利用すること}$$

に注意しておく。

§5-1 の結果によって、 $(*)_2$ 、 $(*)_3$ に現れる函数は、すべて

$\{(s_1, \dots, s_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1} \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k-2)\}$ 上の有理型函数と考へる。

補題 3 $d_i > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k-2)$, $M > \max\{p_{k-1} + p_k, d_1 + \dots + d_{k-2} + p_{k-1} + p_k - m\}$ なる正数 $d_1, \dots, d_{k+2}$, $M \in \mathbb{C}$ かつ

$$\Omega = \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k-2), M > \operatorname{Re}(s_{k-1}) > -M\}$$

とおく。積令

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_p^*(S; L; |H|^m f^p) &= C_{\mathbb{P}} \varepsilon_{\mathbb{P}}^{-1} \\ &\times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \|g\|^{2s_k + 2k_p^{(2-1)}} Z_{\mathbb{P}}^{(g)}(s_1, \dots, s_{k-1}; L_1; \|g\|^{-2k_p^{(2-1)}} \psi^p) \sum_{\substack{\{ \in L \cap V-S \\ \}} |H|^m f^p(H[\frac{c}{g}]) \frac{db}{dg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_p^*(S; L; |H|^m f^p) &= C_{\mathbb{P}} \varepsilon_{\mathbb{P}}^{-1} \\ &\times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \|g\|^{2s_k + 2k_p^{(2-1)}} Z_{\mathbb{P}}^{*(g)}(s_{k-2}, \dots, s_1, m-s_1, \dots, s_{k-1}; L_1^*; \psi) \\ &\times \sum_{\substack{\{ \in L \cap V-S \\ \}} |H|^m f^p(H[\frac{c}{g}]) \frac{db}{dg}. \end{aligned}$$

を考えると、これは Ω 上の正則函数と表わし、

$$\tilde{Z}_P(S; L; |H|^m f^p) = v(L_1^*) \tilde{Z}_P^*(S; L; |H|^m f^p)$$

なる関係式と表わす。

この補題の証明は後回しとし、まずこの等式の意味するところを
考えてみる。

まず、 $\Omega_1 = \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k)\}$ 上では、

(*)₂ と補題 11 の (i) によつて、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i-1}{\Gamma} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (s_i + \dots + s_{k-1} - k_{P_1}^{*(k-i-1, -j)}) \int_{H_1} \psi^S(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w|^{E_{P_1}^{(i)}} \frac{dw}{dw} \\ &\quad \times Z_P(S; L; |H|^m f^p) \end{aligned}$$

一方、(*)₃ によれば、

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_P^*(S; L; |H|^m f^p) &= \left(\frac{4}{|D|} \right)^{\sum_{i=1}^{k-1} k_{P_1}^{(i)} s_i - m \cdot k_P^{(k-1)}} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i-1}{\Gamma} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (-s_{k-i} - \dots - s_{k-1} + k_{P_0}^{*(i+1, -j)}) \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w|^{E_{P_1}^{*(i)}} \frac{dw}{dw} \\ &\quad \cdot |w|^{m-s_1-\dots-s_{k-1}} \frac{dw}{dw} \\ &\quad \times C_P \int \frac{|gH|^{2(S_{k-1}+S_k-p_k)}}{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} E_{P_0}(m-s_1-\dots-s_{k-1}, s_1, \dots, s_{k-2}) \\ &\quad \times \sum_{\{ \in L \cap V^S \}} |H|^m f^p(H[\frac{1}{2}]) \frac{dg}{db}. \end{aligned}$$

ただし、ここで補題 10 を考慮に入れたい。

従って、再度補題 11 の (i) によって

$$\Omega_2 = \left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i=1, \dots, k-2) \\ m - \operatorname{Re}(s_1) - \dots - \operatorname{Re}(s_{k-1}) > p_k + p_1 \\ \operatorname{Re}(s_{k-1}) + \operatorname{Re}(s_k) > p_{k-1} + p_k + n - m \end{array} \right. \right\}$$

