

Burgers 乱流の相似則と renormalization

相模工業大学 情報工学科 水島=郎

Burgers 乱流の統計的諸性質を Burgers 方程式の厳密解から出発して調べた。二つの仮定①乱流の速度場の相似性、②大きいスケールの運動の不変性 と renormalization の方法を用いた。結果として、エネルギーは低波数におけるエネルギースペクトルの形により、 $\epsilon^{-2/3} \sim \epsilon^{-2}$ のべきで減衰することがわかった。

まず、Burgers 方程式から出発する。Burgers 方程式の厳密解の漸近形において、その漸近形が表わす多数のショックのうち任意の一つのショックをとりあげ、その一つのショックの形から、速度相関・エネルギースペクトルを求める。ここでは、一つのショックだけしか考えなかったので、ショックの集団運動の影響すなわちショックの衝突の効果が取り入れられていない。上で失われた衝突の効果は、乱流場の代表的

長さが $(t/t_0)^\alpha$ に比例して増大することと表われると考える。ここでは、長さのスケールを $(t/t_0)^\alpha$ で再規格化することにより衝突の効果を取り入れる。図式的に書くと、

$$\underset{\text{(衝突なし)}}{l=l_0} \longrightarrow \underset{\text{(衝突の効果で増大)}}{l=l_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha}$$

となり、諸量を t とせば $l \rightarrow \frac{l}{l_0 (t/t_0)^\alpha}$, $v \rightarrow \frac{v}{V_0 (t/t_0)^\alpha}$

$R \rightarrow R (t/t_0)^{2\alpha}$ のように再規格化することにより衝突の効果を取り入れる。再規格化で得られたエネルギースペクトル

からエネルギー減衰則を導く。一方、Burgers方程式の厳密解の漸近形から直接エネルギー消散を計算することにより、エネルギー減衰則を求め、これを再規格化する。上の二通りの方法で得られたエネルギー減衰法則を等しいとおくことにより、パラメーター α を決定する。 α の値が決まると、Burgers乱流のほとんど全ての統計量が自動的に求まる。

Burgers方程式を $t=t_0$ における代表長さ l_0 , 代表速度 u_0 で無次元化すると次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

ただし, $R (= \frac{u_0 l_0}{\nu})$ は Reynolds 数である。(1)式の

$R \gg t \gg 1$ における厳密解の漸近形は, 領域 $\frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2}$
 $< x < \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}$ において次のように表わせる。

$$u(x, t) = \frac{1}{t} [x - \frac{1}{2}(\eta_i + \eta_{i+1})] - \frac{1}{2t}(\eta_{i+1} - \eta_i) \times \tanh[\frac{R}{4t}(\eta_{i+1} - \eta_i)(x - \xi_i)]$$

(i: integer), (2)

ここで, ξ_i はショックフロントの座標, η_i はスロープと x 軸との交点である。

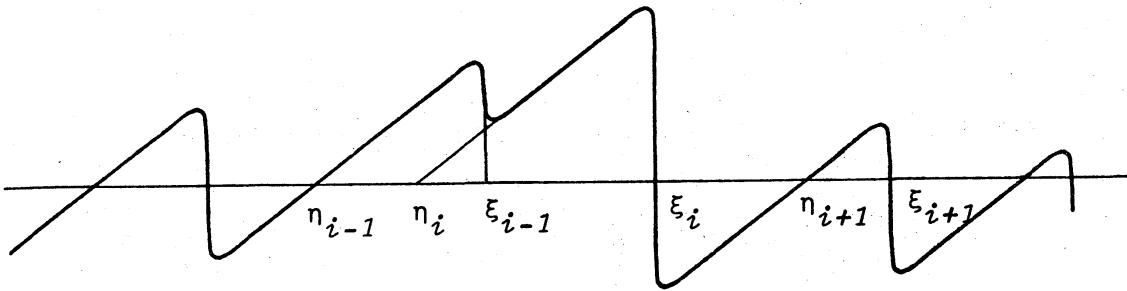


figure 1. Turbulent velocity field as a train of shock waves.