上で、

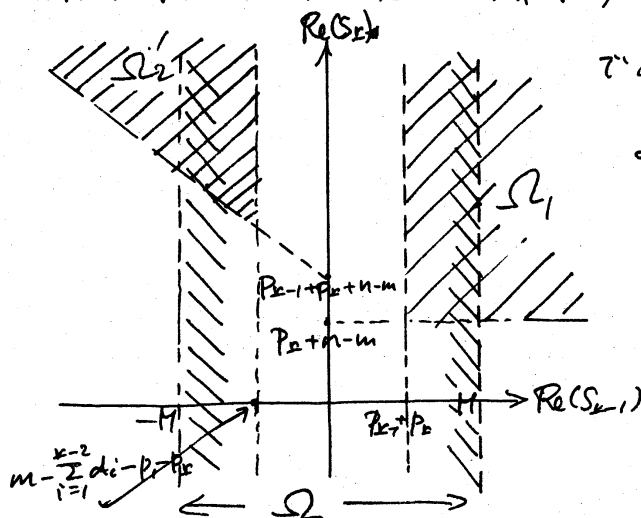
$$\begin{aligned} \tilde{Z}_P^*(S; L; |H|^m f^p) &= \left(\frac{4}{|D|} \right) \prod_{i=1}^{k-1} k_{P_i}^{(\alpha_i-1)} s_i^{\alpha_i-1} - m k_P^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i-1}{s_i} s_k (-s_{k-1} - \dots - s_{k-1} + k_{P_1}^{*(\alpha_1-1)} - \frac{1}{s_1}) \\ &\times \int_{\mathcal{M}_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w|^{E_{P_i}^{*(\alpha_i-1)}} |w|^{m-s_1-\dots-s_{k-1}} dw^* \\ &\times Z_{P^0}(m-s_1-\dots-s_{k-1}, s_1, \dots, s_{k-2}, s_{k-1}+s_k-p_k; L; |H|^m f^p) \end{aligned}$$

である。

ここで $d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-2$) に制約をもちき。

$$\Omega'_2 = \left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i=1, \dots, k-2) \\ m - \sum_{i=1}^{k-2} d_i - p_1 - p_k > \operatorname{Re}(s_{k-1}) \\ \operatorname{Re}(s_{k-1}) + \operatorname{Re}(s_k) > p_{k-1} + p_k + n - m \end{array} \right. \right\}$$

とすると $\Omega'_2 \subset \Omega_2$ 。M のとりに注意すると、 $\Omega, \Omega_1, \Omega'_2$ の間に、下図のような交わりが存在する。($d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-2$)



での図である。

よって、 $\tilde{Z}_P(S; L; |H|^m f^p)$ (従

って、 $Z_P(S; L; |H|^m f^p)$) は、

$\Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ が convex

full 7 to 4 t.

$$\left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \\ i=1, \dots, k-2 \end{array} \right. \right\}$$

上の有理型函数へ解析接続される。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \longmapsto m - S_1 - \dots - S_{k-1} \\ S_2 \longmapsto S_1 \\ \dots \\ S_{k-1} \longmapsto S_{k-2} \\ S_k \longmapsto S_{k-1} + S_k - p_k \end{array} \right.$$

という変換を (H) によって、 $Z_1, \dots, Z_k$ について、変換を書き換える

と、これは、 $0_0 = (1, 2, \dots, k; k, 1, \dots, k-1)$ に対し、

$$\{ Z_i \mapsto Z_{0_0(i)}, \quad p_i \mapsto p_{0_0(i)} \mid i=1, \dots, k \}$$

という変換を行っていいことになる。つまり、補題13は、 $Z_P(Z; L; |H|f^p)$

と $Z_{P_0}(Z_{0_0(1)}, \dots, Z_{0_0(k)}; L; |H|f^p)$ の間に成立つ函数等式を与えている。

次に、この函数等式を見やすい型に整理してみよう。

命題1と補題1を考慮して書きかえよ。

$$\begin{aligned} & \pi^{-\sum_{i=1}^{k-1} k_P^{(i)} S_i} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} T(S_i + \dots + S_{k-1} - k_P^{*(k-i-1)} - j) \\ & \quad \times \int_{\mathcal{H}_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w[E_{P_i}^{*(i)}]|^{S_{k-i-1}} |w|^{m-S_1-\dots-S_{k-1}} \widetilde{dw}^* \\ &= \pi^{-\sum_{i=1}^{k-1} k_P^{(i)} S_i - m k_P^{(k-1)}} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} T(-S_{k-i} - \dots - S_{k-1} - k_P^{(i+1)} - j) \\ & \quad \times \int_{\mathcal{H}_1} \psi^p(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w[E_{P_i}^{(i)}]|^{S_i} \widetilde{dw} \end{aligned}$$

$$\text{又、} v(L_1^*) = \left(\frac{2}{\sqrt{D}}\right)^{m k_P^{(k-1)}} \text{ である。}$$

これを利用して、変形すれば、補題13の示すところから、

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \gamma_k(z_x - z_i + \frac{p_i + p_x}{2} - j) \cdot Z_P(z_1, \dots, z_x; L; |H|^m f^g) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \gamma_k(z_i - z_x + \frac{p_i + p_x}{2} - j) Z_{P^{\sigma_0}}(z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)}; L; |H|^m f^g) \end{aligned}$$

である。補題 8 と命題 2 と合わせれば、

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \gamma_k(z_x - z_i + \frac{p_i + p_x}{2} - j) \cdot \zeta_P(L; z_1, \dots, z_x) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \gamma_k(z_i - z_x + \frac{p_i + p_x}{2} - j) \cdot \zeta_{P^{\sigma_0}}(L; z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)}) \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、巡回置換 $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ k & 1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$ に対する函数等式である。

又、この函数等式によって、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_x)$ の $\mathbb{C}^k$ 上の有理型函数への解析接続が得られる。実際、今説明したように、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_x)$ は、変数 z_{x-1}, z_x について全平面に解析接続される。右辺と比べれば、 z_{x-2}, z_{x-1} について全平面に解析接続されている。よって、この函数等式で、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_x)$ を z_{x-2} について全平面で定義できる。以下、 σ_0^i ($i=1, 2, \dots$) に対応する函数等式を利用して、 ζ_P の $\mathbb{C}^k$ 上の解析接続を得る。

(補題 13 の証明)

積 $\tilde{Z}_P(S; L; |H|^m f^g)$ が Ω 上で絶対収束することはいふ。このとき、函数等式は、 $Z_P^{(g)}$ の §5-1 で論じた函数等式から直ちに従う。

$f^g \geq 0$ と仮定してよい。以下、絶対値と考へるから、 $S \in \mathbb{R}$ 。

補題 12 により、

$$\begin{aligned}
& \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2(S_k + k_P^{(\alpha-1)})}{\|g\|} \frac{1}{Z_{P_1}^{(g)}(S_1, \dots, S_{k-1}; L_1; \|g\| \psi^g)} \frac{-2k_P^{(\alpha-1)}}{\psi^g} \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^\mu f^g(H[\zeta^g]) dg \\
& \leq \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2S_k}{\|g\|} Z_{P_1}^{(g)}(S_1, \dots, S_{k-2}, M; L_1; \psi_1) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^\mu f^g(H[\zeta^g]) dg \\
& + \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2S_k}{\|g\|} Z_{P_1}^{*(g)}(S_{k-2}, \dots, S_1, M+M-S_1, \dots, S_{k-2}; L_1^*; \psi_2) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^\mu f^g(H[\zeta^g]) dg \\
& = \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2S_k}{\|g\|} Z_{P_1}^{(g)}(S_1, \dots, S_{k-2}, M; L_1; \psi_1) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^\mu f^g(H[\zeta^g]) dg \\
& + \psi(L_1^*) \psi(L^*) \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2S_k + 2k_P^{(\alpha-1)} - 2m}{\|g\|} Z_{P_1}^{*(g)}(S_{k-2}, \dots, S_1, M+M-S_1, \dots, S_{k-2}; L_1^*; \psi_2) \\
& \quad \times \sum_{\eta \in L^* \cap V-S} f(H[\eta^g]) dg.
\end{aligned}$$

Ω 上では, $M+m-S_1, \dots, S_{k-2} > M+m-d_1, \dots, d_{k-2} > p_1 + p_k$ とおける.