平均的な強さ, 平均的な長さをもつ代表的ショックを考える。

$$-L_1 = (-\xi_i + \xi_{i-1})/2, \quad L_2 = (\xi_{i+1} - \xi_i)/2, \quad v = \eta_{i+1} - \eta_i, \quad x = x - \xi_i$$

とおく。 v はショックの強さの 2 乗平均, $L_1 + L_2$ は 1 とみなせる。この代表的ショックについて計算すると, 次式が得られる。

$$u(x+r, t) - u(x, t) = \frac{r}{2t} - \frac{V}{2t} \left\{ \tanh\left[\frac{RV}{4t}(x+r)\right] - \tanh\left[\frac{RV}{4t}x\right] \right\} \quad (3)$$

$t \gg r$ と L , $\langle \rangle$ を $[0, L]$ での空間平均でおきかえると,

$$\begin{aligned} \langle (u(x+r, t) - u(x, t))^2 \rangle &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L (u(x+r, t) - u(x, t))^2 dx \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N}{L} \int_{-L_1}^{L_2} (u(x+r, t) - u(x, t))^2 dx \\ &= \frac{NV^2}{Lt^2} \left[r \coth \frac{RV}{4t} r - \frac{4t}{RV} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x+r, t) u(x, t) \rangle e^{ikr} dr \\ &= -\frac{1}{2\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dr^2} \langle u(x+r, t) u(x, t) \rangle \cos kr \, dr, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{2\pi k^2} \frac{N}{L} \frac{V^2}{2t^2} \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dr^2} \left[r \coth \frac{RV}{4t} r - \frac{4t}{RV} \right] \cos kr \, dr \\ &= \frac{N}{L} \frac{\pi}{R^2} \operatorname{cosech}^2 \frac{2\pi t}{RV} k, \end{aligned} \quad (6)$$

となる。(6)式は $k \ll \frac{RV}{2\pi t}$ において次のようになる。

$$E(k, t) = \frac{N}{L} \frac{V^2}{4\pi t^2} k^{-2}. \quad (7)$$

逆に, $k \gg \frac{RV}{2\pi t}$ では, 次のようになる。

$$E(k, t) = \frac{N}{L} \frac{4\pi}{R^2} \exp\left(-\frac{4\pi t}{V} \frac{1}{R} k\right). \quad (8)$$

(7), (8) を再規格化すると, 次のようになる。

$$E(k, t) = \frac{N}{L} \frac{V^2}{4\pi} t_0^{-\alpha} t^{-2+\alpha} k^{-2} \quad (9)$$

$$E(k, t) = \frac{N}{L} \frac{4\pi}{R^2} \frac{t^\alpha}{t_0^\alpha} \exp\left(-\frac{4\pi t_0^\alpha}{RV} t^{1-\alpha} k\right) \quad (10)$$

ここで、大きい渦の不変性の仮定

$$E(k, t) = k^a = \text{constant in time.} \quad (11)$$

を用いると、代表的波数 k_0 と代表的エネルギースペクトルの大きさ E_0 は次の時間依存性をもつ。 E_0, k_0 は図2の2つの曲線の交点と考えてよい。

$$k_0 \propto t^{\frac{-2+\alpha}{a+2}}, \quad (12)$$

$$E_0 \propto t^{\frac{(-2+\alpha)a}{a+2}}. \quad (13)$$

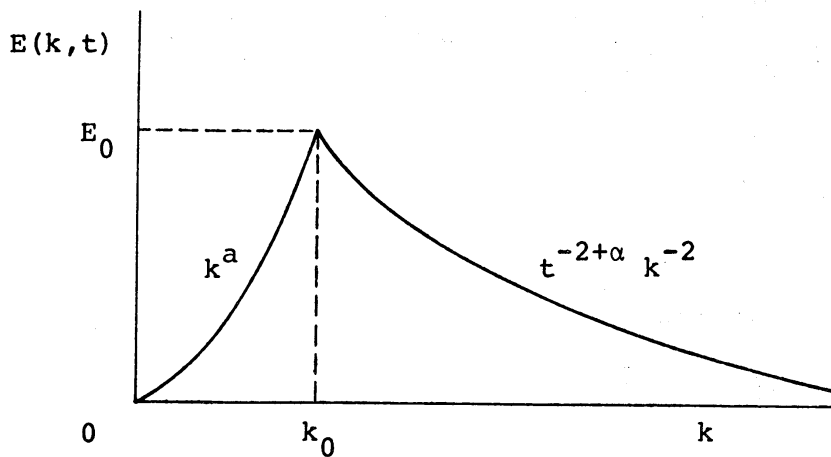


figure 2. Schematic energy spectrum.