とに注意する. σ -積分について考えると, $(*)_2$ より,

$$\begin{aligned}
\text{積分} &= E_{P_1} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (S_i + \dots + S_{k-2} + M - k_{P_1}^{*(\alpha-i-1)} - j) \cdot \int_{\mathcal{H}_1} \psi_1(\omega) \prod_{i=1}^{k-2} |\omega[E_{P_1}^{(\omega)}]|^{S_i} M \widetilde{\omega} \\
& \times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2S_k}{\|g\|} E_P(\xi \bar{\xi})^{-1} (S_1, \dots, S_{k-2}, M) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^\mu f^g(H[\zeta^g]) dg \\
& = E_{P_1} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (S_i + \dots + S_{k-2} + M - k_{P_1}^{*(\alpha-i-1)} - j) \int_{\mathcal{H}_1} \psi_1(\omega) \prod_{i=1}^{k-2} |\omega[E_{P_1}^{(\omega)}]|^{S_i} M \widetilde{\omega} \\
& \quad \mathcal{H}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2S_k + \cancel{2S_k} = 2M}{\|g\|} F_{\mathbb{P}}^*(\overline{cgg}^{-1}; S_1, \dots, S_{k-2}, M) \sum_{\gamma \in L \cap V-S} |H|^m f^g(H[\gamma g]) dg \\
& \quad \|g\| \geq 1. \\
& + \psi(L^*) \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \frac{2(S_k + M + S_{k-2} + \dots + S_1 - \eta)}{\|g\|} F_{\mathbb{P}}^*(\overline{cgg}^{-1}; M, S_{k-2}, \dots, S_1) \sum_{\gamma \in L \cap V-S} f(H[\gamma g^{-1}]) dg \\
& \quad \|g\| \leq 1
\end{aligned}$$

補題11のRemarkによつて、これらの積分は収束する。

オ2の積分についても、全く同様であるから省略する。 //

§5-3-2. 互換に対する不変性.

巡回置換に対する函数等式を考慮すれば、 $\sigma = (1, 2)$ について証明すれば十分である。 $\sigma = (1, 2)$ について、 $z_1 \rightarrow z_2, z_2 \rightarrow z_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1$ なる変換を S_i の変換に書きかえてみる。

$$\begin{cases} S_1 \rightarrow t_1 = -S_1 + (p_1 + p_2) \\ S_2 \rightarrow t_2 = S_1 + S_2 - p_2 \\ S_i \rightarrow t_i = S_i \quad (i=3, \dots, k) \end{cases}$$

命題2により、

$$Z_{\mathbb{P}}(t_1, \dots, t_k; L^*; |H|^m f) = \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} Z_{\mathbb{P}}(S_1, \dots, S_k; L^*; |H|^m f)$$

を証明すればよい。

γ に因する帰納法で証明する。 $\gamma = 2$ の時は、 $\sigma = \sigma_0$ 、すなわち、
§5-3-1 で求めた巡回置換についての函数等式に他ならぬ。

以下、 $\gamma \geq 3$ とする。

補題 9 の (2) の条件 a), b) を満足する $f \in S(\overline{\mathbb{A}_0})$ について、

$$\begin{aligned} & Z_{\rho_0}^*(t_{x-1}, \dots, t_1, n-t_1, \dots, t_x; L^*: f) \\ &= \int_{\substack{GL(n; \mathbb{C}) \\ GL(n; \mathbb{Q}_x)}} \|g\|^{-2(n-t_1-\dots-t_x)} E_{\rho_0}^*(\bar{c}g\bar{c}^{-1}; t_{x-1}, \dots, t_1) \sum_{\{ \in L^* \cap V-S \}} f(H^{-1} \bar{t}_1 \bar{g}^{-1}) dg \end{aligned}$$

§5-3-1 と、同様の条件の下で、

$$\int_{\substack{GL(n; \mathbb{C}) \\ GL(n; \mathbb{Q}_x)}} \|g\|^{-2(n-t_1-\dots-t_x)} Z_{\rho_2}^{*(g)}(t_{x-1}, \dots, t_1; L^*: \psi) \sum_{\{ \in L^* \cap V-S \}} f(H^{-1} \bar{t}_1 \bar{g}^{-1}) dg$$

$$\rho_2 = (p_1, p_3, \dots, p_x)$$

と表わせば、補題 13 と同じ論法で、

$$\tilde{\Omega} = \left\{ (t_1, \dots, t_x) \in \mathbb{C}^x \mid \begin{array}{l} M > t_1 > -M \\ d_2 > t_2 > p_1 + p_3 \\ d_3 > t_3 > p_3 + p_4 \\ \vdots \\ d_{x-1} > t_{x-1} > p_{x-1} + p_x \end{array} \right\}$$

$M, d_2, \dots, d_{x-1}$ は十分大なる正数、(M は d_i に依存する。)

この領域上で意味を持ち、正則函数を表わす。

さて、

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(t_1, \dots, t_{x-1}) &= \varepsilon_{\rho_2} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{\sum_{i=1}^{x-1} k_{\rho_2}^{*(i)} t_{x-i}} \frac{\prod_{i=1}^{x-1} p_{\rho_2(i)}^{-1}}{\prod_{j=0}^{x-1} \prod_k (t_{x-i} + \dots + t_1 - k_{\rho_2} - j)} \\ &\quad \times \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{x-1} |w[E_{\rho_2}^{*(i)}]|^{s_i} \tilde{dw}^* \end{aligned}$$

とおけば, $(*)_3$ より,

$$\text{積令} = \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{x-1}) \cdot Z_{\mathbb{P}^0}^*(t_{x-1}, \dots, t_1, n-t_1, \dots, t_x; L^*: f)$$

— 又, Poisson の公式と補題 10 より,

$$\text{積令} = v(L^*)^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{x-1})$$

$$\times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \|g\|^{2L} E_{\mathbb{P}^0}(\tilde{g}g^{-1}; t_1, \dots, t_{x-1}) \sum_{\{ \in L^* \cap T-S \}} |H|^m f(H \{g\}) dg.$$

解法 4 の仮定によって,

$$E_{\mathbb{P}^0}(\tilde{g}g^{-1}; t_1, \dots, t_{x-1}) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{p_1-1}} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} E_{\mathbb{P}}(\tilde{g}g^{-1}; s_1, \dots, s_{x-1})$$

だから, ことわ,

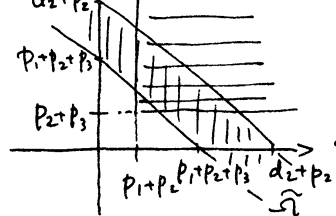
$$v(L^*)^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{x-1}) \cdot \frac{1}{\prod_{j=0}^{p_1-1}} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} \\ \times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \|g\|^{2L} E_{\mathbb{P}}(\tilde{g}g^{-1}; s_1, \dots, s_{x-1}) \sum_{\{ \in L^* \cap T-S \}} |H|^m f(H \{g\}) dg$$

従って, $\{p_{Si} > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, x)\}$ 上では, この積令は収束し,

$$\text{積令} = v(L^*)^{-1} \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{x-1}) \cdot \frac{1}{\prod_{j=0}^{p_1-1}} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} \\ \times Z_{\mathbb{P}}(s_1, \dots, s_x; L^*; |H|^m f^P).$$

さて, $\tilde{\Omega}$ と, $\{p_{Si} > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, x)\}$ 上では, 共通部分を持つ (cf 上に述べ)

$F(\tilde{\Omega}) \cap \text{Re}(S_2)$ ($d_2 > p_1 + 2p_2 + p_3$ と仮定する)。



従って, 以上の結果をまとめると,

$$Z_{\mathbb{P}^0}(t_1, \dots, t_x; L^*; |H|^m f) \\ = \frac{1}{\prod_{j=0}^{p_1-1}} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} Z_{\mathbb{P}}(s_1, \dots, s_x; L^*; |H|^m f)$$

これで、 $\sum_p$ に関する函数等式は完全に証明された。 $\sum_p^*$ については、函数等式(1)を利用して、この等式を書き直せばよい。

<参考文献>

- [1] I.M. Bernstein & S.I. Gel'fand, Meromorphy of the function P^λ , *Funct. Anal. & its Appl.* 3. 1. (1969) 84-86.
- [2] A. Borel, Introduction to automorphic forms, *Proc. Symp. Pure Math.* 18 A.M.S. Providence (1966) 199-210.
- [3] S. Helgason, Differential geometry and Symmetric spaces, New York, Academic Press (1962)
- [4] 根原-三輪, Micro local calculus と 概均値ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換, 数理論講要録 238 (1975) 60-147.
- [5] 宮正和, Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について, 数理論講要録 "代数解析学の諸問題" (1975)
- [6] H. Maass, Siegel's Modular forms and Dirichlet series, *Lect. note in Math.*, vol 216, Springer, (1971)
- [7] 佐藤-新谷, 概均値ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15-1
- [8] H. Sato and T. Shintani, Zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* (1974) 100 131-170

- [9] C.L. Siegel, *Lectures on quadratic forms*, Tata (1957)
- [10] A. Terras, A generalization of Epstein's Zeta function
Nagoya Math. Jour. (42) (1971) 173-188
- [11] A. Terras, Functional equations of generalized Epstein
Zeta functions in several complex variables, Nagoya
Math. Jour. (44) (1971), 89-95.
- [12] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires,
Acta Math. 111 (1964) 143-211.