さらに、次のエネルギー・スペクトルの相似性を仮定すると、

$$E(k, t) \propto E_0 f(k/k_0) \quad (15)$$

エネルギー・減衰則

$$\mathcal{E}(t) \propto t^{\frac{(-2+\alpha)(a+1)}{a+2}}, \quad (16)$$

が得られる。

一方、エネルギー・減衰則は、エネルギー・消散の計算から次のように求められる。

$$\mathcal{E}(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_0^L u(x, t)^2 dx. \quad (17)$$

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \frac{d}{dt} \int_0^L u(x, t)^2 dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{RL} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{RL} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx &= \frac{1}{RL} \sum_{i=1}^N \int_{\xi_i - \epsilon}^{\xi_i + \epsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{RL} \sum_{i=1}^N \frac{R^2 V^4}{8^2 t^4} \int_{\xi_i - \epsilon}^{\xi_i + \epsilon} \operatorname{cosech}^4 \left[\frac{RV}{4t} (x - \xi_i) \right] dx \\ &= \frac{N}{L} \frac{V^3}{12t^3} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = - \frac{N}{L} \frac{V^3}{12t^3} \quad (20)$$

(20) を再規格化し、積分すると $\mathcal{E}(t)$ が求められる。

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = - \frac{N}{L} \frac{V^3}{12} \frac{1}{t_0^{2\alpha}} t^{-3+2\alpha} \quad (21)$$

$$E(t) = \frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{N}{L} \frac{V^3}{12} \frac{1}{t_0^{2\alpha}} t^{2(\alpha-1)} \quad (22)$$

二つの方法で求められたエネルギー減衰則(16)と(22)を比較して、次式が得られる。

$$\alpha = \frac{2}{a+3} \quad (23)$$

いくつかの a の値に対する α の値と、エネルギー減衰のべき p を table 1. に示す。

a	α	p
0	2/3	-2/3
1	1/2	-1
2	2/5	-6/5
3	1/3	-4/3
4	2/7	-10/7
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
∞	0	-2

table 1. Values of α and the power indices of the energy decay p .

次の積分量を定義する。

$$J = \int_0^\infty \langle u(x+r, t) u(x, t) \rangle dr ,$$

$J \neq 0$ の場合は $a=0$ に対す。この場合について Burgers

は次元解析で, $\varepsilon(t) \propto t^{-2/3}$ を導いており, table 1 と一致している。Yamamoto & Hosokawa の Monte Carlo 法の数値実験結果は table 1 と良く一致している。

速度微分の skewness は次のようにして求まる。

$$S_0(t) = \langle (\partial u / \partial x)^3 \rangle / \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle^{3/2} . \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{RV^2}{8t^2} \operatorname{cosech}^2 \left\{ \frac{RV}{4t} (x - \xi_i) \right\} . \quad (25)$$

$$\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{N}{L} \frac{RV^3}{12t^3} . \quad (26)$$

$$\langle (\partial u / \partial x)^3 \rangle = -\frac{R^2 V^5}{120t^5} . \quad (27)$$

$$S_0(t) = \frac{\sqrt{3}}{5} R^{1/2} V^{1/2} t^{-1/2} . \quad (28)$$

$$S_0(t) = \frac{\sqrt{3}}{5} R^{1/2} V^{1/2} \frac{1}{t_0^\alpha} t^{-1/2+\alpha} . \quad (29)$$

同様に Taylor の microscale も計算できる。

$$\lambda^2 = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle} . \quad (30)$$

$$\lambda^2 = -\frac{2}{R} \frac{\mathcal{E}(t)}{d\mathcal{E}(t)/dt} . \quad (31)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} R^{-1/2} t^{1/2} . \quad (32)$$

この λ を用いて定義する Reynolds 数 R_λ についても次のように求まる。

$$\begin{aligned}
 R_\lambda &= R \langle u^2 \rangle^{1/2}_\lambda \\
 &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{N}{L} \frac{V^3}{12} \right)^{1/2} \frac{1}{t_0^\alpha} R^{1/2} t^{\alpha-1/2} .
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

References

- ¹ K.Yamamoto and I.Hosokawa, Phys. Fluids 19, 1423 (1976).
- ² T.Tatsumi and S.Kida, J. Fluid Mech. 55, 659 (1972).
- ³ J.M.Burgers, Statistical Models and Turbulence 41 (1972)
(ed. M.Rosenblatt and C.Van Atta) Springer.